

PRĘT RÓWNEJ WYTRZYMAŁOŚCI PRZY DRGANIACH WŁASNYCH PIERWSZEGO  
RZĘDU (\*)

RYSZARD ŁĄCZKOWSKI (ELBLĄG)

Ważniejsze oznaczenia

- $l$  długość całkowita pręta w cm,
- $\xi$  bieżąca współrzędna wzdłuż długości pręta w cm,
- $x$  bezwymiarowa współrzędna wzdłuż długości pręta,
- $y$  ugięcie drgającego pręta w cm,
- $t$  czas w sek.,
- $F$  pole przekroju poprzecznego pręta w  $\text{cm}^2$ ,
- $I$  moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta w  $\text{cm}^4$ ,
- $W$  wskaźnik wytrzymałości na zginanie przekroju poprzecznego pręta w  $\text{cm}^3$ ,
- $d$  średnica przekroju poprzecznego pręta w cm,
- $E$  moduł Younga w  $\text{kG/cm}^2$ ,
- $\gamma$  ciężar właściwy w  $\text{kG/cm}^3$ ,
- $g$  przyspieszenie ziemskie w  $\text{cm/sek.}^2$ ,
- $p$  częstość kątowna własnych drgań pręta w  $\text{rd/sek.}$ ,
- $M$  moment zginający w  $\text{kGcm}$ ,
- $\sigma$  naprężenie zginające w  $\text{kG/cm}^2$ ,
- $0$  wskaźnik dla przekroju poprzecznego u podstawy pręta.

1. Wstęp

Dla określenia dynamicznych własności materiałów konstrukcyjnych przy drganiach giętnych prowadzi się często badania na prętach zamocowanych na jednym brzegu i swobodnych na drugim. Jedną z podstawowych trudności takich badań jest zapewnienie stałego naprężenia wzdłuż długości pręta drgającego z częstością własną pierwszego rzędu. Warunek taki może być spełniony tylko przez odpowiednie ukształtowanie badanego pręta. W niniejszej pracy zagadnienie to rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń, przy czym nie wykroczone poza ramy klasycznej teorii prętów cienkich i pominięto wpływ tłumienia na drgania własne.

(\*) Praca została wykonana w Ośrodku Badawczym Zakładów Mechanicznych im. Gen. K. Świerczewskiego w Elblągu w 1961 r.

## 2. Równanie różniczkowe giętych drgań własnych

Wiadomo z teorii drgań, że gięte drgania własne nietłumione pręta o zmiennym przekroju są opisane przez równanie różniczkowe cząstkowe:

$$E \frac{\partial^2 \left( I \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right)}{\partial \xi^2} + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $0 \leq \xi \leq l$ .

Po wprowadzeniu bezwymiarowej współrzędnej  $x = \xi/l$  określonej w przedziale  $0 \leq x \leq 1$  równanie różniczkowe przekształcono do postaci

$$(1) \quad \frac{Eg}{\gamma Fl^4} \frac{\partial^2 \left( I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Dla pełnego rozwiązania otrzymanego równania należy określić warunki początkowe i brzegowe. Warunki początkowe mają postać: dla  $t = 0$

$$y = \theta(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x).$$

Przy założeniu, że pręt jest sztywno zamocowany na jednym brzegu i swobodny na drugim, warunki brzegowe są określone w sposób następujący: dla  $x = 0$

$$(2) \quad y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

a dla  $x = 1$

$$(3) \quad M = \frac{EI}{l^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad Q = \frac{E}{l^3} \frac{\partial}{\partial x} \left( I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Rozwiązanie szczególne równania (1) będziemy poszukiwać w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$(4) \quad y = T(t) X(x),$$

z których każda zależy tylko od jednej zmiennej.

Podstawiając funkcję (4) do (1) otrzymano po przekształceniach

$$\frac{Eg}{\gamma Fl^4} \frac{1}{X} \frac{d^2 (IX'')}{dx^2} = - \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Ponieważ lewa strona otrzymanego równania zależy od  $x$ , a prawa od  $t$ , to równanie może być spełnione tylko wówczas, gdy obie części są równe tej samej stałej, którą oznaczono przez  $p^2$ . Otrzymano w ten sposób dwa równania:

$$(5) \quad T'' + p^2 T = 0$$

oraz

$$(6) \quad \frac{d^2 (IX'')}{dx^2} = \frac{\gamma l^4 F}{Eg} p^2 X.$$

Rozwiązanie równania (5) ma postać

$$T(t) = A \cos pt + B \sin pt,$$

przy czym  $A$  i  $B$  oznaczają dowolne stałe, które można określić z warunków początkowych.

Równanie różniczkowe (6) można przedstawić w postaci

$$(7) \quad \frac{d^2 (IX'')}{dx^2} = a \frac{F}{F_0} X,$$

gdzie

$$a = \frac{\gamma l^4 F_0}{Eg} p^2.$$

Ze względów technologicznych przyjęto w dalszych rozważaniach, że wszystkie poprzeczne przekroje pręta są kołowe, spełniony jest więc warunek

$$\frac{F}{F_0} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2.$$

Wykorzystując ostatnią zależność w równaniu (7) otrzymano

$$(8) \quad \frac{d^2 (IX'')}{dx^2} = a \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 X.$$

Po wykorzystaniu zależności (4) warunki brzegowe (2) i (3) przyjmują postać: dla  $x = 0$

$$(9) \quad X = 0, \quad X' = 0,$$

a dla  $x = 1$

$$(10) \quad X'' = 0, \quad \frac{d (IX'')}{dx} = 0.$$

### 3. Warunek równej wytrzymałości

Dla pręta równej wytrzymałości musi być spełniony w przedziale  $[0, 1]$  warunek

$$(11) \quad \sigma = \frac{M}{W} = \text{const} = \sigma_0.$$

Z teorii zginania prętów cienkich wiadomo, że

$$(12) \quad M = \frac{EI}{l^2} X''.$$

Dla przekroju kołowego mamy

$$(13) \quad W = \frac{2I}{d}.$$

Podstawiając zależności (12) i (13) do równania (11) otrzymano

$$(14) \quad X'' = 2 \frac{l^2 \sigma_0}{Ed}.$$

Dla przekroju o współrzędnej  $x = 0$  ostatni wzór przyjmie postać

$$(15) \quad X_0'' = 2 \frac{l^2 \sigma_0}{Ed_0}.$$

Dzieląc stronami równanie (14) przez (15) otrzymano względną wartość drugiej pochodnej

$$(16) \quad Z'' = \frac{X''}{X_0''} = \frac{d_0}{d}.$$

Równanie (16) określa warunek równej wytrzymałości dla zginanego pręta o przekrojach kołowych.

#### 4. Obliczenie kształtu pręta równej wytrzymałości przy drganiach własnych pierwszego rzędu

Dla obliczenia kształtu pręta równej wytrzymałości drgającego z częstością własną pierwszego rzędu należy jednocześnie rozwiązać równania (8) i (16) spełniając przy tym warunki brzegowe (9) i (10). Ponieważ nie znane są kształt pręta określony przez stosunek  $d/d_0$  oraz linia ugięcia  $X$ , przeto układ tych równań można rozwiązać tylko metodą kolejnych przybliżeń. W tym celu przyjęto pierwsze przybliżenie kształtu pręta jako  $\varphi_{11}(x) = (d/d_0)_1$ . Zgodnie z równaniem (16) można napisać dla pierwszego przybliżenia

$$Z_{11}'' = \varphi_{11}^{-1}(x).$$

Całkując dwukrotnie ostatnie równanie i wykorzystując warunki brzegowe (9) otrzymano

$$Z_{11}(x) = \int_0^x dx \int_0^x \varphi_{11}^{-1} dx.$$

Dla ułatwienia obliczeń wygodniej jest posługiwać się względną linią ugięcia:

$$(17) \quad \bar{Z}_{11}(x) = \frac{Z_{11}(x)}{Z_{11}(1)} = \frac{\int_0^x dx \int_0^x \varphi_{11}^{-1} dx}{\int_0^1 dx \int_0^x \varphi_{11}^{-1} dx},$$

którą należy podstawić do prawej strony równania (8) na miejsce funkcji  $X$ . Otrzymano w ten sposób następujące równanie różniczkowe:

$$(18) \quad \frac{d^2(IX'')}{dx^2} = a\varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11}.$$

W wyniku całkowania tego równania otrzymano

$$(19) \quad \frac{d(IX'')}{dx} = a \int_0^x \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx + C_1.$$

Wartość stałej  $C_1$ , wyznaczona z drugiego warunku brzegowego (10), wynosi

$$(20) \quad C_1 = -a \int_0^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx.$$

Podstawiając (20) do (19) i wykorzystując addytywność całek oznaczonych otrzymano

$$\frac{d(IX'')}{dx} = -a \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx.$$

W wyniku powtórnego całkowania i spełnienia pierwszego z warunków brzegowych (10) otrzymano zależność

$$IX'' = a \int_x^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx,$$

którą przedstawiono w postaci ułamka

$$(21) \quad \frac{IX''}{I_0 X_0''} = \frac{\int_x^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx}{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx}.$$

Ostatnia zależność przedstawia pierwsze przybliżenie funkcji momentów względnych dla przyjętego kształtu pręta  $\varphi_{11}$ . Przeprowadzone obliczenia wykazały, że należy wykonać dwa lub trzy przybliżenia, aby otrzymać wystarczająco dokładny rozkład momentów względnych dla tego kształtu pręta. W tym celu należy z równania (21) obliczyć drugie przybliżenie funkcji  $Z''$  wykorzystując przy tym zależność

$$\frac{I}{I_0} = \left( \frac{d}{d_0} \right)_1^4 = \varphi_{11}^4.$$

Otrzymano w ten sposób

$$(22) \quad Z_{12}'' = \varphi_{12}^{-1} = \varphi_{11}^{-4} \frac{\int_x^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx}{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{11} dx}.$$

Postępując z funkcją  $Z_{12}''$  tak samo jak z funkcją  $Z_{11}''$  można obliczyć drugie przybliżenie względnej linii ugięcia:

$$\bar{Z}_{12}(x) = \frac{Z_{12}(x)}{Z_{12}(1)} = \frac{\int_0^x dx \int_0^x \varphi_{12}^{-1} dx}{\int_0^1 dx \int_0^x \varphi_{12}^{-1} dx}.$$

Podstawiając w równaniu (18) funkcję  $\bar{Z}_{12}$  na miejsce funkcji  $\bar{Z}_{11}$  otrzymano w wyniku dwukrotnego całkowania wzór analogiczny do (22):

$$Z''_{13} = \varphi_{13}^{-1} = \varphi_{11}^{-4} \frac{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{12} dx}{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{12} dx}.$$

W ten sposób można uzyskać dowolne przybliżenie linii ugięcia  $Z_{1n}$  dla założonego kształtu pręta  $(d/d_0)_1 = \varphi_{11}$ . Praktycznie wystarczają dwa lub trzy przybliżenia dla otrzymania wystarczająco dokładnego rozkładu momentów gnących. Należy wówczas obliczyć rozkład względny naprężeń wzdłuż długości pręta dzieląc obustronnie równanie (21) przez  $(W/W_0)_1 = (d/d_0)_1^3$ . Dla przybliżenia  $\bar{Z}_{1n}$  względne naprężenia będą wyrażone wówczas za pomocą wzoru

$$(23) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \varphi_{11}^{-3} \frac{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{1n} dx}{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{1n} dx}.$$

Gdyby przyjęty kształt pręta  $\varphi_{11}$  był kształtem poszukiwanym, to wówczas dla całego pręta byłby spełniony warunek  $\sigma/\sigma_0 = 1$ . W innych przypadkach można obliczyć błąd względny

$$(24) \quad \Delta\sigma = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \cdot 100\%.$$

Jeżeli błąd ten przekracza wartość dopuszczalną, to należy przyjąć następne przybliżenie kształtu pręta  $\varphi_{21} = (d/d_0)_2$ . Przybliżenie to można określić ze wzoru (23) przyjmując  $\sigma/\sigma_0 = 1$ . Otrzymano w ten sposób wzór

$$(25) \quad \varphi_{21} = \sqrt[3]{\frac{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{1n} dx}{\int_0^1 dx \int_x^1 \varphi_{11}^2 \bar{Z}_{1n} dx}}.$$

Podstawiając funkcję  $\varphi_{21}$  zamiast funkcji  $\varphi_{11}$  otrzymano ze wzoru (17) pierwsze przybliżenie względnej linii ugięcia dla drugiego przybliżenia kształtu, co oznaczono symbolem  $\bar{Z}_{21}$ . W podobny sposób zależność (22) pozwala określić funkcję  $\varphi_{22}$ . Przy  $n$  kolejnym przybliżeniu można otrzymać w ten sposób funkcję  $\bar{Z}_{2n}$ . Jeżeli we wzorze (23) zastąpi się  $\varphi_{11}$  funkcją  $\varphi_{21}$ , a  $\bar{Z}_{1n}$  funkcją  $\bar{Z}_{2n}$ , to wówczas można obliczyć względny rozkład naprężeń dla drugiego przybliżenia kształtu. Gdyby również w tym przypadku  $\Delta\sigma$  przekraczało wartość dopuszczalną, należy według wzoru (25) przyjąć następne przybliżenie kształtu pręta  $\varphi_{31}$ . Postępując systematycznie w sposób opisany można obliczyć takie przybliżenie kształtu  $\varphi_{m1}$  oraz odpowiednią linię ugięcia  $\bar{Z}_{mn}$ , że błąd względny  $\Delta\sigma$  będzie mniejszy od wartości dopuszczalnej. Wówczas funkcja  $\varphi_{m1} = (d/d_0)_m$  określa poszukiwany kształt pręta. Szybkość

zbieżności opisanego postępowania iteracyjnego zależy znacznie od pierwszego przybliżenia kształtu pręta. Dlatego jako pierwsze przybliżenie należy przyjmować kształt pręta równej wytrzymałości zginanego statycznie obciążeniem równomiernie rozłożonym na całej długości. Jeżeli obciążenie jednostkowe takiego pręta wynosi  $q$ , to moment gnący w dowolnym punkcie będzie określony znaną zależnością

$$M = \frac{ql^2}{2} (1-x)^2,$$

przy czym dla  $x = 0$  moment ten wynosi  $M_0 = ql^2/2$ .

Z warunku równej wytrzymałości pręta zginanego statycznie wynika

$$\frac{W}{W_0} = \frac{M}{M_0} = (1-x)^2.$$

Dla pręta o kołowych przekrojach poprzecznych warunek ten przyjmuje postać

$$\frac{d}{d_0} = (1-x)^{2/3}.$$

Pierwsze przybliżenie kształtów pręta równej wytrzymałości drgającego z częstością własną pierwszego rzędu będzie miało więc postać

$$\varphi_{11}(x) = \left( \frac{d}{d_0} \right)_1 = (1-x)^{2/3}.$$

Według opisanego algorytmu wykonano obliczenia numeryczne za pomocą tablicy 1, w którą wpisano przykładowo wartości jednej z kolejnych iteracji. Tablica została opracowana dla pręta podzielonego na 20 części. Całkowanie tabelaryczne wykonano metodą trapezów. Wykresy względnych naprężeń dla poszczególnych przybliżeń kształtu pręta pokazano na rys. 1. Z rysunku tego widać, że zbieżność opisanego metody jest powolna. Dopiero ósme przybliżenie dało zadowalającą dokładność i zostało przyjęte jako poszukiwane rozwiązanie. W tablicy 2 podano charakterystyczne wielkości dla tego przybliżenia. Z ostatniej kolumny tej tabeli wynika, że odchyłki naprężeń obliczonych od warunku  $\sigma = \text{const}$  nie przekraczają  $\pm 1,5\%$ .

##### 5. Wyniki pomiaru rozkładu naprężeń dynamicznych w pręcie równej wytrzymałości

Poprawność teoretycznego rozwiązania sprawdzono eksperymentalnie (1). Dla tego celu wykonano pręt o rozkładzie średnic podanym w tablicy 2. Jego długość wynosiła  $l = 360$  mm, a średnica podstawy  $d_0 = 30$  mm. Pręt wykonano ze stali 15 H11MF. Ze względów technologicznych wierzchołek pręta nie zakończono ostrzem, lecz krótkim odcinkiem walcowym. Przejście pomiędzy właściwym prętem i jego częścią mocującą wykonano dużym promieniem dla uniknięcia koncentracji naprężeń. Pręt został wykonany za pomocą kopiowego toczenia z dokładnością  $\pm 0,01$  mm. Pomiar naprężeń dynamicznych wykonano za pomocą drucikowych

(1) Pomiaru wykonał mgr Kazimierz WELKA.

Tablica 1

$x$	$\frac{d}{d_0}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^3$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^4$	$Z'_{11} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^{-1}$	$2Z'_{11} = \int_0^x \boxed{6} dx$	$4Z_{11} = \int_0^x \boxed{7} dx$	$\bar{Z}_{11}(x) = \frac{4Z_{11}(x)}{4Z_{11}(1)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0						0		
0,025	0,982864	0,966021	0,949466	0,933197	1,017366	0,101737	0,001272	0,000304
0,075	0,946694	0,896229	0,848455	0,803226	1,056075	0,207344	0,011446	0,002738
0,125	0,907785	0,824074	0,748082	0,679098	1,101128	0,317457	0,032180	0,007699
0,175	0,865952	0,749873	0,649354	0,562309	1,154063	0,432863	0,063926	0,015295
0,225	0,821107	0,674217	0,553605	0,454468	1,217040	0,554567	0,107212	0,025652
0,275	0,773257	0,597926	0,462352	0,357516	1,291682	0,683735	0,162669	0,038920
0,325	0,722502	0,522009	0,377152	0,272493	1,381958	0,821931	0,231042	0,055280
0,375	0,669036	0,447609	0,299467	0,200354	1,491859	0,971117	0,313235	0,074945
0,425	0,611180	0,373541	0,228302	0,139533	1,648348	1,135952	0,410347	0,098180
0,475	0,552866	0,305661	0,168990	0,093428	1,826968	1,318649	0,523942	0,125359
0,525	0,492909	0,242959	0,119757	0,059029	2,056650	1,524314	0,655807	0,156910
0,575	0,431900	0,186538	0,080566	0,034796	2,358920	1,760206	0,808238	0,193381
0,625	0,370568	0,137321	0,050887	0,018857	2,767778	2,036984	0,984259	0,235496
0,675	0,309791	0,095970	0,029731	0,009210	3,339522	2,370936	1,187957	0,284233
0,725	0,250617	0,062809	0,015741	0,003945	4,170089	2,787945	1,425051	0,340961
0,775	0,194262	0,037738	0,007331	0,001424	5,435393	3,331484	1,703845	0,407665
0,825	0,142012	0,020167	0,002864	0,000407	7,488943	4,080378	2,036993	0,487375
0,875	0,095281	0,009078	0,000865	0,0000822	11,256097	5,205988	2,445031	0,585003
0,925	0,055828	0,003117	0,000174	0,0000097	18,865979	7,092586	2,965630	0,709563
0,975	0,026684	0,000712	0,000019	0,000000507	40,200000	11,112586	3,674889	0,879261
1							4,179518	

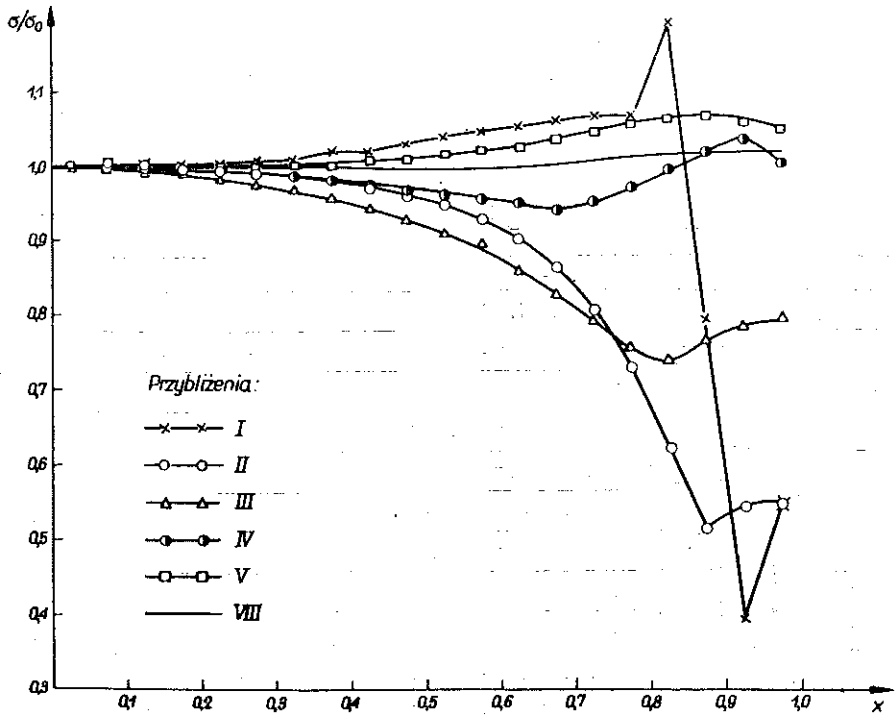
$$4Z_{11}(1) = 4Z_{11}(0,975) + 0,0125 [3 \cdot 2Z'_{11}(1) + 2Z'_{11}(0,95)] = 4,179518$$

$$4I(0) X''(0) = 4IX''(0,025) + 0,0125 \{3 \cdot 2[I(0) X''(0)] + 2 [IX''(0,05)]\} = 3,825420 \cdot 10^{-2}$$

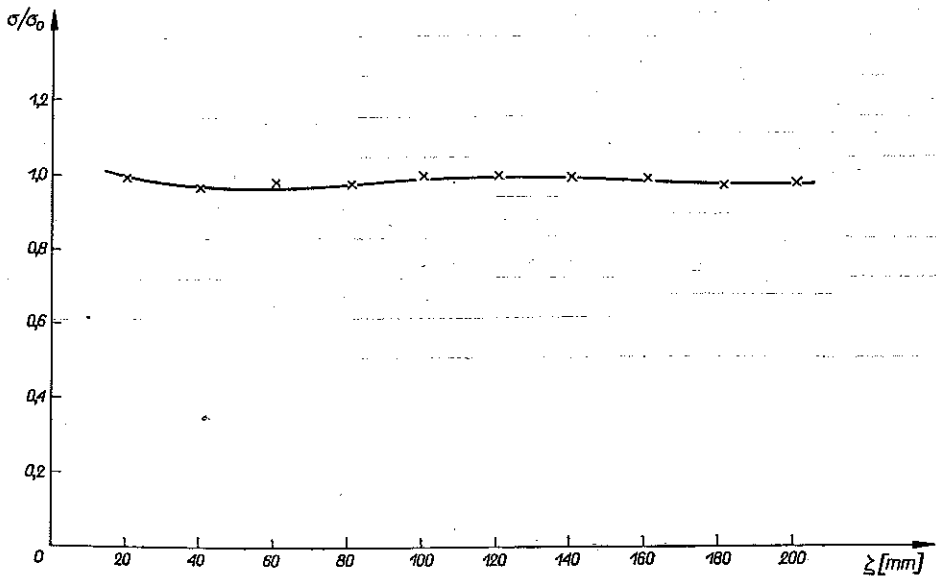


Tablica 1

$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2 \bar{Z}_{11}(x)$	$2(IX'')' = -\int_x^1 \frac{1}{10} dx$	$4IX'' = \int_x^1 \frac{1}{11} dx$	$\frac{4I(x)X''(x)}{4I(0)X''(0)}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{13}{4}$	$\Delta\sigma = \left(\frac{14}{5} - 1\right) \cdot 100\%$	$Z'_{12} = \frac{13}{5}$
10	11	12	13	14	15	16
	$3,871112 \cdot 10^{-2}$	$3,825420 \cdot 10^{-2}$				
$0,293670 \cdot 10^{-3}$	$3,868175 \cdot 10^{-2}$	$3,631901 \cdot 10^{-2}$	0,949412	0,999943	0,006	1,017376
$0,245387 \cdot 10^{-2}$	$3,843636 \cdot 10^{-2}$	$3,245084 \cdot 10^{-2}$	0,848295	0,999811	0,02	1,056110
$0,634455 \cdot 10^{-2}$	$3,780191 \cdot 10^{-2}$	$2,860720 \cdot 10^{-2}$	0,747818	0,999647	0,05	1,101193
$1,146931 \cdot 10^{-2}$	$3,665498 \cdot 10^{-2}$	$2,482701 \cdot 10^{-2}$	0,649001	0,999456	0,05	1.154171
$1,729501 \cdot 10^{-2}$	$3,492548 \cdot 10^{-2}$	$2,116151 \cdot 10^{-2}$	0,553181	0,999234	0,08	1,217206
$2,327128 \cdot 10^{-2}$	$3,259835 \cdot 10^{-2}$	$1,766896 \cdot 10^{-2}$	0,461883	0,998986	0,10	1,291922
$2,885666 \cdot 10^{-2}$	$2,971268 \cdot 10^{-2}$	$1,440913 \cdot 10^{-2}$	0,376668	0,998717	0,13	1,382303
$3,354606 \cdot 10^{-2}$	$2,635807 \cdot 10^{-2}$	$1,143786 \cdot 10^{-2}$	0,298996	0,998427	0,16	1,492338
$3,667425 \cdot 10^{-2}$	$2,269065 \cdot 10^{-2}$	$0,880205 \cdot 10^{-2}$	0,230094	1,007849	-0,78	1,649029
$3,831736 \cdot 10^{-2}$	$1,885891 \cdot 10^{-2}$	$0,653299 \cdot 10^{-2}$	0,170778	1,010580	-1,06	1,827910
$3,812270 \cdot 10^{-2}$	$1,504664 \cdot 10^{-2}$	$0,464710 \cdot 10^{-2}$	0,121479	1,014379	-1,44	2,057954
$3,607290 \cdot 10^{-2}$	$1,143935 \cdot 10^{-2}$	$0,314244 \cdot 10^{-2}$	0,082146	1,019611	-1,96	2,360788
$3,233855 \cdot 10^{-2}$	$0,820550 \cdot 10^{-2}$	$0,199851 \cdot 10^{-2}$	0,052243	1,026647	-2,66	2,770483
$2,727784 \cdot 10^{-2}$	$0,547772 \cdot 10^{-2}$	$0,117796 \cdot 10^{-2}$	0,030793	1,035720	-3,57	3,343431
$2,141542 \cdot 10^{-2}$	$0,333618 \cdot 10^{-2}$	$0,063019 \cdot 10^{-2}$	0,016474	1,046566	-4,65	4,175919
$1,538446 \cdot 10^{-2}$	$0,179773 \cdot 10^{-2}$	$0,029657 \cdot 10^{-2}$	0,007753	1,057564	-5,76	5,444522
$0,982889 \cdot 10^{-2}$	$0,081484 \cdot 10^{-2}$	$0,011680 \cdot 10^{-2}$	0,003053	1,065992	-6,60	7,501228
$0,531066 \cdot 10^{-2}$	$0,028377 \cdot 10^{-2}$	$0,003542 \cdot 10^{-2}$	0,000926	1,070520	-7,05	11,292268
$0,221171 \cdot 10^{-2}$	$0,006260 \cdot 10^{-2}$	$0,000704 \cdot 10^{-2}$	0,000184	1,057471	-5,74	18,969072
$0,062603 \cdot 10^{-2}$	0	$0,000078 \cdot 10^{-2}$	0,000021	1,052631	-5,26	40,000000



Rys. 1



Rys. 2

tensometrów oporowych o bazie pomiarowej 5 mm. Na długości 200 mm od podstawy pręta naklejono dziesięć takich tensometrów. Umocowanie tensometrów na pozostałej części pręta uniemożliwiły małe średnice przekrojów poprzecznych.

Tablica 2

$x$	$\frac{d}{d_0}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	$\Delta\sigma\%$
0,000	1,0000	—	—
0,025	0,9829	1,0002	0,02
0,075	0,9470	1,0006	0,06
0,125	0,9082	1,0012	0,12
0,175	0,8666	1,0005	0,05
0,225	0,8220	0,9997	-0,03
0,275	0,7744	0,9988	-0,12
0,325	0,7239	0,9979	-0,21
0,375	0,6705	0,9970	-0,30
0,425	0,6147	0,9961	-0,39
0,475	0,5567	0,9957	-0,43
0,525	0,4970	0,9956	-0,44
0,575	0,4361	0,9963	-0,37
0,625	0,3748	0,9977	-0,23
0,675	0,3139	1,0003	0,03
0,725	0,2544	1,0039	0,39
0,775	0,1974	1,0081	0,81
0,825	0,1444	1,0111	1,11
0,875	0,0968	1,0133	1,33
0,925	0,0566	1,0147	1,47
0,975	0,0272	1,0146	1,46
1,000	0,0000	—	—

Badanemu prętowi nadano drgania za pomocą maszyny rezonansowej Turbo 4 w sposób zapewniający warunki brzegowe przyjęte w rozważaniach teoretycznych. Pomiar naprężeń wykonano przy drganiach rezonansowych pierwszego rzędu. Wyniki pomiaru przedstawiono na rys. 2. Odchyłka pomierzonych naprężeń od linii stałego naprężenia nie przekracza  $\pm 3\%$ .

Резюме

СТЕРЖЕНЬ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дается метод расчета формы стержня, защемленного по одному краю и свободного по другому, который, подвергается колебаниям с собственной частотой первого порядка, сохраняет по своей длине постоянное напряжение. Определяется безразмерная форма такого стержня. Даются также результаты измерений распределения динамических напряжений проведенных на стержне.

## Summary

## A BAR OF UNIFORM STRENGTH UNDERGOING VIBRATION OF THE FIRST ORDER

The paper contains a description of a method for determining the form of a bar clamped at one end and free at the other, and performing natural vibration of the first order and preserving constant stress in the longitudinal direction. The form of such a bar is determined in a dimensionless manner. Some measurement results of dynamic stress distribution are quoted for a real bar.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 sierpnia 1965 r.*

---