

DRGANIA PEWNEGO NIELINIOWEGO UKŁADU O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

ZBIGNIEW OSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Weźmy pod uwagę ciężar zawieszony na linie o nieliniowej charakterystyce. Zbadamy drgania ciężaru w kierunku osi liny, gdy ciężar jest podnoszony lub opuszczany przez zwijanie, lub odwijanie liny z bębna. Są to warunki typowe dla pracy urządzeń dźwigowych.

Przyjmujemy, że zwijany koniec liny przemieszcza się wg równania

$$(1.1) \quad S = f(t).$$

Przemieszczenie bezwzględne masy m (rys. 1) można przedstawić za pomocą wzoru

$$(1.2) \quad y = x + f(t),$$

gdzie x przedstawia ruch względny masy w układzie przemieszczającym się zgodnie ze wzorem (1.1).

Załóżmy, że ruch unoszenia jest ruchem jednostajnym, wtedy możemy zbadać ruch względny, drgający niezależnie od ruchu unoszenia. Równanie różniczkowe ruchu względnego ma postać

$$(1.3) \quad m\ddot{x} = F - mg,$$

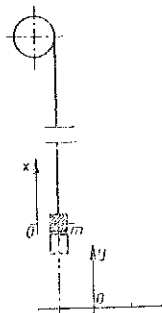
gdzie F oznacza napięcie w linie.

Załóżmy, że dana jest charakterystyka liny stalowej, którą na podstawie badań doświadczalnych [1] możemy przedstawić za pomocą wykresu (rys. 2).

Charakterystyka uwzględnia tarcie między drutami liny. Może ona być przedstawiona w postaci zależności między naprężeniem i odkształceniem jak następuje:

$$(1.4) \quad \sigma - \sigma_0 = e(\varepsilon - \varepsilon_0) + b(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + d(\varepsilon - \varepsilon_0)^3 + T \operatorname{sign} \dot{\varepsilon},$$

gdzie σ_0 i ε_0 oznaczają odpowiednie naprężenie i odkształcenie w stanie równowagi pod obciążeniem statycznym mg . Stałe e , b i d charakteryzują sprężystość liny, a T siłę tarcia.



Rys. 1

Uwzględniając związki

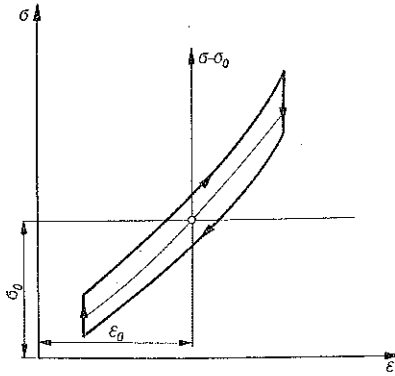
$$(1.5) \quad \varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{x}{l}, \quad \sigma A = F, \quad \sigma_0 A = mg,$$

gdzie l oznacza zmienną długość liny oraz A przekrój liny, możemy korzystając z równania (1.4) wyznaczyć siłę $F - mg$ i po podstawieniu do równania (1.3) otrzymamy równanie ruchu w postaci

$$(1.6) \quad m\ddot{x} + \frac{Ae}{l}x = -\frac{Ab}{l^2}x^2 - \frac{Ad}{l^3}x^3 - AT \operatorname{sign} \dot{x}.$$

W równaniu tym l jest funkcją czasu przedstawioną wzorem:

$$(1.7) \quad l = l_0 - f(t).$$



Rys. 2

Założymy, że funkcja ta jest wolno zmieniającą się funkcją czasu. Przyjmijmy też, że współczynniki b , d oraz T są małe. Otrzymane równanie można więc traktować jako równanie nieliniowe o zmieniających się stałych, w którym nieliniowe funkcje prawostronne stają pod znakiem małego parametru. (Nie wprowadzamy specjalnego oznaczenia dla małego parametru, ponieważ gra on rolę formalną).

2. Rozwiązanie równań ruchu

Stosując przystosowaną do tego przypadku metodę małego parametru Kryłowa-Bogolubowa [2], możemy rozwiązanie równania (1.6) w przybliżeniu pierwszym przedstawić w postaci układu

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \psi, & \frac{da}{dt} &= -\frac{ad(m\omega)}{2m\omega dt} - \frac{1}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_0(t, a, \psi) \sin \psi d\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \frac{1}{2\pi m\omega} \int_0^{2\pi} f_0(t, a, \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

We wzorach powyższych ω przedstawia wolno zmieniającą się częstość zerowego przybliżenia

$$(2.2) \quad \omega = \sqrt{\frac{Ae}{[l_0 - f(t)]m}},$$

a funkcja $f_0(t, a, \psi)$ ma postać

$$(2.3) \quad f_0(t, a, \psi) = -\frac{Ab}{l^2} a^2 \cos^2 \psi - \frac{Ad}{l^3} \cos^3 \psi - AT \operatorname{sign}(-a\omega \sin \psi)$$

Po obliczeniu całek występujących w równaniach (2.1)₂ i (2.1)₃ przybierają one postać

$$(2.4) \quad \frac{da}{dt} = -a \frac{d(m\omega)}{2m\omega dt} - \frac{2AT}{\pi m\omega}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{3Ad}{8m\omega l^3} a^2.$$

Przyjmijmy, że funkcja $f(t)$ ma postać

$$(2.5) \quad f(t) = ut,$$

gdzie u przedstawia stałą prędkość unoszenia liny. Badania ograniczamy do przypadku, gdy zmiana długości liny w czasie jednego okresu drgań nie jest zbyt duża. Badania ogranicza się do przedziału czasu mniejszego od wartości t_k określonej wzorem

$$ut_k = l_0.$$

Po czasie $t \geq t_k$ zagadnienie oczywiście traci sens.

Amplituda w omawianym przypadku przedstawiona jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym

$$(2.6) \quad \frac{da}{dt} + a \frac{u}{4(l_0 - ut)} = - \frac{2T \sqrt{l_0 - ut}}{\pi \sqrt{\frac{em}{A}}}.$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy wzór określający zmienność amplitudy:

$$(2.7) \quad a = a_0 \left(1 - \frac{ut}{l_0}\right)^{1/4} - \frac{D}{u} \frac{4}{7} \left[l_0^2 \frac{(l_0 - ut)^{1/4}}{l_0^{1/4}} - (l_0 - ut)^2 \right],$$

gdzie

$$D = \frac{2T}{\pi \sqrt{em/A}}.$$

Związek (2.7) możemy po rozłożeniu drugiego wyrazu w szereg potęgowy przedstawić w odpowiedniejszej do obliczeń postaci, jak następuje:

$$(2.8) \quad a = a_0 \left(1 - \frac{ut}{l_0}\right) - Dl_0 \left(1 - \frac{19}{28} \frac{u}{l_0} t^2\right).$$

Biorąc pod uwagę małą zmienność częstości w ciągu jednego okresu możemy, korzystając z równania (2.4)₂, wyznaczyć częstość drgań:

$$(2.9) \quad \Omega = \omega + \frac{3}{8} \frac{Ad}{m\omega l^3} a^2,$$

przy czym a jest funkcją czasu określoną wzorem (2.7) lub (2.8), a ω i l funkcjami czasu określonymi wzorami:

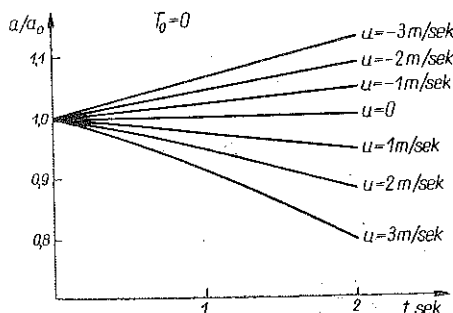
$$(2.10) \quad \omega = \sqrt{\frac{Ae}{(l_0 - ut)m}}, \quad l = l_0 - ut.$$

3. Dyskusja

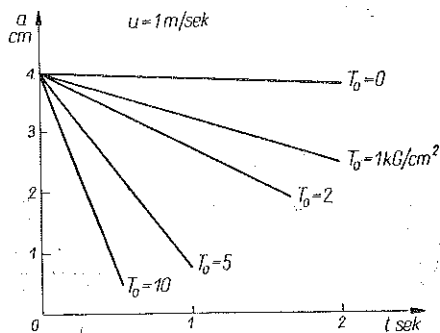
W celu zbadania własności ruchu drgającego w omawianych warunkach przeprowadzimy obliczenie na przykładzie. Dane do obliczeń ustalono następująco: lina 6×37 o średnicy 22 mm i przekroju $A = 1,74 \text{ cm}^2$;

$$\begin{aligned} l_0 &= 10 \text{ m}, & m &= 2 \text{ kGm}^{-1} \text{ sek.}^2, \\ e &= 0,8 \cdot 10^6, & d &= 0,8 \cdot 10^{11} \\ T &= 0 - 10 \text{ kG/cm}^2, & u &= 0 \text{ do } 3 \text{ m/sek.}^2. \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń obrazują wykresy na rys. 3-7.

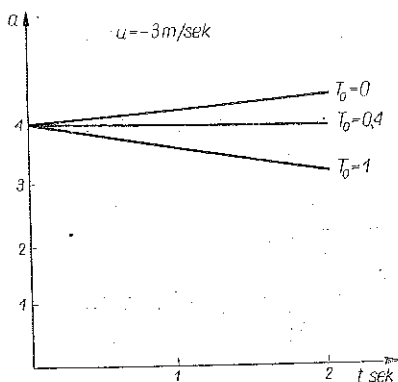


Rys. 3



Rys. 4

Wpływ prędkości podnoszenia na amplitudę drgań przy pominięciu tarcia ($T = 0$) przedstawiony jest na rys. 3. Amplituda zmienia się w zależności od czasu, natomiast jej stosunek do amplitudy początkowej a_0 nie jest zależny od wartości



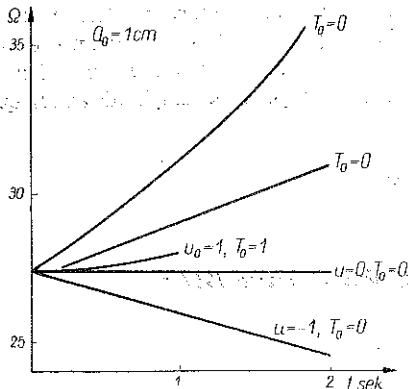
Rys. 5

Przy prędkości dodatniej (podnoszenie i skracanie się liny) amplituda drgań maleje. Przy prędkości ujemnej (opuszczanie i wydłużanie się liny) amplituda drgań rośnie. Wpływ tarcia przedstawiony jest na rys. 4. Tarcie w lince powoduje stosunkowo szybkie gaśnięcie drgań. Ponieważ przy opuszczaniu liny wpływ prędkości i wpływ tarcia są przeciwstawne, może się więc zdarzyć, że drgania w tym przypadku utrzymają stałą amplitudę (rys. 5). W naszym przypadku ma to miejsce przy $u = -3 \text{ m/sek.}$ i $T = 4 \text{ kG/cm}^2$.

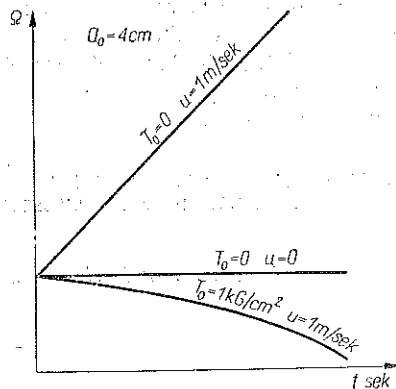
Zmienna częstość drgań przedstawiona jest na rys. 6 i 7. Częstość zależy od amplitudy, co jest wywołane nieliniowością siły sprężystej w lince. Rysunek 6 przedstawia odpowiednie zależności w przypadku, gdy $a_0 = 1 \text{ cm}$, a rys. 7 dla $a_0 = 4 \text{ cm}$.

Dla zbadania wpływu podnoszenia na częstość przeprowadzono obliczenia w przypadku $T = 0$. Wtedy obserwuje się stały wzrost częstości z upływem czasu

przy prędkościach dodatnich (podnoszenie i skracanie się liny) oraz zmniejszanie się częstości przy prędkościach ujemnych (wydłużanie się liny). Związany z podnoszeniem efekt wzrostania częstości i malenia amplitudy ma jasną interpretację fizykalną, wynika bowiem z zasady zachowania energii.



Rys. 6



Rys. 7

Wpływ tarcia na częstość drgań jest pośrednia. Tarcie powoduje zmianę amplitudy, a więc i zmianę częstości. Amplituda maleje z upływem czasu, a więc częstość z tego powodu maleje. Wpływ więc jednocześnie podnoszenia i tarcia jest przeciwny. W związku z tym wzrost częstości z upływem czasu może być w przypadku tarcia mniejszy niż bez tarcia (rys. 6). Przy silniejszym tarcu lub większych amplitudach częstość może maleć z czasem (rys. 7), zamiast wzrastać.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. OSIŃSKI, Z. WASILEWSKI, *The vibration of mass hung on the steel rope*, Zagadnienia Drganí Nieliniowych, Nr 6, Warszawa 1964.
2. Ю. А. Митропольский, *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Москва 1964.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

В работе исследуются продольные колебания массы, подвешенной на стальном канате с нелинейной характеристикой, с учетом перемещения каната, подверженного равномерному движению. Это движение, вызывает изменение активной длины каната. Для решения используется метод Крылова-Боголюбова, с помощью которого можно исследовать нелинейные уравнения с медленно изменяющимися постоянными. Проводится анализ влияния перемещений каната на амплитуду и частоту колебаний.

S u m m a r y

VIBRATION OF A CERTAIN NONLINEAR SYSTEM
WITH VARIABLE RIGIDITY

The object of the present investigation is longitudinal vibration of a mass suspended on a steel rope with nonlinear characteristic taking into consideration a monotonous motion of the rope. This motion causes variability of the active length of the rope. The solution is obtained by means of the Kryloff-Bogoluboff method adapted for the investigation of nonlinear vibrations with slowly varying parameters. The influence of the motion of the rope on the amplitude and frequency of vibration is analysed.

KATEDRA MASZYNOZNAWSTWA I ELEMENTÓW MASZYN
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 marca 1967 r.
