

ANALIZA PLASTYCZNA DWUWARSTWOWYCH POWŁOK WALCOWYCH
UWZGLĘDNIAJĄCA WPŁYW ZMIAN KSZTAŁTU

MARIA DUSZEK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

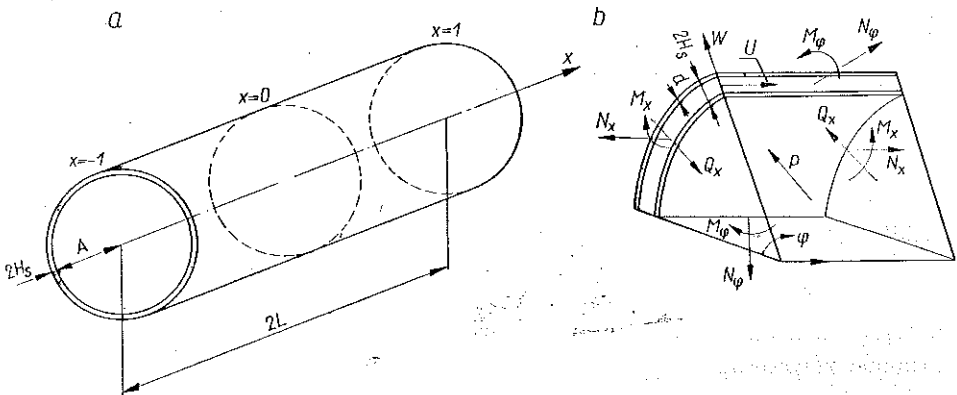
Istnieje dosyć bogata literatura omawiająca wpływ zmian kształtu na nośność graniczną płyt, belek, łuków i rusztów [1]–[7]. W ostatnich latach (1955–1966) analizowano również zachowanie się powłok z uwzględnieniem zmian geometrii w trakcie plastycznego płynięcia [8]–[13].

Przedstawione tu wyniki stanowią uzupełnienie pracy [9], polegające na przeniesieniu pewnych spostrzeżeń i wyników otrzymanych dla powłoki walcowej o przekroju pełnościennym na powłokę o przekroju sandwiczowym.

2. Założenia i podstawowe zależności

W pracy rozpatrujemy zachowanie się cylindrycznej powłoki o stałym promieniu A i długości $2L$ poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia.

Stan naprężenia w ściance powłoki określony jest przez wypadkowe naprężenia: $N_x, N_\varphi, M_x, M_\varphi$. Kinematykę powłoki określają składowe wektora przemieszczenia: W – w kierunku radialnym i U – w kierunku tworzącej. Środek walcowego układu współrzędnych przyjmujemy w środku powłoki, rys. 1.



Rys. 1

Rozważamy powłoki o przekroju sandwiczowym wykonane z materiału sztywno-idealnie plastycznego. Jako kryterium plastyczności przyjmujemy warunek Treski. Zależność między polem naprężeń i szybkości odkształceń określa prawo płynięcia «stowarzyszone» z przyjętym warunkiem plastyczności. W rozważaniach stosujemy związki kinematyczne wyprowadzone w oparciu o hipotezę Love'a-Kirchhoffa o prostych normalnych.

Jeżeli wielkości związane z zewnętrzną i wewnętrzną warstwą powłoki oznaczymy odpowiednio znakami minus i plus, to uogólnione naprężenia wyrażą się w sposób następujący:

$$\begin{aligned} N_x &= (\sigma_x^+ + \sigma_x^-) d, & M_x &= (\sigma_x^+ - \sigma_x^-) dH_s, \\ N_\varphi &= (\sigma_\varphi^+ + \sigma_\varphi^-) d, & M_\varphi &= (\sigma_\varphi^+ - \sigma_\varphi^-) dH_s, \end{aligned}$$

gdzie d oznacza grubość warstwy nośnej, $2H_s$ odległość między warstwami nośnymi. W trakcie analizy okaże się wygodnym korzystanie z następująco zdefiniowanych wielkości bezwymiarowych:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} n_x &= \frac{N_x}{2\sigma_0 d}, & n_\varphi &= \frac{N_\varphi}{2\sigma_0 d}, & m_x &= \frac{M_x}{2\sigma_0 H_s d}, & p &= \frac{AP}{2\sigma_0 d}, \\ x &= \frac{X}{L}, & w &= \frac{W}{A}, & u &= \frac{U}{L}, & R &= \frac{A}{2H_s}, & a &= \frac{L^2}{2AH_s}, & \alpha_x &= H_s K_x. \end{aligned}$$

W rozważanym przypadku zakładamy, że

$$U \ll W \approx H \ll A.$$

Przy powyższych założeniach związki kinematyczne dla kołowo-symetrycznych powłok można znaleźć m.in. w pracach [14, 15 i 16]. W szczególnym przypadku dla walca kołowego z zachowaniem kołowej symetrii w trakcie deformacji mają one postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \lambda_x &= u' + \frac{1}{2} \frac{R}{a} (w')^2, & \alpha_x &= \frac{w''}{2a}, \\ \lambda_\varphi &= w, & \alpha_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie przecinkiem oznaczyliśmy różniczkowanie względem x . Różniczkując te wyrażenia względem czasu t otrzymujemy związki dla prędkości odkształceń:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \dot{u}' + \frac{R}{a} w' \dot{w}, & \dot{\alpha}_x &= \frac{\dot{w}''}{2a}, \\ \dot{\lambda}_\varphi &= \dot{w}, & \dot{\alpha}_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Równania równowagi elementu odkształconego cienkiej powłoki walcowej w układzie nieodkształconym podane m.in. w pracy [15] wyrażają się następującymi związkami:

$$N_x' = 0, \quad A Q_x' - A N_x W'' + N_\varphi - P A = 0, \quad M_x' - Q_x = 0.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych (2.1) i wyrugowaniu siły poprzecznej równania równowagi przyjmują postać:

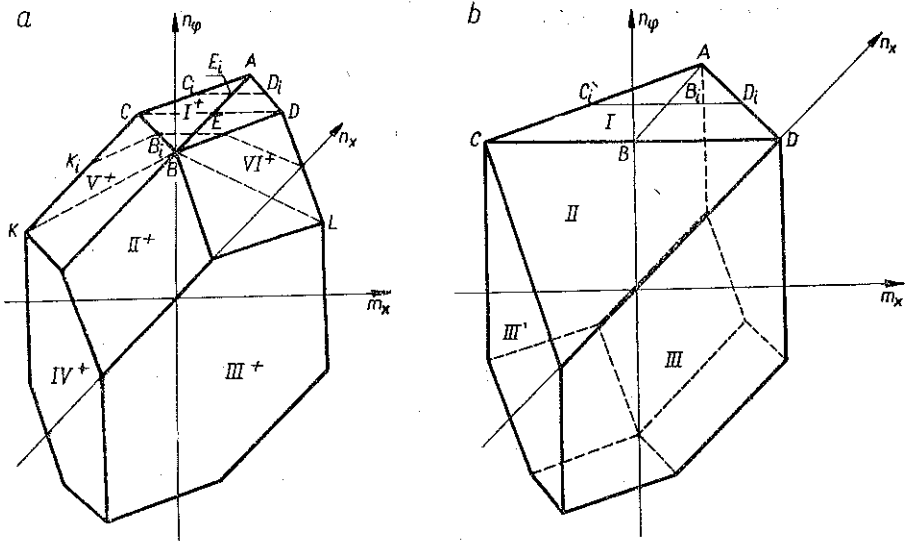
$$(2.4) \quad m_x'' - 2R n_x w'' + 2a n_\varphi - 2ap = 0, \quad n_x' = 0.$$

3. Powierzchnia graniczna

Ponieważ w teorii cienkich powłok cylindrycznych obciążonych kołowo-symetrycznie przyjmujemy $\kappa_\varphi = 0$, moment obwodowy może być traktowany jako reakcja [18] i warunek plastyczności przyjmie postać

$$F(n_x, n_\varphi, m_x) = 0.$$

Powierzchnia graniczna dla powłoki walcowej o przekroju sandwiczowym (rys. 2a) po raz pierwszy została zbudowana przez P. G. HODGE'A [17]. Poszczególne obszary



Rys. 2

powierzchni granicznej ponumerowane jak na rys. 2, określone są za pomocą następujących równań:

$$(3.1) \quad \begin{array}{ll} \text{I}^\pm & n_\varphi = \pm 1, \\ \text{II}^\pm & n_\varphi - n_x = \pm 1, \\ \text{III}^\pm & -n_x + m_x = \pm 1, \\ \text{IV}^\pm & -n_x - m_x = \pm 1, \\ \text{V}^\pm & 2n_\varphi - n_x - m_x = \pm 2, \\ \text{VI}^\pm & 2n_\varphi - n_x + m_x = \pm 2. \end{array}$$

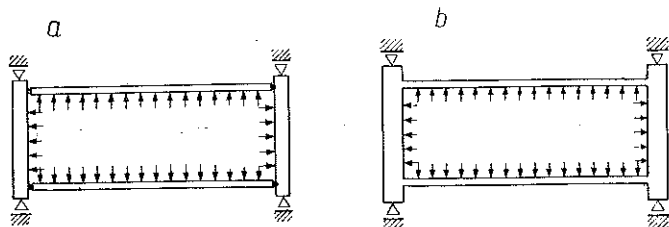
4. Powłoka walcowa zamknięta

W przypadku powłoki walcowej zamkniętej, poddanej wewnętrznemu ciśnieniu, oprócz obciążenia P o kierunku radialnym wystąpi również siła osiowa o wartości $\pi A^2 P$. Siła ta jest przenoszona przez powłokę równomiernie, a więc bezwymiarowa jej wartość na brzegu powłoki wynosi

$$(4.1) \quad n_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{\pi A^2 P}{2\pi A \cdot 2\sigma_0 d} = \frac{P}{2}.$$

Rozpatrzmy dwa następujące przypadki:

- 1) powłoka o brzegach przymocowanych przegubowo do sztywnej płyty posiadającej możliwość przesuwu (rys. 3a);
 2) powłoka o brzegach utwierdzonych w sztywnej płycie posiadającej możliwość przesuwu (rys. 3b).



Rys. 3

Dla stanu błonowego ($m_x = m_\varphi = 0$, $n_x = n_\varphi = 1$) z równań równowagi (2.4) otrzymujemy

$$(4.2) \quad p_b = 1 + \frac{2Rw_0}{a}.$$

Z rozwiązań nośności granicznej (bez uwzględnienia zmian geometrii) wynika, że w chwili uplastycznienia $p \geq p_m$. W związku z tym oraz na podstawie (4.1) i (4.2) otrzymujemy, że w trakcie plastycznego płynięcia $n_x \geq 1/2$. Wobec powyższego z analizy równań równowagi, pola szybkości odkształceń oraz warunków brzegowych wynika, że w trakcie deformacji plastycznych w powłoce powstają następujące dwie strefy:

1) Strefa brzegowa dla $1 \geq x \geq \xi$. Występujący tu stan naprężenia reprezentowany jest na rys. 2a przez odcinek $C_i D_i$ dla przypadku powłoki zamocowanej, a przez odcinek $C_i E_i$ dla przypadku powłoki przegubowo-podpartej. Odpowiada to następującemu warunkowi plastyczności:

$$(4.3) \quad n_\varphi = 1.$$

2) Strefa środkowa dla $\xi \geq x \geq 0$. W strefie tej stan naprężenia reprezentowany jest przez punkt C_i (rys. 2a) leżący na krawędzi przecięcia się I^+ i III^- płatów powierzchni granicznej. W związku z tym warunek plastyczności wyraża się następującym układem równań:

$$(4.4) \quad n_\varphi = 1, \quad -n_x + m_x = -1.$$

W rozważanych przypadkach kinematyczne i statyczne warunki brzegowe mają postać:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \text{dla } x = 0 & \quad w = w_0, \quad w' = 0, \quad u = 0; \\ \text{dla } x = \pm 1 & \quad w = 0, \quad u = 0 \end{aligned}$$

oraz $m_x = 0$ dla przykładu powłoki podpartej, a $m_x = 1 - n_x$ dla przykładu powłoki zamocowanej.

W tym przypadku funkcje

$$(4.6) \quad w, w', u, m_x, m'_x$$

w punkcie $x = \xi$ są ciągłe.

Na podstawie związków (2.3), (2.4), (4.1), (4.3), (4.4) oraz warunków brzegowych (4.5) i ciągłości (4.6) otrzymujemy (dokładna metoda postępowania przedstawiona jest w pracy [9]):

$$(4.7) \quad w_0 = \frac{p(1+2\alpha) - 2(1+\alpha)}{2Rp},$$

$$w_1 = \frac{2\alpha(p-1)(1-x)\xi}{Rp} \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$w_2 = w_0 - \frac{\alpha(p-1)x^2}{Rp} \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0,$$

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{2-p}{2\alpha(p-1)}},$$

$$m_x = \alpha(p-1)(2\xi - 2\xi x + x^2 - 1) \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$m_x = n_x - 1 \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0,$$

$$n_x = \frac{p}{2}, \quad n_\varphi = 1;$$

dla powłoki podpartej przegubowo oraz

$$(4.8) \quad w_0 = \frac{p(\alpha+1) - (\alpha+2)}{Rp},$$

$$w_1 = \frac{2\alpha(p-1)(1-x)\xi}{Rp} \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$w_2 = \frac{-\alpha(p-1)x^2}{Rp} + w_0 \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0,$$

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{2-p}{\alpha(p-1)}},$$

$$m_x = \alpha(p-1)(2\xi - 2\xi x + x^2 - 1) + 1 - \frac{p}{2} \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$m_x = n_x - 1 \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0,$$

$$n_x = \frac{p}{2}, \quad n_\varphi = 1.$$

dla powłoki zamocowanej.

Podstawiając $w_0 = 0$ do (4.7) i (4.8) otrzymujemy znaną wartość ciśnienia uplastyczniającego [18]:

$$(4.9) \quad p_u = 1 + \frac{1}{2\alpha+1},$$

dla powłoki podpartej przegubowo oraz

$$(4.10) \quad p_u = 1 + \frac{1}{\alpha + 1}.$$

dla powłoki zamocowanej.

Stan błonowy definiujemy jako stan, któremu odpowiada następujące pole uogólnionych naprężeń:

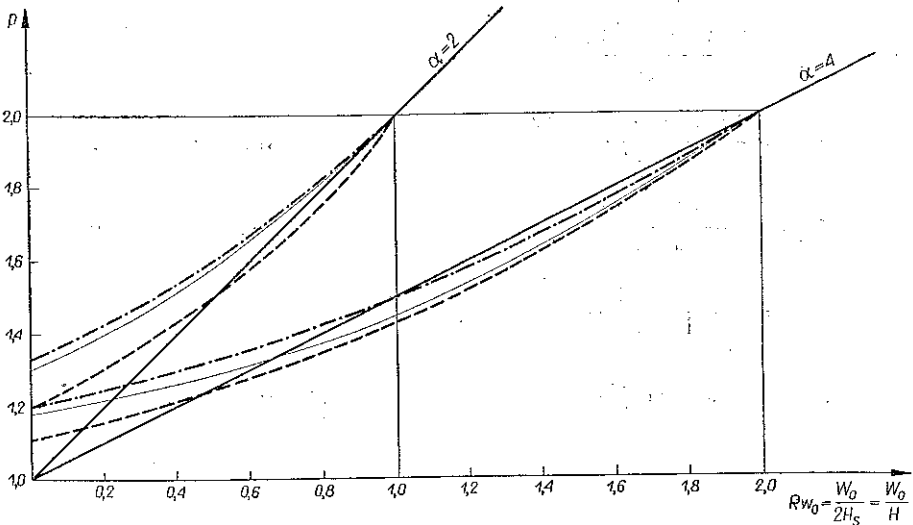
$$(4.11) \quad n_x = n_\varphi = 1, \quad m_x = m_\varphi = 0.$$

Podstawiając (4.11) do (4.1) i (4.7) (lub do (4.1) i (4.8)) otrzymujemy następujące wartości ciśnienia i ugięcia, przy których powłoka przechodzi w stan błonowy:

$$(4.12) \quad p_b = 2, \quad w_{0b} = \frac{\alpha}{2R}.$$

Osiągnięcie stanu błonowego następuje przy tym samym obciążeniu i ugięciu zarówno dla powłoki zamocowanej jak i podpartej przegubowo.

Ponieważ w rozważaniach uwzględnia się ugięcia rzędu grubości powłoki ($W_0 \approx 2H$), powyższe związki są dostatecznie dokładne tylko dla powłok stosunkowo krótkich (tzn. takich, dla których $\alpha \leq 4$). W przypadku powłok długich przejściu w stan błonowy towarzyszy ugięcie plastyczne znacznie większe od grubości powłoki i wówczas zarówno związki geometryczne, jak i równania równowagi przyjęte w powyższej teorii nie są wystarczająco dokładne.



Rys. 4

Rysunek 4 jest ilustracją związków (4.7) i (4.8) wyrażających zależność między obciążeniem i ugięciem dla $\alpha = 2$ i $\alpha = 4$. Linią ciągłą oznaczono rozwiązanie błonowe, linią przerywaną — rozwiązanie dla powłok zamocowanych na końcach, linią kropka-kreska — rozwiązanie dla powłok swobodnie podpartych, ciągłą

linią cienką — rozwiązanie dla powłoki pełnościennej zamocowanej, otrzymane w pracy [9].

Traktując warunek plastyczności, odpowiadający powłoce o przekroju sandwiczowym jako aproksymację warunku plastyczności, odpowiadającego powłoce o przekroju pełnościennym, możemy ocenić wpływ aproksymacji na zależność $p - w_0$. Z rysunku 4 widać, że rozwiązania dla dwóch równoważnych powłok o przekroju pełnościennym i sandwiczowym nie różnią się znacznie, a przejście w stan błonowy następuje jednocześnie. Przy tym dwie następujące powłoki:

1) o przekroju pełnościennym grubości $2H$ i o granicznym naprężeniu na rozciąganie $\bar{\sigma}_0$,

2) o przekroju sandwiczowym grubości warstwy nośnej d , odległości między warstwami nośnymi $2H_s$ i o granicznym naprężeniu na rozciąganie warstwy nośnej σ_0 uznajemy za równoważne, gdy

$$\sigma_0 d = \bar{\sigma}_0 H \quad \text{i} \quad H_s = \frac{1}{2} H.$$

Wynika to stąd, że posiadają one tę samą wytrzymałość na czyste rozciąganie i czyste zginanie.

Pole przemieszczeń i sił wewnętrznych dla powyższego przypadku powłoki sandwiczowej jest analogiczne do określonego w pracy [9] dla powłoki pełnościennej.

5. Powłoki cylindryczne otwarte

W przypadku powłoki walcowej otwartej (obciążonej jedynie ciśnieniem wewnętrznym) analiza plastycznego płynięcia jest znacznie bardziej skomplikowana. Istnieje tu możliwość wystąpienia dwóch stadiów deformacji plastycznych, opisywanych przez różne warunki graniczne (rys. 2a):

1) stadium, gdy $n_x \leq 1/2$; profil uogólnionych naprężeń leży wówczas na następujących częściach powierzchni granicznej: I⁺, V⁺, VI⁺;

2) stadium, gdy $n_x \geq 1/2$; profil naprężenia leży na ścianie I⁺.

Przy tym możemy jeszcze rozróżnić kilka etapów w ramach poszczególnych stadiów różniących się występowaniem stref reprezentowanych punktami leżącymi na krawędziach. Trudności występujące tu polegają głównie na braku warunków początkowych dla pola odkształceń w strefach, które powstają lub rozprzestrzeniają się w trakcie deformacji plastycznych. Dlatego posługując się teorią plastycznego płynięcia otrzymujemy rodzinę rozwiązań zależną od kilku parametrów. Ju. LEPIK [10 i 11] obchodzi tę trudność stosując teorię deformacyjną zamiast teorii plastycznego płynięcia. Jednak uzasadnienie, że teorie te nie różnią się znacznie dla występującego stanu naprężenia, wydaje się nie być dostatecznie ściśle. Dlatego stosując pełną analogię do postępowania w przypadku powłoki pełnościennej [9], proponuje się aproksymować powierzchnię graniczną dla $n_\varphi \geq 0$, płaszczyznami I⁺ i II⁺ (rys. 2b). Mamy wtedy od początku związku jak w stadium 2).

Wykorzystując związki (2.3), (2.4) i (3.1) oraz prawo płynięcia otrzymujemy rozwiązanie w następującej postaci:

$$(5.1) \quad w_0 = \frac{\alpha(p-1) + n_x - 1}{2Rn_x},$$

$$w_1 = \frac{\alpha(p-1)(1-x)}{Rn_x} \left[1 - \sqrt{\frac{1-n_x}{\alpha(p-1)}} \right] \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$w_2 = w_0 - \frac{\alpha(p-1)x^2}{2Rn_x} \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0.$$

$$n_x = 1 - \alpha(p-1)(1-\xi)^2, \quad n_\varphi = 1,$$

$$m_x = \alpha(p-1)(1-x) \left[1 - x - 2 \sqrt{\frac{1-n_x}{\alpha(p-1)}} \right] \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$m_x = n_x - 1 \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0,$$

dla powłoki o brzegach podpartych przegubowo:

$$(5.2) \quad w_0 = \frac{\alpha(p-1) + 2(n_x - 1)}{2Rn_x},$$

$$w_1 = \frac{\alpha(p-1)(1-x)}{Rn_x} \left[1 - \sqrt{\frac{2(1-n_x)}{\alpha(1-p)}} \right] \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$w_2 = w_0 - \frac{\alpha(p-1)x^2}{2Rn_x} \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0,$$

$$n_x = 1 - \frac{1}{2} \alpha(p-1)(1-\xi)^2, \quad n_\varphi = 1,$$

$$m_x = \alpha(p-1)(1-x) \left[1 - x - 2 \sqrt{\frac{2(1-n_x)}{\alpha(1-p)}} \right] + 1 - n_x \quad \text{dla } 1 \geq x \geq \xi,$$

$$m_x = n_x - 1 \quad \text{dla } \xi \geq x \geq 0.$$

dla powłoki o brzegach zamocowanych:

Poszukiwaną zależność między obciążeniem i ugięciem otrzymujemy w postaci rodziny krzywych zależnych od jednego parametru (n_x lub ξ). Jeżeli obierzemy za parametr n_x , to otrzymamy rodzinę prostych określonych związkami (5.1) i (5.2) (rys. 5) zawartych między prostymi

$$(5.3) \quad p = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad p = 1 + \frac{2Rw_0}{\alpha},$$

dla powłoki podpartej przegubowo $\bar{\bar{}}$ oraz

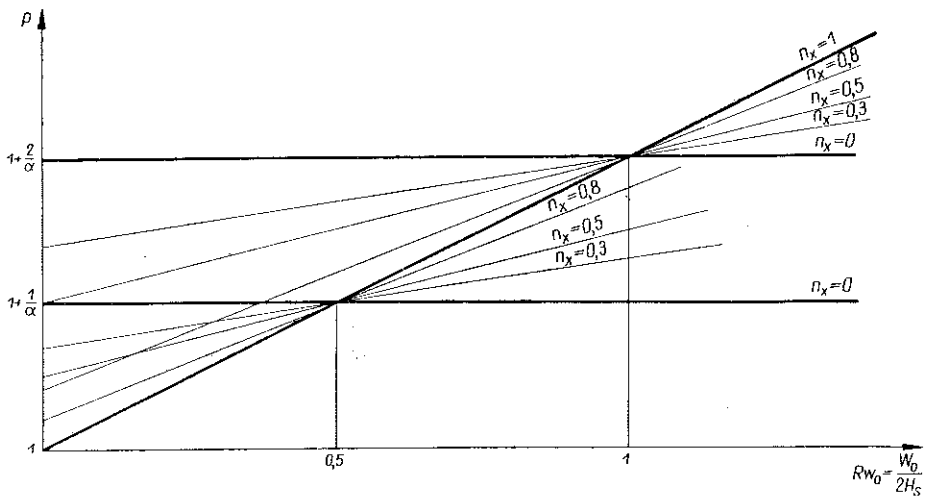
$$(5.4) \quad p = 1 + \frac{2}{\alpha}, \quad p = 1 + \frac{2Rw_0}{\alpha}.$$

dla powłoki zamocowanej

Punkt $(1/2R, 1+1/\alpha)$ dla powłoki podpartej oraz $(1/2R, 1+2/\alpha)$ dla powłoki zamocowanej jest punktem przecięcia wszystkich prostych rodziny.

Jeżeli będziemy wymagać monotonicznego wzrostu siły n_x ze wzrostem obciążenia i ugięcia oraz jednoznacznego przyporządkowania danemu obciążeniu i ugięciu statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, to powłoka przejdzie w stan błonowy przy ugięciach niewiększych niż $w_0 = 1/2R$ ($W_0 = H_s$) w przypadku powłoki podpartej oraz $w_0 = 1/R$ ($W_0 = 2H_s$) w przypadku powłoki zamocowanej (czyli przy ugięciach niewiększych niż połowa grubości dla powłoki podpartej i jedna grubość dla powłoki zamocowanej). W pracy [11] JU. LEPIK rozważał analogiczny przypadek powłoki walcowej otwartej, swobodnie podpartej. Uzyskał rozwiązanie, wg którego powłoka przechodzi w stan błonowy przy ugięciu równym 1,5 grubości. W stosunku do założeń i metody postępowania stosowanych w niniejszej pracy, zachodzą dwie różnice:

- 1) przyjęcie ścisłego warunku plastyczności Treski (rezygnacja z aproksymacji);
- 2) stosowanie teorii deformacyjnej w celu uniknięcia całkowania względem czasu przy braku warunków początkowych w strefach rozprzestrzeniających się w trakcie deformacji plastycznych. Dzięki temu uzyskano rozwiązanie jednoznaczne.



Rys. 5

Z otrzymanego w pracy [11] rozwiązania wynika, że przyjęcie aproksymacji powierzchni granicznej dla $n_x < 0,5$ niewiele wpłynęłoby na wynik, gdyż w chwili uplastycznienia siła osiowa n_x jest bliska 0,5 ($n_x = 0,499$ dla $\alpha = 25$, $n_x = 0,4953$ dla $\alpha = 4$) i strefa dla $n_x < 0,5$ jest bardzo mała. Za wynikające różnice w rozwiązaniach odpowiedzialna jest zatem teoria deformacyjna.

W stosunku do rozwiązania odnoszącego się do powłoki pełnościennej [9] różnice występują jedynie w zależności $p - w_0$. Dla powłok pełnościennej obwiednią prostych $n_x = \text{const}$ jest parabola przechodząca stycznie w prostą stanu błonowego przy $w_0 = 1$ lub $w_0 = 2$ (zależnie od sposobu zamocowania brzegów), podczas gdy w rozpatrywanym przypadku powłoki warstwowej obwiednią jest

prosta $p=1+1/a$ lub $p=1+2/a$ przecinająca prostą stanu błonowego przy $w_0=0,5$ lub $w_0=1$.

6. Powłoka cylindryczna z daną stałą siłą osiową

Przypadek powłoki walcowej z daną stałą siłą osiową sprowadza się do przypadku powłoki rozpatrywanej w p. 5 przy zmienionym kinematycznym warunku brzegowym $[u]_{x=\pm 1} = 0$ na statyczny $[n_x]_{x=\pm 1} = \text{const}$. Wówczas zamiast rodziny krzywych otrzymujemy dla poszczególnych wartości n_x rozwiązania jednoznaczne. Nieokreślonym natomiast staje się przemieszczenie u w kierunku tworzącej.

Traktując n_x w wyrażeniach (5.1) i (5.2) jako daną ustaloną wielkość, otrzymujemy liniowe związki między ciśnieniem p i ugięciem w_0 . Rodziny prostych przedstawione na rys. 5 stanowią zbiór rozwiązań dla n_x od 0 do 1,0.

Powyższy przypadek powłok walcowych z daną stałą wartością siły osiowej n_x i zmiennym ciśnieniem był rozważany w pracach [10 i 12]. Jednak autorzy (podobnie jak w przypadku powłok rozpatrywanych w [11]) posługiwali się ścisłym warunkiem plastyczności Treski dla powłoki sandwichowej (rys. 2a) i teorią deformacyjną. Dla $n_x > 1/2$, czyli dla obszaru, w którym powierzchnia graniczna ścisła (rys. 2a) pokrywa się z powierzchnią graniczną aproksymowaną (rys. 2b), rozwiązania są analogiczne.

Literatura cytowana w tekście

1. Ю. Р. Лешик, *Пластическое течение гибких круглых пластинок из жестко-пластического материала*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1960.
2. Ю. Р. Лешик, *К осесимметрическому изгибу гибких круглых жестко-пластических пластин*, Изд. жур. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 4, 1966.
3. E. T. ONAT, L. S. SHU, *Finite deformations of a rigid perfectly plastic arch*, J. Appl. Mech., 29 (1962), 549-554.
4. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Analiza plastyczna płyt żelbetowych przy dużych ugięciach*, Arch. Inżyn. Łódow., 4, 2 (1963).
5. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deformation behavior of plastic solids*, Plasticity, Pergamon Press, New York 1961, 225-238.
6. E. T. ONAT, R. M. HAYTHORNTHWAITE, *The load carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech., 23 (1956), 49-55.
7. M. JANAS, *Analiza plastyczna rusztu gęstożebrowego przy dużych ugięciach*, Arch. Inżyn. Łódow., 1, 11 (1965).
8. M. DUSZEK, *Effect of geometry changes on the carrying capacity of cylindrical shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 4, 13 (1965).
9. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966).
10. Ю. Р. ЛЕПИК, *Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure*, Nuclear Engineering and Design, 4, 1966, 29-38.
11. Ю. Р. Лешик, *Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления*, Труды VI «Всесоюзной Конференции по Теории Оболочек и Пластинок».

12. Л. М. Култ, *Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии внутреннего давления и осевого растяжения*, Материалы летней школы по проблеме: Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек, II, 1966.

13. О. Н. Шаблій, *Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки*. Материалы летней школы по проблеме: физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек, II, 1966.

14. U. FLÜGE, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg 1960.

15. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гос. Изд. Тех.-Теор. Лит. Москва 1956.

16. H. L. DONNELL, *General thin shell displacement-strain relations*, Proc. of the 4-th U.S. Nation. Cong. of Appl. Mech., 1962.

17. P. G. HODGE, *The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 336-342.

18. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, Mc. Graw-Hill Book, Co, Inc., New York 1959.

19. P. G. HODGE, *Limit Analysis of Rationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York 1965.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК УЧИТЫВАЮЩИЙ ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ФОРМЫ

Проводится анализ влияния изменения формы на несущую способность тонких цилиндрических оболочек сандвичевого сечения. Учитываются изменения формы, появляющиеся при прогибах порядка толщины оболочки. Рассматривается поведение оболочек под влиянием внутреннего давления, при разных статических и кинематических краевых условиях. Материал оболочки — жестко-пластический без упрочнения, подвергающийся условию Треска и ассоциированному с ним закону течения.

Summary

PLASTIC ANALYSIS OF CYLINDRICAL SANDWICH SHELLS AT LARGE DEFLECTION

The object of the analysis is the influence on the limit load of a variation of the form of a thin cylindrical sandwich shell. The deflection is assumed to be of the order of the shell thickness. The behaviour of the shells under internal pressure is considered for various mechanical and kinematic boundary conditions. The material of the rigid-plastic shell is assumed to have not the strain-hardening property and to obey the Tresca yield condition and the relevant law of flow.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 marca 1967 r.