

NAPRĘŻENIA DYNAMICZNE W NIESKOŃCZENIE DŁUGIM WALCU,
WYWOŁANE DZIAŁANIEM ZMIENNEJ TEMPERATURY

STANISŁAW WOELKE (POZNAŃ)

1. Wstęp

W pracy zajmujemy się wyznaczeniem naprężeń cieplnych w nieskończone długim walcu kołowym, wywołanych działaniem zmieniającej się harmonicznie temperatury na pobocznicy. Rozwiązujemy zagadnienie dynamiczne uwzględniając siły bezwładności. Przyjmujemy, że materiał walca jest doskonale sprężysty i że jego parametry fizyczne nie zależą od temperatury. Dla rozważanego przypadku zarówno pole temperatury, jak i pole naprężeń są funkcjami miejsca i czasu.

Postawimy sobie pytanie, dla jakiej częstotliwości zmian temperatury na pobocznicy walca wystąpi rezonans. W pracach [1, 2 i 6] nie znajdujemy rozwiązania takiego zagadnienia.

W pierwszej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem pola temperatury w walcu.

2. Pole temperatury

Z uwagi na to, że rozwiązujemy płaskie zagadnienie obrotowo-symetryczne, wygodnie będzie posłużyć się biegunowym układem współrzędnych. Punktem wyjścia naszych rozważań jest równanie przewodnictwa cieplnego [[7], str. 147, wzór (14.1)]

$$(2.1) \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t},$$

przy czym

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

gdzie $T = T(r, t)$ oznacza temperaturę stanu beznaprężeniowego, t czas oraz κ współczynnik przewodzenia temperatury.

Rozwiązanie równania (2.1) musi spełniać warunek początkowy:

$$(2.2) \quad T(r, 0) = 0$$

oraz dwa warunki brzegowe

$$(2.3) \quad T(a, t) = T_0 \cos \omega t, \quad T(0, t) < \infty,$$

przy czym a jest promieniem walca, T_0 oznacza amplitudę temperatury na powierzchni, a ω jest jej częstotliwością zmian.

Celem rozwiązania równania (2.1) posługujemy się transformacją Laplace'a.

Po przetransformowaniu równanie przyjmuje postać

$$(2.4) \quad \frac{d^2 \tilde{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{T}}{dr} - \frac{s}{\kappa} \tilde{T} = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma następującą budowę:

$$(2.5) \quad \tilde{T} = AI_0(lr) + BK_0(lr), \quad l^2 = \frac{s}{\kappa},$$

gdzie $I_0(x)$ oraz $K_0(x)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju rzędu zerowego.

Biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_0(x) \rightarrow \infty,$$

musimy ze względu na konieczność spełnienia drugiego z warunków brzegowych (2.3) przyjąć stałą $B = 0$. Wykorzystując przetransformowany pierwszy warunek brzegowy

$$\tilde{T}(r = a, s) = T_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

wyznaczamy stałą A :

$$A = T_0 \frac{s}{I_0(la)(s^2 + \omega^2)}$$

i otrzymujemy poszukiwaną transformatę temperatury

$$(2.6) \quad \tilde{T} = T_0 \frac{sI_0(lr)}{I_0(la)(s^2 + \omega^2)}.$$

Pole temperatury wyznaczmy wykonując odwrotną transformację Laplace'a, określoną wzorem ([8], str. 103, wzór (3-72))

$$(2.7) \quad T(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\omega}^{\alpha + i\omega} \tilde{T}(r, s) e^{st} ds.$$

Obliczenie tej całki sprowadza się do wyznaczania residuów w biegunach funkcji podcałkowej. Funkcja ta ma dwa bieguny urojone

$$s_1 = i\omega, \quad s_2 = -i\omega$$

oraz nieskończoną ilość biegunów rzeczywistych ujemnych w punktach $s_n = -\kappa a_n^2$. Wartości a_n są określone równaniem przestępnym

$$(2.8) \quad J_0(\alpha_n a) = 0,$$

gdzie $J_0(\alpha_n a)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego.

Wszystkie bieguny funkcji podcałkowej są jednokrotne, a residua w tych punktach obliczymy za pomocą wzoru ([8], str. 185, wzór (4-60))

$$(2.9) \quad \sum_k \operatorname{res}_{s=s_k} [T(r, s) e^{st}] = \sum_k^n \frac{L(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t},$$

przy czym $L(s)$ i $N(s)$ są odpowiednio licznikiem i mianownikiem wzoru (2.6). Po wykonaniu odpowiednich działań, których technika jest dobrze znana [4] otrzymujemy wzór określający temperaturę w dowolnym punkcie walca w postaci:

$$(2.10) \quad T(r, t) = T_0 \eta(t) \left\{ \frac{\operatorname{ber} \lambda r \operatorname{ber} \lambda a + \operatorname{bei} \lambda r \operatorname{bei} \lambda a}{\operatorname{ber}^2 \lambda a + \operatorname{bei}^2 \lambda a} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ber} \lambda r \operatorname{bei} \lambda a - \operatorname{bei} \lambda r \operatorname{ber} \lambda a}{\operatorname{ber}^2 \lambda a + \operatorname{bei}^2 \lambda a} \sin \omega t - \right. \\ \left. - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^3 J_0(\alpha_n r) e^{-\alpha_n^2 t}}{(\alpha_n^4 + \lambda^4) J_1(\alpha_n a)} \right\}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

We wzorze tym $\eta(t)$ oznacza funkcję Heaviside'a, a $\operatorname{ber}(x)$ oraz $\operatorname{bei}(x)$ są funkcjami Kelvina-Thompsona ([5], str. 193, wzory (2) i (3)).

W dalszym ciągu zajmiemy się wyznaczeniem pola przemieszczeń i naprężeń.

3. Pole przemieszczeń i naprężeń

W przypadku płaskiego, osiowo-symetrycznego zagadnienia termosprężystości równania ruchu redukują się do jednego równania ([9], str. 148, wzór (5.48))

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad k = \alpha_t \frac{1+\nu}{1-\nu},$$

gdzie $u = u(r, t)$ oznacza przemieszczenie promieniowe,

$$c = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$$

jest prędkością fali podłużnej, G modułem odkształcenia postaciowego, ν współczynnikiem Poissona, ρ gęstością materiału walca oraz α_t współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej.

Równanie (3.1) rozwiązujemy dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia, tzn

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{oraz} \quad u_z = 0.$$

Przemieszczenie określone równaniem (3.1) musi spełniać dwa warunki początkowe:

$$(3.2) \quad u(r, t=0) = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = 0$$

oraz warunek brzegowy

$$(3.3) \quad \sigma_r(a, t) = 0,$$

przy czym σ_r jest naprężeniem radialnym i wyraża się wzorem ([7], str. 19, wzór (2.11))

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} - (1-\nu) kT \right].$$

Ponadto, z uwagi na osiową symetrię, musi być

$$(3.3') \quad u(0, t) = 0.$$

Posługując się transformacją Laplace'a, na co pozwalają warunki początkowe (3.2), równanie (3.1) przyjmie postać

$$(3.4) \quad \frac{d^2 \tilde{u}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}}{dr} - \frac{\tilde{u}}{r^2} - \frac{s^2}{c^2} \tilde{u} = k \frac{d\tilde{T}}{dr},$$

gdzie $\tilde{u} = \tilde{u}(r, s)$ oznacza transformatę Laplace'a przemieszczenia.

Rozwiązania równania (3.4) będziemy poszukiwać w postaci sumy $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$, przy czym \tilde{u}_1 jest rozwiązaniem równania jednorodnego:

$$(3.5) \quad \frac{d^2 \tilde{u}_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}_1}{dr} - \left(\frac{s^2}{c^2} + \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_1 = 0,$$

a \tilde{u}_2 jest całką szczególną równania:

$$(3.6) \quad \frac{d^2 \tilde{u}_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}_2}{dr} - \left(\frac{s^2}{c^2} + \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_2 = kT_0 \frac{sI_1(lr)}{(s^2 + \omega^2)I_0(la)}.$$

Rozwiązanie równania (3.5) ma postać

$$\tilde{u}_1 = AI_1(qr) + BK_1(qr), \quad q = s/c.$$

Ponieważ prawa strona równania (3.6) jest wyrażona przez zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu pierwszego, zatem całkę szczególną równania (3.6) przyjmiemy w postaci

$$\tilde{u}_2 = CI_1(lr).$$

Podstawiamy to wyrażenie do równania (3.6) i po prostych przekształceniach znajdujemy, że

$$C = - \frac{kT_0 c^2 \kappa l}{(s^2 + \omega^2)(s\kappa - c^2)I_0(la)}.$$

Transformatę przemieszczenia \tilde{u} możemy teraz zapisać następująco:

$$(3.7) \quad \tilde{u} = AI_1(qr) - \frac{kT_0 c^2 \kappa l I_1(lr)}{(s^2 + \omega^2)(s\kappa - c^2)I_0(la)}.$$

Stała B z uwagi na warunek (3.3) jest równa zero, natomiast stałą A wyznaczymy korzystając z przetransformowanego warunku brzegowego (3.3):

$$\tilde{\sigma}_r(r=a, s) = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \nu \frac{\tilde{u}}{r} - (1-\nu) k\tilde{T} \right]_{r=a} = 0.$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji i wyznaczeniu stałej A otrzymujemy ostatecznie transformatę przemieszczenia w postaci

$$(3.8) \quad \tilde{u} = kT_0 c^2 \frac{[\rho a s^2 I_0(la) - 2GI_1(la)] I_1(qr) - [\rho a c s I_0(qa) - 2GI_1(qa)] I_1(lr)}{(s^2 + \omega^2) \left(s - \frac{c^2}{\kappa} \right) I_0(la) [\rho a c s I_0(qa) - 2G I_1(qa)]}$$

Odwrócenie transformacji Laplace'a polega tutaj na obliczeniu residuów w biegunach transformaty (3.8). Bieguny znajdują się w punktach:

$$s_1 = i\omega, \quad s_2 = -i\omega, \quad s_3 = \frac{c^2}{\kappa}.$$

Prócz tego występuje nieskończona ilość biegunów ujemnych rzeczywistych

$$s_n = -\kappa a_n^2$$

oraz nieskończona ilość biegunów urojonych w punktach:

$$s_m = \pm i\beta_m.$$

Wartości a_n wyznacza się z równania (2.8), natomiast β_m pozwala określić następujące równanie przestępne:

$$(3.9) \quad \rho a c \beta_m J_0\left(\beta_m \frac{a}{c}\right) - 2G J_1\left(\beta_m \frac{a}{c}\right) = 0.$$

W pracy [3] podano dowód, że wszystkie pierwiastki tego równania są urojone.

Jeżeli założymy, że $\omega \neq \beta_m$, wówczas wszystkie bieguny transformaty (3.8) są jednokrotne. Posługując się znaną techniką obliczania residuów [4] otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie w postaci

$$(3.10) \quad u(r, t) = kT_0 c^2 \eta(t) \left\{ D_1 M_1(\lambda r) \sin\left(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + D_2 J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \left[\rho a \omega \sin(\omega t + \theta_1) + F_1 \sin\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa a_n^2 t} \left[B_n I_1\left(\kappa a_n^2 \frac{r}{c}\right) + \frac{J_1(a_n r)}{J_1(a_n a)} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_1\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) \left[F_m \sin(\theta_m + \beta_m t) + H_m \sin\left(\theta_m + \delta_1 + \beta_m t - \delta - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\},$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2}, & \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{\kappa \omega}{c^2}, & D_1 &= \frac{\kappa \lambda}{C_1 \omega M(\lambda)}, \\
 F_1 &= \frac{2G\lambda M_1(\lambda)}{\omega M(\lambda)}, & D_2 &= \frac{\kappa}{C_1 \left[\rho a c \omega J_0 \left(\omega \frac{a}{c} \right) - 2GJ_1 \left(\omega \frac{a}{c} \right) \right]}, \\
 A_n &= \frac{2\alpha_n^2}{a(\alpha_n^4 + \lambda^4)(\alpha_n^2 \kappa^2 + c^2)}, & C_m &= \sqrt{c^4 + \kappa^2 \beta_m^2}, \\
 B_n &= \frac{2G}{\rho a c \kappa \alpha_n^2 I_0 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right) - 2GI_1 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right)}, & \operatorname{tg} \theta_m &= \frac{\kappa \beta_m}{c^2}, \\
 A_m &= \frac{2\kappa \beta_m}{(\beta_m^2 - \omega^2) C_m J_1 \left(\beta_m \frac{a}{c} \right) \left(\frac{\rho a^2 \beta_m^2}{2G} - \frac{1}{1 - \nu} \right)}, & F_m &= \frac{\rho a \beta_m^2}{2G}, \\
 H_m &= \gamma_m \frac{M_1(\gamma_m a)}{M(\gamma_m a)}, & \gamma_m &= \sqrt{\frac{\beta_m}{\kappa}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Równocześnie we wzorze (3.10) wykorzystaliśmy przedstawienie funkcji Kelvina-Thompsona w postaci biegunowej, tzn. ([5], str. 197, wzory (2) i (5))

$$\begin{aligned}
 \vartheta_\nu &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{bei}_\nu(\lambda r)}{\operatorname{ber}_\nu(\lambda r)}, & \varphi_\nu &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{bei}_\nu(\lambda a)}{\operatorname{ber}_\nu(\lambda a)}, \\
 \delta_\nu &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{bei}_\nu(\gamma_m a)}{\operatorname{ber}_\nu(\gamma_m a)}, & M_\nu(x) &= \sqrt{\operatorname{ber}_\nu^2(x) + \operatorname{bei}_\nu^2(x)}, \quad \nu = 0, 1.
 \end{aligned}$$

Związki fizyczne w przypadku płaskiego stanu odkształcenia wyrażone we współrzędnych biegunowych mają postać ([7], str. 19, wzór (2.11))

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} - (1 - \nu) kT \right], \\
 \sigma_\theta &= \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} - (1 - \nu) kT \right], \\
 \sigma_z &= \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[\nu \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) - (1 - \nu) kT \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Po podstawieniu w powyższe związki przemieszczenia określonego wzorem (3.10) znajdujemy

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \sigma_r = kT_0 \frac{c^2}{r} \eta(t) & \left[D_1 \left[\varrho c^2 \lambda r M(\lambda r) \cos(\theta_1 + \vartheta + \omega t - \varphi) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2GM_1(\lambda r) \sin\left(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \right. \\
 & + D_2 \left[\varrho r c \omega J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) - 2GJ_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \right] \left[a\varrho \omega \sin(\theta_1 + \omega t) + F_1 \sin\left(\theta_1 + \varphi_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \left\{ B_n \left[\varrho c \kappa \alpha_n^2 r I_0\left(\kappa \alpha_n^2 \frac{r}{c}\right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2GI_1\left(\kappa \alpha_n^2 \frac{r}{c}\right) \right] + \frac{\varrho r \kappa^2 \alpha_n^3 J_0(\alpha_n r) - 2GJ_1(\alpha_n r)}{J_1(\alpha_n a)} \right\} - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[\varrho c \beta_m r J_0\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) - 2GJ_1\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) \right] \left[F_m \sin(\theta_m + \beta_m t) + \right. \\
 & \left. H_m \sin\left(\theta_m + \delta_1 + \beta_m t - \delta - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \varrho r \frac{M(\lambda r)}{M(\lambda a)} \cos(\vartheta + \omega t - \varphi) \Big],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad \sigma_\vartheta = 2kT_0 G \frac{c^2}{r} \eta(t) & \left[D_1 \left[\frac{\nu \lambda r}{1 - 2\nu} M(\lambda r) \cos(\theta_1 + \vartheta + \omega t - \varphi) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + M_1(\lambda r) \sin(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi) \right] + D_2 \left[J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) + \frac{\nu \omega r}{c(1 - 2\nu)} J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) \right] \times \\
 & \times \left[\varrho a \omega \sin(\theta_1 + \omega t) + F_1 \sin\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \left\{ \frac{J_1(\alpha_n r)}{J_1(\alpha_n a)} + \frac{\alpha_n r J_0(\alpha_n r)}{J_1(\alpha_n a)} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} - \frac{\varrho(c^2 + \kappa^2 \alpha_n^2)}{2G} \right] + \right. \\
 & \left. + B_n \left[\frac{\nu r \kappa \alpha_n^2}{c(1 - 2\nu)} I_0\left(\kappa \alpha_n^2 \frac{r}{c}\right) + I_1\left(\kappa \alpha_n^2 \frac{r}{c}\right) \right] \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[J_1\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\nu r \beta_m}{c(1 - 2\nu)} J_0\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) \right] \left[F_m \sin(\theta_m + \beta_m t) + H_m \sin\left(\theta_m + \delta_1 + \beta_m t - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \delta - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \frac{\varrho r M(\lambda r)}{2GM(\lambda a)} \cos(\vartheta + \omega t - \varphi) \Big].
 \end{aligned}$$

4. Rezonans

Przy wykonywaniu transformacji odwrotnej przemieszczenia zakładaliśmy, że $\omega \neq \beta_m$, tzn. że częstość zmian temperatury na powierzchni walca była różna od wartości β_m określanych z równania przestępnego (3.9). Jeżeli $\omega = \beta_m$, to zna-

lezione poprzednio wzory przestają obowiązywać. Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem pola przemieszczeń w przypadku, gdy $\omega = \beta_m$.

Transformata przemieszczeń (3.8) ma teraz bieguny pojedyncze $s_3 = c^2/\kappa$ oraz ciągi nieskończone biegunów w punktach $s_n = -\kappa\alpha_n^2$, $s_m = \pm i\beta_m$ z wyjątkiem pary $s_k = \pm i\beta_k$, dla której zachodzi równość:

$$(4.1) \quad s_k = \pm i\beta_k = \pm i\omega.$$

Te dwie wartości $s_k = \pm i\omega$ tworzą teraz parę biegunów podwójnych. Ponieważ równanie (3.9) ma nieskończenie wiele rozwiązań różnych, wobec tego równość (4.1) może zachodzić dla jednej wartości β_k wyróżnionej z ciągu, jaki tworzą bieguny s_m .

Obliczenia residuów w biegunach transformaty przemieszczeń dokonamy w oparciu o wzór ([8], str. 185, wzór (4-59))

$$(4.2) \quad \sum_p \operatorname{res}_{s=s_p} [u(r, s) e^{st}] = \sum_{i=1}^n \frac{L(s_i)}{N'(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{k=1}^m \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d}{ds} \left[\frac{L(s) (s - s_k)^2}{N(s)} e^{st} \right],$$

przy czym pierwsza część wzoru obowiązuje dla wszystkich biegunów jednokrotnych, natomiast drugi składnik określa residua w biegunach podwójnych.

Po wykonaniu działań według wzoru (4.2) otrzymujemy drugi wzór na przemieszczenie:

$$(4.3) \quad u(r, t) = kT_0 c^2 \eta(t) \left[D_1 M_1(\lambda r) \sin\left(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa\alpha_n^2 t} \left[B_n I_1\left(\kappa\alpha_n^2 \frac{r}{c}\right) + \frac{J_1(\alpha_n r)}{J_1(\alpha_n a)} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} A_m J_1\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) \left[F_m \sin(\theta_m + \beta_m t) + H_m \sin\left(\theta_m + \vartheta_1 + \beta_m t - \delta - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \right. \\ \left. + D_3 J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \left\{ H_1 \sin(\theta_1 + \omega t) \left[1 + \omega \frac{r}{c} \frac{J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right)}{J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right)} \right] + H_2 \left[\frac{2\omega r}{c} \frac{J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right)}{J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right)} - 3 \right] \times \right. \right. \\ \left. \times \sin\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) + H_3 \cos(\theta_1 + \omega t) (1 + F_2 t) + \right. \\ \left. + H_4 \sin(\theta_2 - \omega t) + H_5 \cos\left(2\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + H_6 \cos(\theta_1 + 2\varphi_1 + \omega t - 2\varphi) + t H_7 \cos\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \right].$$

Wprowadziliśmy tutaj dalsze oznaczenia

$$\begin{aligned}
 D_3 &= \frac{\kappa}{C_1 J_1 \left(\omega \frac{a}{c} \right) \left(\frac{1}{1-\nu} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{2G} \right) M(\lambda a)}, & H_1 &= \frac{\rho a \omega}{2G} M(\lambda a), \\
 H_2 &= \lambda \frac{M_1(\lambda a)}{2G}, & H_3 &= a \frac{M(\lambda a)}{2\kappa}, & F_2 &= \frac{\rho \kappa \omega^2}{G}, \\
 (4.4) \quad C_2 &= \sqrt{\kappa^2 \omega^2 (c^4 - 3\kappa^2 \omega^2)^2 + c^4 (c^4 + 5\kappa^2 \omega^2)^2}, & H_4 &= \frac{C_2 \rho a \omega M(\lambda a)}{4GC_1^3}, \\
 \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{\kappa \omega (c^4 - 3\kappa^2 \omega^2)}{c^2 (c^4 + 5\kappa^2 \omega^2)} = \operatorname{tg} \theta_1 \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \theta_1}{1 + 5 \operatorname{tg}^2 \theta_1}, \\
 H_5 &= \frac{\lambda \kappa M_1(\lambda a)}{C_1}, & H_6 &= \frac{a M_1^2(\lambda a)}{2\kappa M(\lambda a)}, & H_7 &= \lambda M_1(\lambda a).
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu wzoru (4.3) do związków fizycznych (3.12) otrzymujemy naprężenia:

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad \sigma_r &= kT_0 \frac{c^2}{r} \eta(t) \left[D_1 \left[\rho c^2 \lambda r M(\lambda r) \cos(\theta_1 + \vartheta + \omega t - \varphi) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2GM_1(\lambda r) \sin\left(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa a_n^2 t} \left\{ B_n \left[\rho c \kappa a_n^2 r I_0\left(\kappa a_n^2 \frac{r}{c}\right) - 2GI_1\left(\kappa a_n^2 \frac{r}{c}\right) \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{J_1(a_n a)} \left[\rho r \kappa^2 a_n^3 J_0(a_n r) - 2GJ_1(a_n r) \right] \right\} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} A_m \left[\rho r c \beta_m J_0\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2GJ_1\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) \right] \left[F_m \sin(\theta_m + \beta_m t) + H_m \sin\left(\theta_m + \delta_1 + \beta_m t - \delta - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + D_3 \left\{ H_1 \sin(\theta_1 + \omega t) \left[\rho r c \omega J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) + 2G \frac{r}{c} J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \left(\frac{1}{1-\nu} - rF_3 - \frac{a}{r} \right) \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + H_2 \sin\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[4G \frac{r}{a} J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \left(\frac{3a}{2r} + \frac{1}{1-\nu} - rF_3 \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 3\rho r c \omega J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) \right] + \left[\rho r c \omega J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) - 2GJ_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \right] \left[H_3 \cos(\theta_1 + \omega t) (1 + F_2 t) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + H_4 \sin(\theta_2 - \omega t) + H_5 \cos\left(2\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) + H_6 \cos(\theta_1 + 2\varphi_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \omega t - 2\varphi) + tH_7 \cos\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\} - \\
 &\quad \left. - \rho r \frac{M(\lambda r)}{M(\lambda a)} \cos(\vartheta + \omega t - \varphi) \right],
 \end{aligned}$$

przy czym $F_3 = \rho a \omega^2 / 2G$ oraz

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad \sigma_\vartheta = & 2kT_0 G \frac{c^2}{r} \eta(t) \left[D_1 \left[\frac{\nu \lambda r}{1-2\nu} M(\lambda r) \cos(\theta_1 + \vartheta + \omega t - \varphi) + \right. \right. \\
 & + M_1(\lambda r) \sin\left(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa a_n^2 t} \left\{ \frac{J_1(a_n r)}{J_1(a_n a)} + \right. \\
 & + \frac{a_n J_0(a_n r)}{J_1(a_n a)} \left[\frac{1}{1-2\nu} - \frac{\rho(c^2 + \kappa^2 a_n^2)}{2G} \right] + B_n \left[\frac{\nu r \kappa a_n^2}{c(1-2\nu)} I_0\left(\kappa a_n^2 \frac{r}{c}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + I_1\left(\kappa a_n^2 \frac{r}{c}\right) \right] \right\} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} A_m \left[J_1\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) + \frac{\nu r \beta_m}{c(1-2\nu)} J_0\left(\beta_m \frac{r}{c}\right) \right] \times \\
 & \times \left[F_m \sin(\theta_m + \beta_m t) + H_m \sin\left(\theta_m + \delta_1 + \beta_m t - \delta - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \\
 & + D_3 \left\{ \frac{H_1}{1-2\nu} \sin(\theta_1 + \omega t) \left[(1+\nu) \omega \frac{r}{c} J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) + J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left(1 - 2\nu - \nu r^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right) \right] + \frac{H_2}{1-2\nu} \sin\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \times \right. \\
 & \times \left. \left[\omega \frac{r}{c} (2-3\nu) J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) - 3J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) \left(1 - 2\nu + \frac{2\nu r^2 \omega^2}{3c^2}\right) \right] + \right. \\
 & + \left. \left[J_1\left(\omega \frac{r}{c}\right) + \frac{\nu \omega r}{c(1-2\nu)} J_0\left(\omega \frac{r}{c}\right) \right] \left[H_3 \cos(\theta_1 + \omega t) (1 + F_2 t) + \right. \right. \\
 & + H_4 \sin(\theta_2 - \omega t) + H_5 \cos\left(2\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \\
 & \left. \left. + H_6 \cos(\theta_1 + 2\varphi_1 + \omega t - 2\varphi) + t H_7 \cos\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\} - \\
 & \left. - \frac{\rho r M(\lambda r)}{2GM(\lambda a)} \cos(\vartheta + \omega t - \varphi) \right].
 \end{aligned}$$

We wzorach na naprężenia i przemieszczenia w zależności od budowy wyrażeń, które są funkcjami czasu, wyróżnić możemy: 1) funkcje harmoniczne, 2) funkcje malejące wykładniczo oraz 3) funkcje o amplitudzie liniowo zależnej od czasu.

Funkcje wymienione w p. 3 przedstawiają rezonans okresowy. Zajmiemy się bliżej przemieszczeniem w przypadku wystąpienia rezonansu.

5. Analiza rozwiązania w przypadku rezonansu

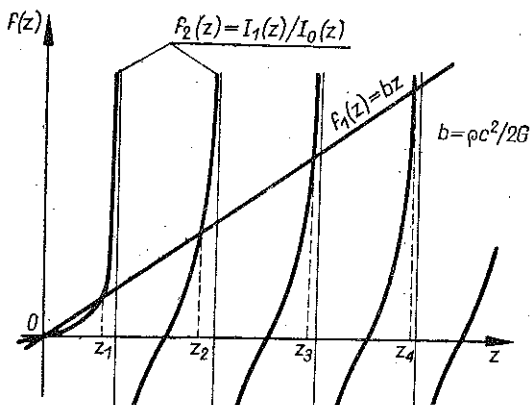
W celu wyznaczenia częstości rezonansowych zmian temperatury znajdziemy kilka pierwszych rozwiązań równania (3.9). Po wykorzystaniu związku między stałymi materiałowymi

$$\frac{\rho c^2}{2G} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

i wprowadzeniu oznaczenia $\beta_m a/c = z_m$, równanie (3.9) przepisujemy jak następuje:

$$(5.1) \quad z_m \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} = \frac{J_1(z_m)}{J_0(z_m)}$$

Rozmieszczenie pierwiastków tego równania ilustruje rys. 1. Równanie (5.1) rozwiązano przyjmując $\nu = 0,3$ (jak dla metali). W przypadku rezonansu ma miejsce



Rys. 1

równość $\beta_k = \omega_k$. Tym samym pierwiastki z_k równania (5.1) związane są z częstością rezonansową zależnością

$$(5.2) \quad \omega_k = \frac{z_k c}{a}$$

Widzimy więc, że częstości rezonansowe ω_k są funkcjami prędkości fali podłużnej i promienia walca a . Prędkość fali c wyliczymy ze wzoru (3.1), a promień walca przyjmujemy $a = 10$ cm. Te dane pozwalają wyznaczyć częstości rezonansowe. Pięć pierwszych pierwiastków równania (5.1) i odpowiadających im częstości rezonansowych (dla $k = 1, 2, \dots, 5$) dla trzech różnych metali zamieszczono w tabelcy 1.

Tablica 1

Materiał		Stal	Aluminium	Miedź
k	$z_k = \frac{\omega_k a}{c}$	$\omega_k \cdot 10^{-4} [\text{sek.}^{-1}]$		
1	2,123	12,622	12,960	9,296
2	5,414	32,156	33,027	23,657
3	8,587	51,078	52,493	37,552
4	11,743	69,812	71,706	51,357
5	14,892	88,613	90,722	65,123

Zajmiemy się obecnie oszacowaniem przemieszczenia na powierzchni walca w przypadku rezonansu. Rozpatrzmy walec stalowy o promieniu $a = 10$ cm. Obowiązują podane w drugiej kolumnie tablicy 1 częstotliwości rezonansowe. Dla stali stałe materiałowe mają następujące wartości:

$$\nu = 0,3, \quad c = 5,95 \cdot 10^{-5} \text{ cm/sek.}, \quad \kappa = 0,128 \text{ cm}^2/\text{sek.}, \quad \alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

Obliczenia przeprowadzimy dla przypadku rezonansu odpowiadającego najniższej z wyznaczonych częstotliwości rezonansowej, tzn. $\omega_1 = \beta_1 = \omega = 12,62 \cdot 10^4$ 1/sek. (por. tablica 1).

Oszacujemy najpierw rząd wielkości poszczególnych składników wzoru (4.3) określającego przemieszczenie u . Dla przejrzystości oszacowań wzór ten zapiszemy w pełnej postaci bez stosowania oznaczeń skracających. Mnożnik kT_0 jest wspólny dla wszystkich składników. Możemy zatem wzór (4.3) napisać następująco:

$$(5.3) \quad \frac{u}{kT_0} = \sum_{i=1}^{11} S_i,$$

przy czym

$$S_1 = \frac{c^2 \kappa \lambda}{\omega \sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2}} \sin \left(\theta_1 + \vartheta_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$S_2 = \frac{2c^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 e^{-\kappa \alpha_n^2 t}}{(\alpha_n^4 + \lambda^4) (c^2 + \kappa^2 \alpha_n^2)} \left[1 + \frac{2GI_1 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right)}{\rho a c \kappa \alpha_n^2 I_0 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right) - 2GI_1 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right)} \right],$$

$$S_3 = \rho c^2 \kappa \frac{a}{G} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m^3 \sin(\theta + \beta_m t)}{\sqrt{c^4 + \kappa^2 \beta_m^2} (\beta_m^2 - \omega^2) \left(\frac{\rho a^2 \beta_m^2}{2G} - \frac{1}{1 - \nu} \right)},$$

$$S_4 = 2\kappa c^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m \gamma_m M_1(\gamma_m a) \sin \left(\theta_m + \delta_1 + \beta_m t - \delta - \frac{\pi}{4} \right)}{(\beta_m^2 - \omega^2) M(\gamma_m a) \sqrt{c^4 + \kappa^2 \beta_m^2} \left(\frac{\rho a^2 \beta_m^2}{2G} - \frac{1}{1 - \nu} \right)}.$$

W pozostałych składnikach sumy (5.3) oznaczmy

$$P = \frac{1}{\frac{1}{1 - \nu} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{2G}}, \quad \omega \frac{a}{c} \frac{J_0 \left(\omega \frac{a}{c} \right)}{J_1 \left(\omega \frac{a}{c} \right)} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}$$

i wówczas napiszemy

$$S_5 = \frac{\rho a \omega c^2 \kappa P}{2G \sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2}} \left[1 + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right] \sin(\theta_1 + \omega t),$$

$$S_6 = \frac{c^2 \kappa \lambda P M_1(\lambda a)}{2\omega \sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2} M(\lambda a)} \left(2 \cdot \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} - 3 \right) \sin \left((\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}) \right),$$

$$S_7 = \frac{ac^2 P \cos(\theta_1 + \omega t)}{2 \sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2}} \left(1 + \frac{\rho \kappa \omega^2}{G} t \right),$$

$$S_8 = \frac{\rho c^2 \kappa a \omega P \sin(\theta_2 - \omega t)}{4G(c^4 + \kappa^2 \omega^2)^2} \sqrt{\kappa^2 \omega^2 (c^4 - 3\kappa^2 \omega^2)^2 + c^4 (c^4 + 5\kappa^2 \omega^2)^2},$$

$$S_9 = \frac{c^2 \kappa^2 \lambda P M_1(\lambda a)}{(c^4 + \kappa^2 \omega^2) M(\lambda a)} \cos \left(2\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$S_{10} = \frac{ac^2 P M_1^2(\lambda a)}{2 \sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2} M^2(\lambda a)} \cos(\theta_1 + 2\varphi_1 + \omega t - 2\varphi),$$

$$S_{11} = t \frac{c^2 \kappa \lambda P M_1(\lambda a)}{\sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2} M(\lambda a)} \cos \left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4} \right).$$

W dalszym ciągu będziemy często korzystać z oczywistych nierówności

$$(5.4) \quad |\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1.$$

Przystępujemy teraz do oszacowania poszczególnych składników wzoru (5.3). Pierwszy składnik S_1 po uwzględnieniu nierówności (5.4) szacujemy za pomocą stałej

$$S_1 < \frac{\kappa \lambda}{\omega} = 9,63 \cdot 10^{-4}.$$

Szereg S_2 po przekształceniu wyrażeń w nawiasie kwadratowym można napisać następująco:

$$S_2 = 2\rho c^3 \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^4 e^{-\kappa \alpha_n^2 t} I_0 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right)}{(\alpha_n^4 + \lambda^4) (c^4 + \kappa^2 \alpha_n^2) \left[\rho a c \kappa \alpha_n^2 I_0 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right) - 2GI_1 \left(\kappa \alpha_n^2 \frac{a}{c} \right) \right]}.$$

Nierówności

$$I_1(x) < I_0(x), \quad \eta(x) e^{-x} < 1,$$

pozwalają napisać:

$$S_2 < 2\rho c \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho a c \kappa \alpha_n^2 - 2G} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2 - \frac{2G}{\rho a c \kappa}}.$$

Posłużymy się teraz nierównością dotyczącą zer równania (2.8), ([5], str. 48, wzór (4)), która w naszym przypadku ma postać

$$\alpha_n a > \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi.$$

Tym bardziej więc będzie

$$(5.5) \quad a_n a > (n - 1) \pi.$$

Zastosowanie tej nierówności sprowadza szereg S_2 do postaci

$$S_2 < \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{2Ga}{\rho c \kappa \pi^2}} = -\frac{\rho c \kappa}{G} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{2Ga}{\rho c \kappa \pi^2}}.$$

Sumę ostatniego szeregu znajdujemy w tablicach ([10], str. 45, wzór [1.421(3)]) i ostatecznie otrzymujemy

$$|S_2| < \frac{\rho c \kappa}{2G} + \sqrt{\frac{\rho a c \kappa}{2G}} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{2Ga}{\rho c \kappa}} \right) = 7,06 \cdot 10^{-4}.$$

Zajmiemy się teraz szeregiem S_3 . Pierwsze szacowanie daje w wyniku

$$S_3 < \frac{2\kappa}{a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m^3 \sin(\theta_m + \beta_m t)}{(\beta_m^2 - \omega^2) \left(\beta_m^2 - \frac{2G}{\rho a^2 (1 - \nu)} \right)}.$$

Sumowanie w tym szeregu rozpoczyna się od wskaźnika $m = 2$. Wynika to z faktu, że rozpatrujemy przypadek rezonansu odpowiadający najniższej częstotliwości rezonansowej, tzn $\omega = \beta_1$.

Poszukamy teraz związku pomiędzy wartościami β_m oraz liczbami porządkowymi m w szeregu S_3 . Z budowy równania (5.1) oraz z rys. 1 wynika, że każdy pierwiastek $z_m = \beta_m a/c$ tego równania znajduje się między dwoma sąsiednimi asymptotami funkcji

$$f_2(z) = \frac{J_1(z)}{J_0(z)}.$$

Funkcja ta ma asymptoty dla tych wartości z_p , które spełniają równanie

$$J_0(z_p) = 0.$$

Słuszna więc będzie nierówność $z_{p-1} < z_m < z_p$. Wykorzystanie nierówności podobnej do (5.5) prowadzi do wyniku $z_m > (p - 2) \pi$. Zamiana wskaźnika p na m i podstawienie wartości pierwiastka z_m pozwala napisać

$$(5.6) \quad \beta_m > \frac{c}{a} (m - 2) \pi.$$

W dalszym ciągu będzie nam potrzebna znajomość kąta θ_m . Z zależności (3.11) mamy

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{\beta_m \kappa}{c^2}.$$

Wartość $\operatorname{tg} \theta_m$ jest mniejsza od 0,01 aż do wskaźnika porządkowego $m = 15 \cdot 10^4$. Fakt ten upoważnia nas do przyjęcia $\operatorname{tg} \theta_m \approx \theta_m \approx 0$. Wracając do szeregu S_3

posłużymy się jeszcze nierównością $\beta_m > 2\omega$ i wówczas rozpatrywany szereg przyjmie postać

$$S_3 < 2\sqrt{2} \frac{\kappa}{a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m \sin(\beta_m t)}{\beta_m^2 - \frac{2G}{\rho a^2(1-\nu)}}$$

Po wykorzystaniu nierówności (5.6) napiszemy

$$S_3 < \frac{2\sqrt{2}\kappa}{\pi c} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-2) \sin\left[\frac{\pi ct}{a}(m-2)\right]}{(m-2)^2 - \frac{2G}{\rho c^2 \pi^2(1-\nu)}}$$

Zamiana wskaźnika m na $m+2$ daje ostatecznie

$$S_3 < \frac{2\sqrt{2}\kappa}{\pi c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m \sin\left[\frac{\pi ct}{a}m\right]}{m^2 - \frac{2G}{\rho c^2 \pi^2(1-\nu)}}$$

W oparciu o tablice ([10], str. 48, wzór [1.445(5)]) otrzymujemy

$$S_3 < \frac{\sqrt{2}\kappa}{c} \frac{\sin\left[\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2G}{\rho(1-\nu)}} \left(2k+1 - \frac{ct}{a}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2G}{\rho(1-\nu)}}\right]}, \quad 2k \leq \frac{ct}{a} \leq 2k+1,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Opierając się na otrzymanym wyniku napiszemy:

$$|S_3| < \frac{\sqrt{2}\kappa}{c \sin\left(\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2G}{\rho(1-\nu)}}\right)} = 4,2 \cdot 10^{-7}.$$

Zajmiemy się teraz oszacowaniem szeregu S_4 . Po wykorzystaniu nierówności (5.4) oraz nierówności dotyczącej funkcji Kelvina-Thompsona [5] $M_1(x) < M(x)$ szereg S_4 przekształcamy do postaci

$$S_4 < \frac{4\kappa G}{\rho a^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m \gamma_m}{(\beta_m^2 - \omega^2) \left[\beta_m^2 - \frac{2G}{\rho a^2(1-\nu)} \right]}$$

W dalszym ciągu wyrazimy wartości γ_m bezpośrednio przez β_m :

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{\beta_m}{\kappa}} = \sqrt{\frac{c}{a\kappa}} \sqrt{\frac{\beta_m a}{c}}$$

Ponieważ

$$\sqrt{\beta_m \frac{a}{c}} = z_m > 1,$$

wobec tego zachodzi nierówność:

$$\sqrt{\frac{\beta_m a}{c}} < \frac{\beta_m a}{c}.$$

Po uwzględnieniu ostatniej nierówności szereg S_4 przyjmuje postać

$$S_4 < \frac{4G}{\rho a} \sqrt{\frac{\kappa}{ac}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{(\beta_m^2 - \omega^2) \left[\beta_m^2 - \frac{2G}{\rho a^2 (1-\nu)} \right]}.$$

Podobnie jak w szeregu S_3 nierówność $\beta_m > 2\omega$ pozwala napisać

$$S_4 < \frac{4G}{\rho a} \sqrt{\frac{2\kappa}{ac}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_m^2 - \frac{2G}{\rho a^2 (1-\nu)}}.$$

Po wykorzystaniu nierówności (5.6) przekształcamy szereg do postaci

$$\begin{aligned} S_4 &< \frac{4aG}{\rho c^2 \pi^2} \sqrt{\frac{2\kappa}{ac}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \frac{2G}{\rho c^2 \pi^2 (1-\nu)}} = \\ &= -2a \sqrt{\frac{2\kappa}{ac}} \left[1 - \nu - \frac{2G}{\rho c^2 \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \frac{2G}{\rho c^2 \pi^2 (1-\nu)}} \right]. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy postać szeregu podobną do szeregu S_2 , a po wykorzystaniu tego samego wzoru [10] dostaniemy

$$|S_4| < \sqrt{\frac{2\kappa a}{c}} \left[1 - \nu + \sqrt{1 - 2\nu} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{2G}{\rho c^2 (1-\nu)}} \right) \right] = 2,48 \cdot 10^{-3}.$$

Opierając się na jednej z dwu nierówności (5.4) w prosty sposób, nie wymagający objaśnień, szacujemy moduły pozostałych składników sumy (5.3). Kolejno otrzymujemy

$$|S_5| < \frac{\rho \kappa \omega |P|}{2G} \left(1 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) = 1,95 \cdot 10^{-8},$$

$$|S_6| < \frac{\kappa \lambda |P|}{2\omega} \left| 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} - 3 \right| = 1,45 \cdot 10^{-4},$$

$$|S_7| < \frac{|P| a}{2} \left(1 + \frac{\rho \kappa \omega^2}{G} t \right) = 0,777 (1 + 0,011t),$$

$$|S_8| < \frac{\rho a \kappa \omega}{2G} |P| = 3,99 \cdot 10^{-7}, \quad S_{10} < \frac{|P| a}{2} = 0,777,$$

$$|S_9| < \frac{\kappa \lambda |P|}{c^2} = 4,58 \cdot 10^{-11}, \quad S_{11} < \kappa \lambda |P| t = 19,8t.$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że wszystkie składniki wzoru (5.3) są bardzo małe z wyjątkiem wyrazu S_{11} . Dla czasu $t = 1$ sek, największy z odrzuconych składników jest około 25 razy mniejszy od składnika S_{11} . W dalszym ciągu ten składnik będziemy nazywać częścią rezonansową, tzn. $kT_0 S_{11} = u_{rez}$. Z oszacowania wzoru (5.3) oraz z budowy jego składników wynika, że tylko część rezonansowa może doprowadzić do powstania dużych przemieszczeń. Można zatem z niewielkim błędem przyjąć, że

$$(5.7) \quad u \cong u_{rez} = tkT_0 \frac{c^2 \kappa \lambda P M_1(\lambda a)}{\sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2} M(\lambda a)} \cos\left(\theta_1 + \varphi_1 + \omega t - \varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{kc^2 \kappa \lambda |P| M_1(\lambda a)}{\sqrt{c^4 + \kappa^2 \omega^2} M(\lambda a)} = K \quad \text{oraz} \quad \theta_r = \varphi + \frac{\pi}{4} - \theta_1 - \varphi_1$$

sprowadzamy wzór (5.7) do postaci

$$(5.8) \quad u_{rez} = tKT_0 \cos(\theta_r - \omega t).$$

W przypadku walca wykonanego ze stali stałe K oraz θ_r mają wartości

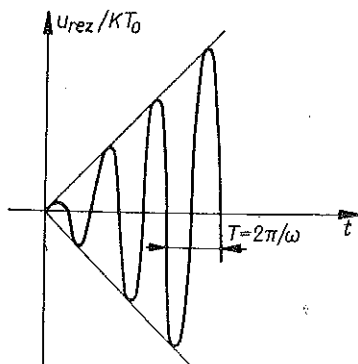
$$K = 4,41 \cdot 10^{-4} \text{ [cm/sek.]}, \quad \theta_r = \frac{\pi}{4}.$$

Po podstawieniu stałej θ_r wzór na przemieszczenie napiszemy w ostatecznej postaci

$$(5.9) \quad \frac{u_{rez}}{KT_0} = t \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Wykres zmian przemieszczeń opisanych wzorem (5.9) ilustruje rys. 2.

Dla promienia $r = a$ przemieszczenie odpowiadające granicy sprężystości $R_s = 3000 \text{ kG/cm}^2$ wynosi około $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$. Walec poddany działaniu temperatury o najniższej częstotliwości rezonansowej ω_1 i o amplitudzie np. $T_0 = 5^\circ\text{C}$ osiągnie takie przemieszczenie po upływie około 7,1 sek. Wystąpi przy tym $129 \cdot 10^3$ zmian przemieszczenia. Czas ten jest proporcjonalnie dłuższy dla mniejszych wartości T_0 . Przy dużych amplitudach temperatury wpływ pominiętych składników na przemieszczenie staje się większy i przekroczenie granicy sprężystości następuje szybciej niż to określa wzór (5.9). Wynika to z przeprowadzonych oszacowań wzoru (5.4).



Rys. 2

Natomiast dowolnie małe wartości T_0 po upływie odpowiednio długiego czasu zawsze spowodują przekroczenie granicy sprężystości materiału walca. Spostrzegamy tutaj analogię do działania zmiennych sił na ośrodek sprężysty. Zbyt duże wartości przyłożonych sił od razu lub po krótkim czasie spowodują przekroczenie granicy sprężystości. Natomiast wtedy, gdy częstość sił wymuszających (nawet bardzo małych) jest równa częstości drgań własnych, to przy pominięciu tłumienia zawsze dochodzi do zniszczenia układu.

6. Wnioski końcowe

Zachodzi pytanie, czy w praktyce może wystąpić omawiany rezonans. Jak pamiętamy, najmniejsze częstości rezonansowe dla przyjętego promienia walca, były rzędu około 10^5 [sek.⁻¹]. Są one nieco mniejsze przy większych średnicach walca, jednak rząd wielkości nie ulega zmianie. Zmiany temperatur, z którymi ma do czynienia technika, są znacznie niższe i nie przekraczają 100 [sek.⁻¹] w szybkobieżnych silnikach spalinowych. Zakres częstości rezonansowych zmian temperatury można wygenerować w specjalnych układach przetwornikowych elektroniczno-termicznych, jednak przypadkowe wystąpienie rezonansu jest raczej wykluczone.

Literatura cytowana w tekście

1. Applied Mechanics Reviews, 19 (1966).
2. Б. Боли, Уэивер, *Теория температурных напряжений*, tłum. z ang. Moskwa 1964.
3. W. DERSKI, *A dynamic problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech. Stos., 2, 13 (1961).
4. N.W. Mc LACHLAN, *Complex Variable Theory and Transform Calculus*, Cambridge 1963.
5. N.W. Mc LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, Warszawa 1964.
6. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1966.
7. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.
8. H. PARKUS, *Instationare Wärmespannungen*, Wiedeń 1959.
9. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, Warszawa 1965.
10. I.M. RYŻYK, I.S. GRADSZTEJN, *Tablice całek, sum szeregów i iloczynów*, Warszawa 1964.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОМ ЦИЛИНДРЕ, ВЫЗВАННЫЕ ВЛИЯНИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассматривается вопрос термических напряжений в бесконечно длинном цилиндре, боковая поверхность которого подвергается действию периодически изменяющейся температуры. Решается динамическая задача. Кроме решений для произвольных частот изменений температуры, рассматривается также вопрос резонанса, вызванного влиянием температуры с резонансной частотой. Определяется несколько первых резонансных частот. Проведенный анализ дает возможность убедиться в том, что частоты изменений температуры, вызывающие явление резонанса, находятся вне диапазона изменений, существующих в технике.

S u m m a r y

DYNAMIC STRESSES IN AN INFINITE CYLINDER PRODUCED
BY THE ACTION OF A VARIABLE TEMPERATURE

The problem under consideration is the dynamic problem of thermal stresses in an infinite cylinder the surface of which is heated at a periodically varying temperature. In addition to the solution for any frequency of the temperature variation, the problem of resonance is solved for a temperature varying at a resonance frequency. A few resonance frequencies are determined. As a result on the analysis it is found that the resonance frequencies of the temperature lie outside the frequency range that can be expected in engineering problems.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 stycznia 1967 r.
