

DRGANIA USTALONE PRZESTRZENNYCH TRAS PRĘTOWYCH

MARIAN ŁUKOWIAK (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

W pracy [1] podano metodę obliczeń statycznych przestrzennych tras prętowych, których schematy statyczne zbliżone są do schematów statycznych przestrzennych rurociągów energetycznych. Trasy takie, dowolnie podparte w przekrojach skrajnych, posiadają dodatkowo w punktach pośrednich usztywnienia podporami sprężystymi lub niesprężystymi oraz połączenia sprężyste w postaci przegubów lub kompensatorów. W poniższym opracowaniu przedstawiono sposób poszukiwania częstości drgań własnych takich tras prętowych oraz wyznaczania sił wewnętrznych wywołanych działaniem harmonicznym sił wymuszających.

Rozważania dotyczą tras, które spełniają warunki teorii prętów cienkich, a ewentualny przepływ materiału transportowanego taką trasą (w przypadku rurociągu) ma charakter laminarny i nie powoduje dynamicznych zaburzeń lokalnych. Ponadto w rozważaniach pominięto wpływ tłumienia oraz bezwładność obrotową. W porównaniu do innych metod obliczania częstości drgań własnych przestrzennych ustrojów prętowych, omawianych w pracach [2, 3 lub 4], podany w pracy sposób cechuje duża ogólność rozważań ujętych w zawartym schemacie obliczeniowym, a zastosowany tutaj zapis macierzowy nadaje się do programowania obliczeń na maszynach cyfrowych.

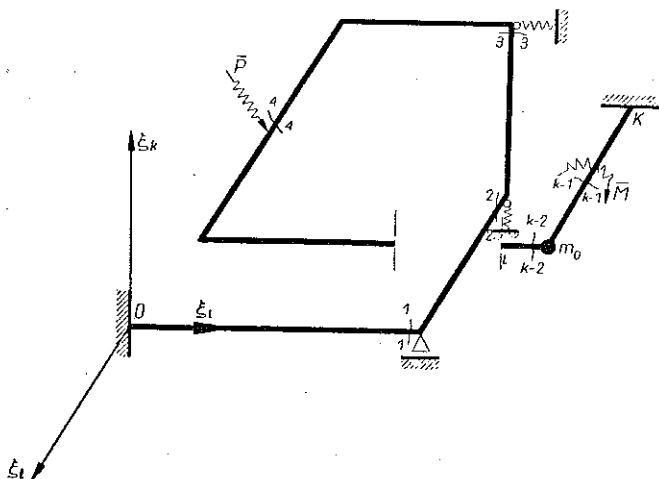
2. Podstawowe zależności

Przedmiotem rozważań będzie trasa prętowa dowolnie podparta w przekrojach skrajnych, posiadająca na swej długości dowolne podparcia, przeguby, kompensatory, masy skupione oraz skupione siły wymuszające o charakterze harmonicznym (rys. 1). Punkty te dalej nazywać będziemy punktami nieciągłości trasy.

Zakładamy, że wszystkie punkty tej trasy nieograniczone zewnętrznymi więzami kinematycznymi znajdują się w ruchu ustalonym. Przyczyną takiego ruchu mogą być zewnętrzne siły wymuszające o znanej częstości wymuszania. W przypadku braku sił wymuszających ustrój wyprowadzony z położenia równowagi znajduje się w fazie drgań ustalonych (siły tłumienia pomijamy). Każdy punkt osi trasy przemieszcza się (przemieszczenie jest małe w porównaniu z wymiarami poprzecznymi pręta), a każdy z przekrojów obraca się (obrót jest mały w porównaniu z jednością). Oznaczając przez β_i składowe wektora obrotu przekroju na osie układu odniesienia

ξ_i (1), przez u_i składowe wektora przemieszczenia oraz przez ω częstość kołową ruchu ustalonego, możemy napisać następujące zależności:

$$(2.1) \quad \bar{p}_i = \beta_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t, \quad \bar{u}_i = u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t.$$



Rys. 1

Stan napięcia panujący w poszczególnych przekrojach pręta redukuje się również do wypadkowego momentu o trzech składowych M_i oraz siły wypadkowej o składowych P_i

$$(2.2) \quad \bar{M}_i = M_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t, \quad \bar{P}_i = P_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sin \omega t.$$

Zewnętrzne uogólnione siły wymuszające zredukujemy do przyłożonych w poszczególnych punktach trasy momentów wypadkowych o składowych M_i^* oraz sił o składowych

$$(2.3) \quad \bar{M}_i^* = M_i^* \sin \omega t, \quad \bar{P}_i^* = P_i^* \sin \omega t.$$

W ten sposób ustalony charakter drgań trasy pozwala na określenie wszystkich wprowadzonych tu wielkości za pomocą amplitud.

Oznaczmy jeden ze skrajnych przekrojów trasy symbolem O , drugi — symbolem K (Rys. 1). Podzielmy gałąź przekrojami 1, 2, 3, ..., z w kolejności od O do K , na $z+1$ odcinków. Przekrojów tych dokonujemy przed wszystkimi podporami, przegubami, kompensatorami, masami skupionymi oraz zewnętrznymi siłami wymuszającymi. Każdy z otrzymanych w ten sposób odcinków, który dalej reprezentowany będzie przez odcinek $N, N+1$, nie posiada na swej długości punktów wielokrotnych oraz wymienionych wyżej punktów nieciągłości. W początkowym punkcie N każdego z odcinków $N, N+1$, przyjmijmy kartezjański układ współrzędnych N, x_1, x_2, x_3 o osiach równoległych do głównego układu $0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ przyjętego w punkcie początkowym trasy O .

(1) Wszystkie wskaźniki przyjmują wartości 1, 2, 3.

Wprowadzając sześciowymiarową przestrzeń uogólnionych sił i przemieszczeń powiemy, że w skrajnych przekrojach odcinka $N, N+1$ panuje stan uogólnionego przemieszczenia q_{N+1} i q_N oraz stan uogólnionego naprężenia p_{N+1} i p_N , który reprezentowany jest przez następujące sześciowyrazowe kolumny amplitud:

$$(2.4) \quad q_N \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ N \\ \beta_2 \\ N \\ \beta_3 \\ N \\ u_1 \\ N \\ u_2 \\ N \\ u_3 \\ N \end{bmatrix}, \quad q_{N+1} \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ N+1 \\ \beta_2 \\ N+1 \\ \beta_3 \\ N+1 \\ u_1 \\ N+1 \\ u_2 \\ N+1 \\ u_3 \\ N+1 \end{bmatrix}, \quad p_N \equiv \begin{bmatrix} M_1 \\ N \\ M_2 \\ N \\ M_3 \\ N \\ P_1 \\ N \\ P_2 \\ N \\ P_3 \\ N \end{bmatrix}, \quad p_{N+1} \equiv \begin{bmatrix} M_1 \\ N+1 \\ M_2 \\ N+1 \\ M_3 \\ N+1 \\ P_1 \\ N+1 \\ P_2 \\ N+1 \\ P_3 \\ N+1 \end{bmatrix}.$$

Znając równanie osi pręta nieodkształconego i korzystając z równań różniczkowych drgań giętych, skrętnych i podłużnych, określić możemy następujące macierze o wymiarach 6×6 (por. [1 i 5]), których elementy są funkcjami częstości kołowej ω (macierze te dla przypadków prętów prostoliniowych podano w p. 5):

$T_{N+1, N}$ – dynamiczna macierz przeniesienia przemieszczeń, wyznaczona przy danym w $N+1$ jednostkowym stanie amplitud q_{N+1} przy założeniu $p_N = 0$;

$\tilde{T}_{N+1, N}$ – dynamiczna macierz przeniesienia sił, wyznaczona przy danym w $N+1$ jednostkowym stanie amplitud p_{N+1} przy założeniu $q_N = 0$;

$W_{N+1, N}$ – dynamiczna macierz sprężystości odcinka $N, N+1$ wyznaczona przy danym w N jednostkowym stanie amplitud p_N przy założeniu, że $q_{N+1} = 0$;

$\tilde{W}_{N+1, N}$ – dynamiczna macierz podatności odcinka $N+1, N$ wyznaczona przy danym w N jednostkowym stanie amplitud q_N przy założeniu, że $p_{N+1} = 0$.

Stan amplitud uogólnionych przemieszczeń i sił w punkcie $N+1$ można wyrazić przez stan uogólnionych przemieszczeń i sił w punkcie N za pomocą następujących wzorów:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} q_{N+1} &= T_{N+1, N} [\dot{q}_N - W_{N+1, N} \dot{p}_N], \\ p_{N+1} &= \tilde{T}_{N+1, N} [-\tilde{W}_{N+1, N} \dot{q}_N + \dot{p}_N], \end{aligned}$$

gdzie przez \dot{q}_N oraz \dot{p}_N oznaczono wypadkowy wektor uogólnionych przemieszczeń i sił występujący w N otrzymamy w wyniku dodania wektora oddziaływania przekrojowego w N oraz wektora oddziaływania punktu nieciągłości w N .

3. Charakterystyka punktów nieciągłości trasy

Każdy z występujących wzdłuż trasy punktów nieciągłości oddziałuje na trasę za pośrednictwem uogólnionego wektora przemieszczeń (przegub, kompensator, masa skupiona) lub uogólnionego wektorem sił (podpora podatna, podpora niepodatna, siła wymuszająca) dostarczając jednocześnie dodatkowych warunków,

w których liczba jest równa liczbie składowych wektora oddziaływania. Oznaczając przez \check{q}_N uogólniony wektor amplitud przemieszczenia dla kompensatora lub przegubu w N , przez \check{p}_N uogólniony wektor amplitud sił w podparciu w N oraz przez \hat{p}_N uogólniony wektor sił pochodzących od masy skupionej występującej w N — dla punktów tych możemy napisać następujące równanie:

a) dla podpory niepodatnej

$$(3.1) \quad \dot{\hat{p}}_N = p_N + \check{p}_N, \quad \dot{\hat{q}}_N = \check{q}_N = q_N = 0;$$

b) dla przegubu

$$(3.2) \quad \dot{\hat{q}}_N = q_N + \check{q}_N, \quad \dot{\hat{p}}_N = \check{p}_N = p_N = 0;$$

c) dla podpory sprężystej

$$(3.3) \quad \dot{\hat{p}}_N = p_N + \check{p}_N, \quad \check{q}_N = q_N = -\lambda_{NN} \check{p}_N,$$

gdzie λ_{NN} jest co najwyżej macierzą 6×6 charakteryzującą podatność podparcia w N ;

d) dla kompensatora

$$(3.4) \quad \dot{\hat{q}}_N = q_N + \check{q}_N, \quad \check{p}_N = p_N = -S_{NN} \check{q}_N,$$

gdzie S_{NN} jest macierzą 6×6 charakteryzującą sprężystość kompensatora w N ;

e) dla masy skupionej

$$(3.5) \quad \dot{\hat{p}}_N = p_N + \hat{p}_N, \quad \hat{p}_N = M_{NN} \hat{q}_N = M_{NN} q_N,$$

gdzie M_{NN} jest macierzą 6×6 , która wyprowadzona została z zasady d'Alemberta dla przestrzennego ruchu masy skupionej m_0 przyłożonej w punkcie N , a macierz podana oddzielnie na s. 491, gdzie r_i ($i = 1, 2, 3$) oznaczają składowe wektora odległości środka masy skupionej m_0 od środka ciężkości przekroju w N oraz gdzie \overline{EJ} jest porównawczą sztywnością giętną trasy, a \bar{l} długością porównawczą;

f) dla zewnętrznej siły wymuszającej

$$(3.7) \quad \dot{\hat{p}}_N = p_N + p_N^*,$$

gdzie p_N^* reprezentuje sześciowyrzową kolumnę dla zewnętrznej siły wymuszającej.

4. Równania warunkowe

Nie precyzując teraz rodzaju punktu nieciągłości występującego w punkcie N , do występujących we wzorach (2.5) oddziaływań dodajmy wszystkie wprowadzone w (3.1)–(3.7) oddziaływania punktów nieciągłości:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} q_{N+1} &= T_{N+1,N} [q_N + \check{q}_N - W_{N+1,N} (p_N + \check{p}_N + \hat{p}_N + p_N^*)], \\ p_{N+1} &= \check{T}_{N+1,N} [-\check{W}_{N+1,N} (q_N + \check{q}_N) + \check{p}_N + p_N + \hat{p}_N + p_N^*]. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{m_0 \omega^2 (r_2^2 + r_3^2) \bar{l}}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_1 r_2 \bar{l}}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_1 r_3 \bar{l}}{EJ} & 0 & -\frac{m_0 \omega^2 r_3 \bar{l}^2}{EJ} & \frac{m_0 \omega^2 r_2 \bar{l}^2}{EJ} \\
 \frac{m_0 \omega^2 r_1 r_2 \bar{l}}{EJ} & \frac{m_0 \omega^2 (r_1^2 + r_3^2) \bar{l}}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_2 r_3 \bar{l}}{EJ} & \frac{m_0 \omega^2 r_3 \bar{l}^2}{EJ} & 0 & -\frac{m_0 \omega^2 r_1 \bar{l}^2}{EJ} \\
 -\frac{m_0 \omega^2 r_1 r_3 \bar{l}}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_2 r_3 \bar{l}}{EJ} & \frac{m_0 \omega^2 (r_1^2 + r_2^2) \bar{l}}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_2 \bar{l}^2}{EJ} & \frac{m_0 \omega^2 r_1 \bar{l}^2}{EJ} & 0 \\
 0 & \frac{m_0 \omega^2 r_3 \bar{l}}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_2 \bar{l}^2}{EJ} & \frac{m_0 \omega^2 \bar{l}^3}{EJ} & 0 & 0 \\
 -\frac{m_0 \omega^2 r_3 \bar{l}^2}{EJ} & 0 & \frac{m_0 \omega^2 r_1 \bar{l}^2}{EJ} & 0 & \frac{m_0 \omega^2 \bar{l}^3}{EJ} & 0 \\
 \frac{m_0 \omega^2 r_2 \bar{l}^2}{EJ} & -\frac{m_0 \omega^2 r_1 \bar{l}^2}{EJ} & 0 & 0 & 0 & \frac{m_0 \omega^2 \bar{l}^3}{EJ}
 \end{bmatrix}$$

$$(3.6) \quad M_{NN} \equiv$$

Utwórzmy dwunastowyrazowe kolumny amplitud przemieszczenia i siły w przekroju N :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Pi_N &\equiv \begin{bmatrix} q_N \\ p_N \end{bmatrix}, & \check{\Pi}_N &\equiv \begin{bmatrix} \check{q}_N \\ \check{p}_N \end{bmatrix}, & \hat{\Pi}_N &\equiv \begin{bmatrix} \hat{q}_N \\ \hat{p}_N \end{bmatrix}, \\ \theta_{N+1} &= \begin{bmatrix} -T_{N+1,N} & W_{N+1,N} & p_N^* \\ T_{N+1,N} & & p_N^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oraz macierze o wymiarach 12×12

$$(4.3) \quad \Omega_{N+1,N} \equiv \begin{bmatrix} T_{N+1,N} & -T_{N+1,N} W_{N+1,N} \\ -\check{T}_{N+1,N} & \check{T}_{N+1,N} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M}_{NN} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{NN} & 0 \end{bmatrix}.$$

Wprowadzenie oznaczeń (4.2) i (4.3) do wzorów (4.1) daje jedno zwarte równanie macierzowe

$$(4.4) \quad \Pi_{N+1} = \Omega_{N+1,N} \Pi_N + \Omega_{N+1,N} \check{\Pi}_N + \Omega_{N+1,N} \mathfrak{M}_{NN} \hat{\Pi}_N + \theta_{N+1}.$$

Stosując M -krotnie wzór (4.4) wyrazimy amplitudy przemieszczeń i sił w dowolnym przekroju M ($M = 1, 2, 3, \dots, K$):

$$(4.5) \quad \Pi_M = \sum_{N=0}^{M-1} \Omega_{MN} \check{\Pi}_N + \sum_{N=1}^{M-1} \Omega_{MN} \mathfrak{M}_{NN} \hat{\Pi}_N + \omega_M.$$

Macierz Ω_{MN} określona jest dla wszystkich $M > N$, a prosty rachunek prowadzi do następujących wzorów:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \Omega_{MN} &= \Omega_{M,N-1} \Omega_{N-1,N}, & M > N, \\ \omega_M &= \Omega_{M,N-1} \omega_{N-1} + \theta_M, & \omega_1 = \theta_1. \end{aligned}$$

Wzór (4.5) pozwala określić amplitudy uogólnionych przemieszczeń i sił w przekroju M w zależności od tych samych wielkości występujących w przekrojach $0, 1, 2, \dots, M-1$. Ω_{MN} jest macierzą 12×12 charakteryzującą dynamiczną sztywność odcinka MN , $\check{\Pi}_N$ oznacza kolumnę dwunastowyrazową uwzględniającą wpływ wszystkich mas skupionych znajdujących się przed przekrojem M na amplitudy jego przemieszczeń i sił, ω_M kolumnę dwunastowyrazową uwzględniającą wpływ wszystkich zewnętrznych sił wymuszających znajdujących się przed przekrojem N na amplitudy jego przemieszczeń i sił.

W macierzach Ω_{MN} występujących w (4.5) zaznaczymy kolumny, które znajdują się na tych samych miejscach, na których występują niezerowe wyrazy w kolumnach $\check{\Pi}_N$. Zaznaczymy następnie wiersze, którym odpowiadają znane wielkości w kolumnie Π_M . Wyrazy macierzy Ω_{MN} znajdujące się na przecięciu zaznaczonych kolumn i wierszy tworzą nową macierz G_{mn} . Oznaczając przez ξ_n kolumny nieznanymi, niezerowymi wyrazów kolumny $\check{\Pi}_M$, przez ξ_n kolumnę nieznanymi, niezerowymi wyrazów w kolumnie $\hat{\Pi}_n$, a przez η_m kolumnę znanych wielkości w przekroju M , ze wzorów (4.5) wyodrębnimy następujące równania:

$$(4.7) \quad \eta_m = \sum_{n=0}^{m-1} G_{mn} \xi_n + \sum_{n=0}^{m-1} G_{mn} \mathfrak{M}_{nn} \xi_n + \omega_m^*, \quad m = 1, 2, \dots, k.$$

Kolumny ω_m^* składają się z wyrazów kolumn ω_M znajdujących się na tych samych miejscach, na których występują znane wielkości kolumny Π_m . Zakładając, że w skrajnych podporach trasy prętowej nie występują masy skupione oraz że żaden z omówionych punktów nieciągłości nie występuje jednocześnie, wzór (4.7) można napisać w postaci macierzowej podanej na s. 494, gdzie I jest macierzą jednostkową.

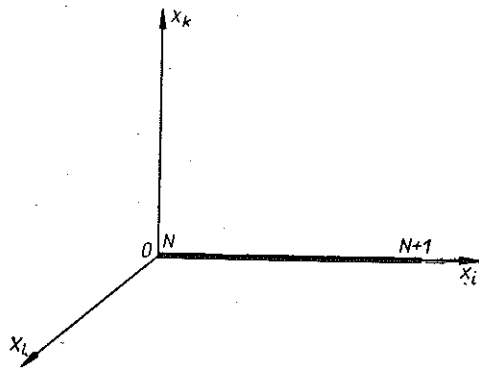
Wartości podane w nawiasach wzoru (4.8) dotyczą punktów, w których występuje masa skupiona, gdy $\mathfrak{M}_{11} = 0$ ($M_{11} = 0$) należy brać wartości bez nawiasów. W przypadku jednoczesnego występowania masy skupionej i innego rodzaju punktu nieciągłości należy rozpatrywać przypadek, gdy znajdują się one kolejno po sobie na nieskończenie krótkim odcinku $N+1, N$, dla którego macierz przeniesienia $\Omega_{N+1, N}$ jest macierzą jednostkową dwunastego stopnia.

Jeżeli na danej trasie prętowej występują zewnętrzne siły wymuszające ($p_N^* \neq 0$), to częstość drgań jest znana i równa częstości drgań siły wymuszającej. Obliczenia dynamiczne sprowadzają się wówczas do wykonania wykresów amplitud dynamicznych sił tnących i normalnych oraz momentów gnących. W tym celu należy odwrócić macierz główną układu równań (4.8), a następnie z zależności odwrotnej do (4.8) wyznaczyć nieznanne wielkości ξ_n . Wstawiając uzyskane tą drogą ξ_n do równań (4.7) znajdziemy amplitudy wielkości przypadkowych dla każdego z odcinków. W przypadku ($p_N^* = 0$) układ równań (4.8) jest układem jednorodnym, a zerowanie się wyznacznika tego układu jest warunkiem dla poszukiwania kolejnych częstości drgań własnych.

Jak łatwo sprawdzić, rząd wyznacznika układu równań jest równy sumie liczby niewiadomych występujących w pośrednich punktach podparcia liczby stopni swobody mas skupionych oraz sześciu parametrów początkowych trasy bez względu na sposób jej podparcia w punkcie O .

5. Macierze przeniesienia w przypadku tras prostoliniowych

Wyznamy teraz macierz przeniesienia (zdefiniowaną w p. 2) w przypadku, kiedy odcinki trasy prętowej są prostoliniowe (rys. 2).



Rys. 2

Dla uzyskania ogólności rozważań osie układu oznaczmy x_i, x_k, x_l ; zmiana kołowa indeksów dotyczyć będzie więc wszystkich możliwych przypadków położenia prętu w przestrzeni równoległych do osi odniesienia. Na odcinku trasy $N+1, N$ mogą pojawiać się drgania giętne w płaszczyźnie x_l lub w płaszczyźnie x_k oraz drgania skrętne i podłużne; rozpatrzmy je kolejno.

Dla drgań giętnych w płaszczyźnie x_l równanie różniczkowe ma postać

$$(5.1) \quad EJ_l \frac{\partial^4 \bar{u}_k(x_l, t)}{\partial x_l^4} + \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_k(x_l, t)}{\partial t^2} = 0,$$

G_{10}	S_{11} λ_{11} $0, (-I)$	0	0	\cdot	0	ξ_0	$-\omega_1^*$
G_{20}	G_{21} $(G_{21} \mathfrak{M}_{11})$	S_{22} λ_{22} $0, (-I)$	0	\cdot	0	$\xi_1(\xi_1)$	$-\omega_2^*$
G_{30}	G_{31} $(G_{31} \mathfrak{M}_{11})$	G_{32} $(G_{32} \mathfrak{M}_{22})$	S_{33} λ_{33} $0, (-I)$	\cdot	0	$\xi_2(\xi_2)$	$-\omega_3^*$
$G_{k-1,0}$	$G_{k-1,1}$ $(G_{k-1,1} \mathfrak{M}_{11})$	$G_{k-1,2}$ $(G_{k-1,2} \mathfrak{M}_{22})$	$G_{k-1,3}$ $(G_{k-1,3} \mathfrak{M}_{33})$	\cdot	$S_{k-1, k-1}$ $\lambda_{k-1, k-1}$ $0, (-I)$	\cdot	\cdot
G_{k0}	$G_{k,1}$ $(G_{k,1} \mathfrak{M}_{11})$	$G_{k,2}$ $(G_{k,2} \mathfrak{M}_{22})$	$G_{k,3}$ $(G_{k,3} \mathfrak{M}_{33})$	\cdot	$G_{k, k-1}$ $(G_{k, k-1} \mathfrak{M}_{k-1, k-1})$	$\xi_{k-1}(\xi_{k-1})$	$-\omega_k^*$

(4.8)

gdzie ρ oznacza masę przypadającą na jednostkę długości, a EJ_l sztywność pręta na zginanie.

W przypadku gdy spełnione są wzory (2.1), (2.2) i (2.3), równanie (5.1) po wprowadzeniu oznaczenia

$$(5.2) \quad m_l^4 = \frac{l^4 \rho \omega^2}{EJ_l}$$

przechodzi w zwyczajne równanie różniczkowe czwartego stopnia

$$(5.3) \quad u_k^{IV}(x_i) - \left(\frac{m_l}{l}\right)^4 u_k(x_i) = 0.$$

Obroty oraz siły wewnętrzne można wyrazić przez przemieszczenia w sposób następujący:

$$(5.4) \quad \beta_l(x_i) = \frac{du_k(x_i)}{dx_i}, \quad P_k(x_i) = EJ_l \frac{d^3 u_k(x_i)}{dx_i^3},$$

$$M_l(x_i) = -EJ_l \frac{d^2 u_k(x_i)}{dx_i^2}.$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (5.3) przedstawimy w postaci:

$$(5.5) \quad u_k(x_i) = C_1 \bar{S}(m_l \mu_i) + C_2 \bar{T}(m_l \mu_i) + C_3 \bar{U}(m_l \mu_i) + C_4 \bar{V}(m_l \mu_i),$$

gdzie $\bar{S}(\eta)$, $\bar{T}(\eta)$, $\bar{U}(\eta)$ i $\bar{V}(\eta)$ są funkcjami Kryłowa oraz gdzie $\mu_i = x_i/l$.

Wykonując różniczkowania (5.4) równania (5.5) otrzymamy pozostałe wielkości wewnętrzne:

$$(5.6) \quad \beta_l(x_i) = \frac{m_l}{l} [C_1 \bar{V}(m_l \mu_i) + C_2 \bar{S}(m_l \mu_i) + C_3 \bar{T}(m_l \mu_i) + C_4 \bar{U}(m_l \mu_i)],$$

$$M_l(x_i) = -EJ_l \frac{m_l^2}{l^2} [C_1 \bar{U}(m_l \mu_i) + C_2 \bar{V}(m_l \mu_i) + C_3 \bar{S}(m_l \mu_i) + C_4 \bar{T}(m_l \mu_i)],$$

$$P_k(x_i) = EJ_l \frac{m_l^3}{l^3} [C_1 \bar{T}(m_l \mu_i) + C_2 \bar{U}(m_l \mu_i) + C_3 \bar{V}(m_l \mu_i) + C_4 \bar{S}(m_l \mu_i)].$$

Dla drgań podłużnych pręta przedstawionego na rys. 2 mamy równanie różniczkowe

$$(5.7) \quad EA_i \frac{d^2 u_i(x_i)}{dx_i^2} + \rho \omega^2 u_i(x_i) = 0$$

z warunkiem wiążącym przemieszczenia z siłami w postaci

$$(5.8) \quad P_i(x_i) = -EA_i \frac{du_i(x_i)}{dx_i}.$$

Rozwiązując równanie (5.7) przy uwzględnieniu (5.8) i wprowadzeniu oznaczenia

$$(5.9) \quad n_i^2 = \frac{l^2 \rho \omega^2}{EA_i}$$

otrzymamy

$$(5.10) \quad \begin{aligned} u_i(x_i) &= C_5 \cos(n_i \mu_i) + C_6 \sin(n_i \mu_i), \\ P_i(x_i) &= C_5 EA_i \frac{n_i}{l} \sin(n_i \mu_i) - C_6 EA_i \frac{n_i}{l} \cos(n_i \mu_i). \end{aligned}$$

Ostatnimi z możliwych drgań pręta $N+1$, N (rys. 2) są drgania skrętne opisane następującym równaniem różniczkowym:

$$(5.11) \quad GC_i \frac{d^2 \beta_i(x_i)}{dx_i^2} = J\omega^2 \beta_i(x_i) = 0,$$

gdzie GC_i oznacza sztywność pręta na skręcanie wokół osi x_i , a J jest biegunowym momentem bezwzględności masy przypadającym na jednostkę długości pręta. Wprowadzając oznaczenie

$$(5.12) \quad k_i^2 = \frac{Jl^2 \omega^2}{GC_i}$$

oraz wykorzystując zależność między momentem a kątem skręcania

$$(5.13) \quad M_i(x_i) = -GC_i \frac{d\beta_i(x_i)}{dx_i},$$

otrzymamy rozwiązanie równania (5.11):

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \beta_i(x_i) &= C_7 \cos(k_i \mu_i) + C_8 \sin(k_i \mu_i), \\ M_i(x_i) &= C_7 GC_i \frac{k_i}{l} \sin(k_i \mu_i) - C_8 GC_i \frac{k_i}{l} \cos(k_i \mu_i). \end{aligned}$$

Warunki brzegowe podane w definicji macierzy przeniesienia przemieszczeń $T_{N+1, N}$

$$(5.15) \quad q(l) = q_{N+1}, \quad p(0) = 0$$

napiżemy teraz po wprowadzeniu wspólnego oznaczenia dla wszystkich wielkości wewnętrznych w postaci

$$(5.16) \quad \begin{aligned} u_k(l) &= u_k, & u_i(l) &= u_i, \\ \bar{l}\beta_i(l) &= \beta_i, & \bar{l}\beta_i(l) &= \beta_i, \\ \frac{\bar{l}^2}{EJ} M_i(0) &= M_i = 0, & \frac{\bar{l}^2}{EJ} M_i(0) &= M_i = 0, \\ \frac{\bar{l}^2}{EJ} P_i(0) &= P_i = 0, & \frac{\bar{l}^3}{EJ} P_k(0) &= P_k = 0. \end{aligned}$$

Te warunki pozwalają wyznaczyć wszystkie stałe występujące w równaniach (5.5), (5.6), (5.10) i (5.14):

$$(5.17) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{S(m_i) u_k - bT(m_i) \beta_i}{S^2(m_i) - m_i^4 T(m_i) V(m_i)}, & C_5 &= \frac{1}{\cos n_i} u_i, \\ C_2 &= \frac{m_i^2 V(m_i) u_k - \frac{b}{m_i} S(m_i) \beta_i}{m_i^4 T(m_i) V(m_i) - S^2(m_i)}, & C_6 &= 0, \\ C_3 &= 0, & C_7 &= \frac{1}{l \cos k_i} \beta_i, \\ C_4 &= 0, & C_8 &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenie $b = l/l$ oraz funkcje

$$(5.18) \quad \begin{aligned} S(m) &= \bar{S}(m) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} m + \cos m) = 1 + \frac{m^4}{4!} + \frac{m^8}{8!} + \dots, \\ T(m) &= \frac{1}{m} \bar{T}(m) = \frac{1}{2m} (\operatorname{sh} m + \sin m) = 1 + \frac{m^4}{5!} + \frac{m^8}{9!} + \dots, \\ U(m) &= \frac{1}{m^2} \bar{U}(m) = \frac{1}{2m^2} (\operatorname{ch} m - \cos m) = \frac{1}{2} + \frac{m^4}{6} + \frac{m^8}{10!} + \dots, \\ V(m) &= \frac{1}{m^3} \bar{V}(m) = \frac{1}{2m^3} (\operatorname{sh} m - \sin m) = \frac{1}{6} + \frac{m^4}{7!} + \frac{m^6}{11!} + \dots \end{aligned}$$

Wstawiając stałe (5.17) do równań (5.5), (5.6), (5.10) i (5.14) otrzymamy następujące zależności na przemieszczenia:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} u_k &= S(m_i) u_k + bT(m_i) \beta_i, \\ \beta_i &= \frac{m_i^4}{b} V(m_i) u_k + S(m_i) \beta_i, \\ u_i &= \cos n_i u_i, & \beta_i &= \cos k_i \beta_i. \end{aligned}$$

Drgania gięte w płaszczyźnie x_k dają również dwa wzory na przemieszczenia:

$$(5.20) \quad u_i = S(m_k) u_i - bT(m_k) \beta_k, \quad \beta_k = -\frac{m_k^4}{b} V(m_k) u_i + S(m_k) \beta_k.$$

Wzory (5.19) i (5.20) pozwalają utworzyć dynamiczną macierz przeniesienia przemieszczeń w postaci

$$(5.21) \quad \begin{bmatrix} \cos k_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(m_k) & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_k^4}{b} V(m_k) \\ 0 & 0 & S(m_l) & 0 & \frac{m_l^4}{b} V(m_l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bT(m_l) & 0 & S(m_l) & 0 \\ 0 & -bT(m_k) & 0 & 0 & 0 & S(m_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_k \\ \beta_l \\ u_i \\ u_k \\ u_l \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_k \\ \beta_l \\ u_i \\ u_k \\ u_l \end{bmatrix}_N$$

Wykorzystując warunki brzegowe wynikające z definicji macierzy przeniesienia sił z równań (5.5), (5.6), (5.10) i (5.14) otrzymamy stałe $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_8$, a te wstawione ponownie do tych równań dadzą nam zależności pomiędzy siłami w punktach $N+1$ i N w postaci

$$(5.22) \quad \begin{bmatrix} \cos k_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(m_k) & 0 & 0 & 0 & bT(m_k) \\ 0 & 0 & S(m_l) & 0 & -bT(m_l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_l^4}{b} V(m_l) & 0 & S(m_l) & 0 \\ 0 & \frac{m_k^4}{b} V(m_k) & 0 & 0 & 0 & S(m_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_k \\ M_l \\ P_i \\ P_k \\ P_l \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} M_i \\ M_k \\ M_l \\ P_i \\ P_k \\ P_l \end{bmatrix}_N$$

Ten sam sposób rozumowania prowadzi do macierzy sprężystości $W_{N+1, N}$ oraz macierzy podatności $\tilde{W}_{N+1, N}$: (5.23) i (5.24). Podajemy je na s. 499.

Wprowadzono tu oznaczenia

$$(5.25) \quad a_i \equiv \frac{EJ_i}{EJ}, \quad c_i \equiv \frac{EA_i}{EJ}, \quad d_i \equiv \frac{GC_i}{EJ}$$

oraz poniżej zdefiniowane tzw. funkcje Pragera

$$a''(m) = -m \frac{\operatorname{ch} m \sin m - \operatorname{sh} m \cos m}{1 + \operatorname{ch} m \cos m},$$

$$\theta''(m) = -m^2 \frac{\operatorname{sh} m \sin m}{1 + \operatorname{ch} m \cos m},$$

$$\gamma''(m) = -m^3 \frac{\operatorname{ch} m \sin m + \operatorname{sh} m \cos m}{1 + \operatorname{ch} m \cos m}$$

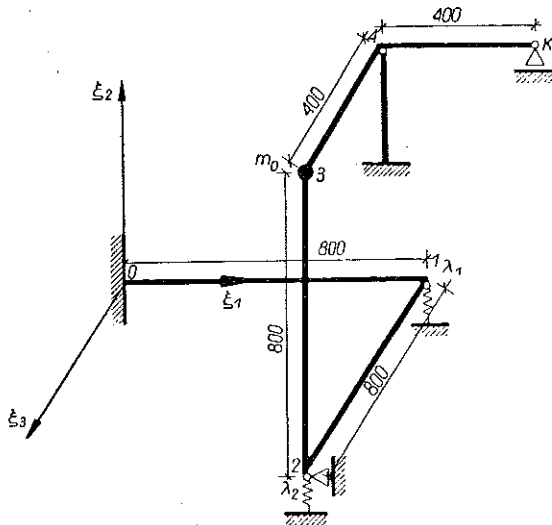
stabelaryzowane np. w pracy [6].

W przypadku gdy kierunek poruszania wzdłuż osi pręta jest przeciwny do zwrotu osi odniesienia, należy w macierzach przeniesienia przemieszczeń $T_{N+1,N}$ oraz w macierzach przeniesienia sił $\tilde{T}_{N+1,N}$ zmienić znak wyrazów pozadiagonalnych na przeciwny; pozostałe dwie macierze podatności i sprężystości są macierzami symetrycznymi i nie zależą od kierunku poruszania się wzdłuż osi pręta. W przypadkach granicznych, gdy $\varrho = 0$ (pręt jest nieważki) lub $\omega = 0$ (przypadek statyczny), macierze przeniesienia przemieszczeń i sił sprowadzają się do macierzy statycznych podanych np. w [1], macierz sprężystości $T_{N+1,N}$ przechodzi w statyczną macierz wpływu (por. [3]), a macierz podatności $\tilde{W}_{N+1,N}$ jest macierzą zerową.

Na zakończenie rozważań nad wyprowadzonymi powyżej macierzami utwórzmy macierz 12×12 zdefiniowaną przez wzór (4.3). Wykonując mnożenia macierzowe wg tego wzoru dochodzimy do macierzy przedstawionej w tablicy 1, którą w pracy [1] otrzymano na drodze rozwiązania równania różniczkowego drgań pręta w metodzie parametrów początkowych.

6. Przykład liczbowy

Dla zobrazowania przedstawionej powyższej metody przeprowadzimy obliczenia, w których poszukiwać będziemy częstości drgań własnych rurociągu o schemacie przedstawionym na rys. 3.



Rys. 3

Przekrój rurociągu całej trasy jest stały, rurociąg transportuje gaz ziemny, a z zewnątrz jest ocieplony otuliną izolacyjną z waty szklanej grubości 50 mm. Średnica zewnętrzna rurociągu $D = 426$ mm, wewnętrzna $d = 400$ mm. Dane geometryczne i dynamiczne rurociągu są następujące:

$$EJ = \overline{EJ} = 7562,0 \text{ Tm}^2, \quad GC = 1,3 EJ, \quad A = 0,0169 \text{ m}^2,$$

$$\rho = 2,73 \cdot 10^{-2} \frac{\text{T sek}^2}{\text{m}^2}, \quad \frac{EJ}{EA} = 2,13 \cdot 10^{-2} \text{m}^2,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{EJ}{EJ} = 1, \quad C_i = \frac{EA_i}{EJ} = 46,9 \text{m}^{-2}, \quad d_i = \frac{GC_i}{EJ} = 1,3,$$

$$\bar{l} = 8,0 \text{m}, \quad J = 6,23 \cdot 10^{-4} \text{T sek}^2, \quad m_0 = 0,10 \frac{\text{T sek}^2}{\text{m}}.$$

Podatności podparć wynoszą

$$\lambda_1 = 0,1667 \frac{\text{m}}{\text{T}}, \quad \lambda_2 = 0,1560 \frac{\text{m}}{\text{T}}.$$

W punkcie czwartym trasy rurociągu występuje podpora w postaci słupa żelbetowego:

$$h = 3,0 \text{m}, \quad F = 0,04 \text{m}^2, \quad R = 170 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2},$$

$$E_b = 1,6 \cdot 10^6 \frac{\text{T}}{\text{m}^2}, \quad J_{s\bar{l}} = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{m}^4.$$

Jako parametr porównawczy zależny od częstości dla całej trasy przyjęto

$$(6.1) \quad m = 8 \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{EJ}}.$$

Całość trasy podzielono przekrojami 1, 2, 3, 4, na odcinki 1-0, 2-1, 3-2, 4-3, K-4. Przyjmując $m = 0,5$ na podstawie tablicy 1 zestawiono macierze przeniesienia $\Omega_{10}, \Omega_{21}, \Omega_{32}, \Omega_{43}$ i Ω_{k4} (tablice 2-6). Korzystając z zależności rekurencyjnej (4.6) wyliczono:

$$\Omega_{20} = \Omega_{21} \Omega_{10}, \quad \Omega_{31} = \Omega_{32} \Omega_{21}, \quad \Omega_{30} = \Omega_{31} \Omega_{10},$$

$$\Omega_{42} = \Omega_{43} \Omega_{32}, \quad \Omega_{41} = \Omega_{42} \Omega_{21}, \quad \Omega_{40} = \Omega_{41} \Omega_{10},$$

$$\Omega_{k3} = \Omega_{k4} \Omega_{43}, \quad \Omega_{k2} = \Omega_{k3} \Omega_{32}, \quad \Omega_{k1} = \Omega_{k2} \Omega_{21},$$

$$\Omega_{k0} = \Omega_{k1} \Omega_{10}$$

i zestawiono w tablicach 7-16. Macierz M_{33} dla $r = 0$ redukuje się do postaci

$$(6.2) \quad M_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_0 m^4}{\bar{l} \rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_0 m^4}{\bar{l} \rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_0 m^4}{\bar{l} \rho} \end{bmatrix}.$$

W tabelicy 17 podano macierz \mathfrak{M}_{33} a w tabelicach 18 i 19 odpowiednio jej iloczyn $\Omega_{43} \mathfrak{M}_{33}$ i $\Omega_{k3} \mathfrak{M}_{33}$. Uwzględniając warunki brzegowe poszczególnych odcinków trasy według schematu opisanego w p. 4, w tabelicach 2–16 oraz 18 i 19 zaznaczono strzałkami odpowiednie wiersze i kolumny, a wyrazy leżące na ich przecięciu wchodziły w skład macierzy zbiorczej sporządzonej na podstawie (4.8) i przedstawionej w tabelicy 20. Równania zbiorcze trasy prętowej mają w tym przypadku następującą budowę:

$$(6.3) \quad \begin{bmatrix} G_{10} & \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ G_{20} & G_{21} & \lambda_{22} & 0 & 0 \\ G_{30} & G_{31} & G_{32} & -I & 0 \\ G_{40} & G_{41} & G_{42} & G_{43} \mathfrak{M}_{33} & 0 \\ G_{k0} & G_{k1} & G_{k2} & G_{k3} \mathfrak{M}_{33} & G_{k4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Układ równań (6.3) jest układem jednorodnym, a więc warunkiem, żeby trasa prętowa znajdowała się w fazie drgań ustalonych, jest, aby wyznacznik główny tego układu był równy zero. Wartość wyznacznika macierzy zbiorczej z tabelicy 20 wynosiła $f(0,5) = -1,03452$, co oznacza, że przyjęta przez nas częstość ω jest różna od częstości własnej.

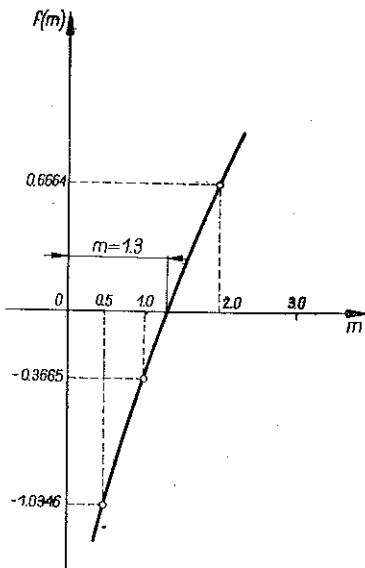
Całość obliczeń powtórzono dla $m = 1,0$ oraz $m = 2,0$ i otrzymano następujące wartości:

$$f(1,0) = -0,36649, \quad f(2,0) = 0,66644.$$

Wyniki tych obliczeń przedstawiono na rys. 4 i odczytano, że pierwsza wartość krytyczna m wynosi 1,30; stąd wyznaczono

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{m_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}} = \left(\frac{1,3}{8}\right)^2 \sqrt{\frac{7562}{2,73 \cdot 10^{-2}}} = \\ &= 13,9 \text{ sek.}^{-1}, \end{aligned}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 2,21 \text{ Hz}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 0,452 \text{ sek.}$$



Rys. 4

Dodatkowo przeprowadzono obliczenia dla tego samego schematu statycznego przy założeniu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$ (podparcia niepodatne) i uzyskano wyraźny wzrost częstości drgań własnych:

$$\bar{\omega} = 102,0 \text{ sek.}^{-1}, \quad \bar{f} = 16,18 \text{ Hz}, \quad \bar{T} = 0,0616 \text{ sek.}$$

Całość obliczeń zaprogramowano i obliczono na maszynie cyfrowej ZAM-2.

Tablica 1
 $\Omega_{N+1,N}$

$\cos k_t$	0	0	0	0	$-\frac{b}{a_t} \frac{1}{k_t} \sin k_t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$S(m_k)$	0	0	0	$-\frac{m_k^4}{b} V(m_k)$	0	$-\frac{b}{a_k} T(m_k)$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{b^2}{a_k} U(m_k)$
0	0	0	$S(m_t)$	0	$\frac{m_t^4}{b} V(m_t)$	0	0	$\frac{b}{a_t} T(m_t)$	0	0	$\frac{b^2}{a_t} U(m_t)$	0	0	0
0	0	0	0	$\cos n_t$	0	0	0	0	$-\frac{b}{c_t l^2 n_t} \sin n_t$	0	0	0	0	0
0	0	0	$bT(m_t)$	0	$S(m_t)$	0	0	$-\frac{b^2}{a_t}$	0	0	$\frac{b^3}{a_t} V(m_t)$	0	0	0
0	$-bT(m_k)$	0	0	0	0	$S(m_k)$	0	0	0	$\frac{b^2}{a_k} U(m_k)$	0	0	0	$\frac{b^3}{a_k} V(m_k)$
$\frac{d_t k_t}{b} \sin k_t$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cos k_t$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{a_k m_k^6}{b} V(m_k)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{a_k m_k^4}{b^2} U(m_k)$	0	$S(m_k)$	0	0	0	$bT(m_k)$
0	0	0	$-\frac{a_t m_t^4}{b} V(m_t)$	0	$-\frac{a_t m_t^4}{b^2} U(m_t)$	0	0	0	0	0	$S(m_t)$	0	$-bT(m_t)$	0
0	0	0	0	$\frac{c_t n_t l^2}{b} \sin n_t$	0	0	0	0	0	0	0	$\cos n_t$	0	0
0	0	0	$\frac{a_t m_t^4}{b^2} U(m_t)$	0	$\frac{a_t m_t^4}{b^3} T(m_t)$	0	0	0	0	0	0	0	$S(m_t)$	0
0	$-\frac{a_k m_k^4}{b^2} U(m_k)$	0	0	0	0	0	$\frac{a_k m_k^4}{b^3} T(m_k)$	0	0	$\frac{m_k^4}{b} V(m_k)$	0	0	0	$S(m_k)$

Tablica 4

Ω_{32}

1,0026	0,0	0,0	0,0104	-1,0005	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5008	↓
0,0	1,0000	0,0	0,0	0,0	-0,7692	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	↓
0,0	0,0	1,0026	-0,0104	0,0	0,0	-1,0005	-0,5001	0,0	0,0	0,0	↓
0,0	0,0	-1,0005	1,0026	0,0	0,0	0,5001	0,1667	0,0	0,0	0,0	↓
0,0	0,0	0,0	0,0	1,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,0003	0,0	↓
1,0005	0,0	0,0	1,0026	-0,5001	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1667	↓
-0,0104	0,0	0,0	-0,0312	1,0026	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,0005	↑
0,0	0,0001	0,0	0,0	0,0	1,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	0,0	-0,0104	0,0312	0,0	0,0	1,0026	1,0005	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	0,0	-0,0312	0,0625	0,0	0,0	0,0104	1,0026	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	0,0	0,0	0,0588	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0000	0,0	0,0	↑
0,0312	0,0	0,0	0,0625	-0,0104	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0026	↑

Tablica 5

Ω_{43}

-1,0002	0,0	0,0	0,0013	-0,5000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1250	0,0	↑
0,0	1,0002	0,0	0,0	0,0	-0,5000	0,0	-0,1250	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	0,0	1,0000	0,0	0,0	0,0	-0,3848	0,0	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	-0,5000	0,0	0,0	0,0	0,1250	0,0	0,0209	0,0	0,0	0,0	↑
0,5000	0,0	0,0	1,0002	-0,1250	0,0	0,0	0,0	0,0209	0,0	0,0	↑
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,0002	↑
-0,0013	0,0	0,0	-0,0078	1,0002	0,0	0,0	0,0	-0,5000	0,0	0,0	↑
0,0	-0,0013	0,0	0,0078	0,0	1,0002	0,0	0,5000	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	↑
0,0	-0,0078	0,0	0,0313	0,0	0,0013	0,0	1,0002	0,0	1,0002	0,0	↑
0,0078	0,0	0,0	0,0	-0,0013	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0002	0,0	↑
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0000	↑

Tablica 8

Ω_{31}

1,0133	0,0	0,0	-0,0417	0,0398	-2,0039	0,0	0,0	0,0	-1,5013	0,5001	↓
0,0	1,0106	0,0	0,0344	0,0	0,0	-1,7717	0,0	1,2697	0,0	1,2697	0,0
0,0	-0,0260	1,0026	-0,0417	0,0	0,0	0,0104	-1,7717	-0,5031	0,0	0,0	0,0
0,0	1,0083	-1,0005	1,0156	0,0	0,0	-0,5031	1,2697	0,3343	0,0	0,0	0,0
-1,0005	0,0	0,0	1,0026	0,0	0,5001	0,0	0,0	0,0	0,1664	0,0	0,0
1,0089	0,0	0,0	-0,0260	1,0124	-1,5024	0,0	0,0	0,0	-1,0007	0,1664	0,0
-0,0209	0,0	0,0	0,0314	-0,0900	+1,0156	0,0	0,0	0,0	1,0083	-1,0005	0,0
0,0	-0,0104	0,0	-0,0312	0,0	0,0	1,0026	0,0	-1,0005	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0625	-0,0104	0,0939	0,0	0,0	-0,0260	1,0106	1,0083	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0939	-0,0312	0,1254	0,0	0,0	-0,0417	0,0344	1,0156	0,0	0,0	0,0
-0,0900	0,0	0,0	0,1214	0,0	0,0398	0,0	0,0	0,0	1,0124	0,0	0,0
0,0314	0,0	0,0	-0,0007	0,1214	-0,0417	0,0	0,0	0,0	-0,0260	1,0026	1,0026

Tablica 9

Ω_{30}

1,0132	-0,0554	-0,0886	-0,1357	0,0712	-2,7833	0,0251	0,0365	0,0	-1,5121	0,5080	↓
0,0	1,0316	0,0	0,1090	-0,0659	0,0	-2,7874	0,0	1,2697	0,0	-2,2780	0,0
0,0	-0,0262	1,0236	-0,0713	0,0068	0,0	0,0365	-2,7794	-0,5031	2,2740	0,0234	0,0
0,0	1,0162	-1,0163	1,0352	-0,0501	0,0	1,5133	2,2740	0,3340	-1,7707	-1,0077	0,0
-1,0005	0,0	1,0083	0,0	1,0156	1,2697	0,0	-0,5031	0,0	0,3340	0,0	0,0
1,0083	-1,0181	-0,0573	0,0	-0,0887	-2,2780	0,5080	0,2350	0,0	-1,0077	0,3356	0,0
-0,0208	0,1213	0,0629	0,0	0,0945	1,0316	-0,0555	-0,0262	0,0	1,0162	-1,0181	0,0
0,0	-0,0208	0,0	-0,0900	0,0314	0,0	1,0155	0,0	-1,0005	0,0	1,0083	0,0
0,0	0,0630	-0,0209	0,1531	-0,0317	0,0	-0,0886	1,0236	1,0083	-1,0163	-0,0573	0,0
0,0	0,0946	-0,0317	0,1850	-0,0014	0,0	-0,1358	0,0657	1,0156	-0,0500	-0,0887	0,0
-0,0900	0,0	0,1531	0,0	0,1850	0,1090	0,0	-0,0713	0,0	1,0353	0,0	0,0
0,0314	-0,1528	-0,0015	0,0	-0,0023	-0,0658	0,0712	0,0006	0,0	-0,0262	1,0254	0,0

Tablica 10

Ω_{42}												
1,0071	0,0	0,0	0,0087	0,0261	-1,5034	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1250	1,0012
0,0	1,0001	0,0052	0,0	0,0	0,0	-1,2693	-0,0020	-0,1255	-0,0020	-0,1255	0,0	0,0
0,0	0,0	1,0066	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,3861	-0,8849	-1,3861	-0,8849	0,0	0,0
0,0	-0,5000	-1,0013	0,0	0,0	0,0	0,5096	0,5004	0,1877	0,5004	0,1877	0,0	0,0
0,5015	0,0	0,0	1,0014	0,0091	-0,6256	-0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0205	0,3751
1,0005	0,0	0,0	0,0	1,0026	-0,5001	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1666
-0,0117	0,0	0,0	-0,0372	-0,0312	1,0041	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,5000	-1,0013
0,0	-0,0013	-0,0234	0,0	0,0	0,0	1,0012	0,0091	0,5026	0,0091	0,5026	0,0	0,0
0,0	0,0	-0,0104	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0026	1,0005	1,0026	1,0005	0,0	0,0
0,0	-0,0078	-0,0625	0,0	0,0	0,0	0,0073	0,0260	1,0080	0,0260	1,0080	0,0	0,0
0,0078	0,0	0,0	0,0900	0,0001	-0,0091	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0002	0,0052
0,0606	0,0	0,0	0,0	0,0920	-0,0251	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0075

Tablica 11

Ω_{41}												
1,0128	0,0	0,0	-0,0410	0,0849	-2,5092	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,8811	1,0012
0,0	1,0029	0,0052	+0,0	0,0	0,0	-2,2674	-0,0060	1,6427	-0,0060	1,6427	0,0	0,0
0,0	-0,0501	1,0066	+0,0	0,0	0,0	0,0204	-2,1604	-0,8910	-2,1604	-0,8910	0,0	0,0
0,0	0,5038	-1,0013	0,0	0,0	0,0	0,5071	1,2706	-0,4044	1,2706	-0,4044	0,0	0,0
-0,4933	0,0	0,0	0,9805	0,0312	-0,6279	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,6891	0,3751
1,0083	0,0	0,0	-0,0260	1,0124	-1,6024	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,0007	0,1662
0,0306	0,0	0,0	-0,0371	-0,0901	0,9946	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5030	-1,0013
0,0	0,0431	-0,0234	+0,0	0,0	0,0	0,9802	0,0271	-0,4919	0,0271	-0,4919	0,0	0,0
0,0	0,0625	-0,0104	0,0	0,0	0,0	-0,0260	1,0106	1,0083	1,0106	1,0083	0,0	0,0
0,0	0,1175	-0,0625	0,0	0,0	0,0	-0,0423	0,0741	1,0150	0,0741	1,0150	0,0	0,0
-0,1133	0,0	0,0	0,1524	0,0004	0,0384	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0047	0,0052
-0,0611	0,0	0,0	-0,014	0,1512	-0,0858	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,0555	1,0074

Tablica 12

Ω_{40}

1,0127	-0,1162	-0,0997	0,0	0,0	-0,1587	0,1477	-3,2882	0,0529	0,0401	0,0	-1,8918	1,0179
0,0	1,0291	0,0053	0,1295	0,0002	-0,0813	0,0	0,0	-3,2767	-0,0112	1,6427	0,0086	-2,7701
0,0	-0,0504	1,0316	-0,1302	0,0779	0,0012	0,0	0,0	0,0706	-3,1731	-0,8909	2,6649	0,0455
0,0	0,4999	-1,0171	0,9735	-0,0501	0,0106	0,0	0,0	0,0043	2,2757	-0,4047	-1,7720	0,2554
-0,4933	-0,0429	0,9595	0,0	0,9400	0,0547	0,0	-0,2485	0,0195	-0,4832	0,0	-0,5275	0,3813
1,0083	-1,0181	-0,0573	0,0	-0,0887	1,0254	0,0	-2,2780	0,5080	0,0235	0,0	-1,0077	0,3354
0,0306	0,1214	-0,0214	0,0	-0,0057	-0,1529	0,0	0,9710	-0,0555	0,0133	0,0	0,4981	-1,0189
0,0	0,0331	-0,0238	0,0105	-0,0011	0,0302	0,0	0,0	0,9396	0,0506	-0,4919	-0,0388	0,9592
0,0	0,0630	-0,0209	0,1531	-0,0317	-0,0015	0,0	0,0	-0,0886	1,0236	1,0083	-1,0163	-0,0573
0,0	0,1183	-0,0634	0,2164	-0,0030	-0,0026	0,0	0,0	-0,1600	0,1368	1,0149	-0,1054	-0,1011
-0,1133	-0,0006	0,1839	0,0	0,2156	0,0008	0,0	0,1256	0,0002	-0,0867	0,0	1,0327	0,0053
0,0611	-0,1827	-0,0031	0,0	-0,0049	0,2145	0,0	-0,1328	0,0861	0,0013	0,0	-0,0558	1,0353

Tablica 13

Ω_{83}

1,0021	0,0	0,0	0,0	0,0043	0,0	-0,8847	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3173	0,0
0,0	1,0010	0,0	-0,0052	0,0	-0,0050	0,0	-1,0002	0,0	0,0	-0,3750	0,0	-0,1250
0,0016	0,0	1,0002	0,0	0,0052	0,0	-0,0003	0,0	0,8847	0,0	0,0	0,1251	0,0
0,0	-0,5000	0,0	1,0002	0,0	0,0	0,0	0,1250	0,00	0,0207	0,0	0,0	0,0
0,5002	0,0	0,5000	0,0	1,0009	0,0	-0,1251	0,0	-0,3173	0,0	0,0	0,0417	0,0
0,0	-0,5002	0,0	0,0016	0,0	1,0008	0,0	0,0	0,3750	0,0	0,1250	0,0	0,0207
-0,0013	0,0	0,0	0,0	-0,0078	0,0	1,0002	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,5000	0,0
0,0	-0,0026	0,0	0,0078	0,0	0,0225	0,0	0,0	1,0010	0,0	0,5002	0,0	0,5000
-0,0078	0,0	-0,0013	0,0	-0,0234	0,0	0,0016	0,0	0,0	1,0007	0,0	-0,5002	0,0
0,0	-0,0225	0,0	0,0606	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0050	0,0	1,0008	0,0	0,0
0,0234	0,0	0,0078	0,0	0,0625	0,0	-0,0052	0,0	0,0	-0,0043	0,0	1,0009	0,0
0,0	-0,0078	0,0	0,0	0,0	0,0606	0,0	0,0	0,0052	0,0	0,0016	0,0	1,0002

Tablica 14

Ω_{k2}											
1,0116	0,0	0,0	0,0	0,0230	0,0381	-1,8896	0,0	0,0	0,0	0,3173	1,3863
-0,0089	1,0009	0,0169	-0,0287	-0,0	-0,0128	0,0038	-1,7701	-0,0066	-0,3769	0,0	-0,1262
0,0016	0,0	1,0120	-0,0380	0,0126	0,0	-0,0020	0,0	-1,8877	-1,3853	0,1251	0,0011
0,0	-0,5000	-1,0013	1,0041	0,0	0,0	0,0	0,5096	0,5004	0,1875	0,0	0,0
0,5017	0,0	0,5046	-0,0151	1,0034	0,0091	-0,6259	0,0	-0,8184	-0,5675	0,0414	0,3753
1,0019	-0,5002	-0,0056	0,0095	0,0	1,0047	-0,5007	0,7598	0,0021	0,1256	0,0	0,1876
-0,0117	0,0	0,0	0,0	-0,0372	-0,0312	1,0041	0,0	0,0	0,0	-0,5000	-1,0013
0,0381	-0,0026	-0,0234	0,0391	0,0	0,0538	-0,0165	1,0030	0,0091	0,5029	0,0	0,5051
-0,0078	0,0	-0,0117	0,0313	-0,0528	-0,0001	0,0095	0,0	1,0046	1,0018	-0,5002	-0,0056
0,0	-0,0225	-0,0919	0,1234	0,0	0,0	0,0	-0,0223	0,0407	1,0135	0,0	0,0
0,0235	0,0	0,0079	-0,0002	0,1213	0,0004	-0,0287	0,0	-0,0121	-0,0082	1,0009	0,0169
0,0919	-0,0078	-0,0001	0,0001	0,0000	0,1233	-0,0407	0,0112	0,0000	0,0016	0,0	1,0129

Tablica 15

Ω_{k1}											
1,0010	0,0	0,0	0,0	-0,0267	0,1195	-2,8918	0,0	0,0	0,0	-2,0745	1,3863
-0,0089	0,9814	0,0169	0,0133	0,0002	-0,0202	0,0127	-2,7578	-0,0196	1,8889	0,0082	-0,1262
-0,0148	-0,0813	1,0119	-0,1248	0,0203	0,0001	0,0040	0,0335	-2,6660	-1,3953	0,1247	0,0011
0,0	0,5038	-1,0013	0,0977	0,0	0,0	0,0	0,5071	1,2706	-0,4045	0,0	0,0
-0,4957	-0,0329	0,5046	-0,0507	0,9838	0,0312	-0,6272	0,0135	-1,2065	-0,5715	-0,6683	0,3753
1,0098	-0,4960	-0,0056	-0,0116	-0,0261	1,0157	-1,5045	1,2562	0,0064	-0,8829	-1,0020	0,1813
0,0306	0,0	0,0	0,0	-0,0371	-0,0901	0,9946	0,0	0,0	0,0	0,5030	-1,0013
0,0384	0,0418	-0,0234	0,0393	-0,0009	0,0835	-0,0547	0,9833	0,0271	-0,4941	-0,0356	0,5050
0,0605	0,0626	-0,0117	0,0940	-0,0839	-0,0005	-0,0143	-0,0261	1,0136	1,0096	-0,4970	-0,0056
0,0	0,1323	-0,0919	0,1861	0,0	0,0	0,0	-0,0274	0,1185	1,0031	0,0	0,0
-0,1288	-0,0005	0,0079	-0,0007	0,1831	0,0014	0,0188	0,0002	-0,0182	-0,0083	0,9833	0,0169
0,0926	-0,0078	-0,0001	-0,0002	-0,0023	0,1829	-0,1328	0,0190	0,0001	-0,0135	-0,0867	1,0128

Tablica 16

Ω_{80}

1,0009	-0,1629	-0,0915	0,0	0,2065	-3,6617	0,0742	0,0349	0,0	-2,0844	1,4098
-0,0089	1,0369	0,0177	0,1243	-0,1245	0,0196	-3,7584	-0,0367	1,8889	0,0363	-3,3800
-0,0148	-0,0820	1,0665	-0,2068	0,0021	0,0154	0,1149	-3,6968	-1,3952	3,3018	0,0753
0,0	0,4999	-1,0171	0,9735	0,0106	0,00	0,0043	2,2757	-0,4048	-1,7720	0,2554
-0,4958	-0,0760	1,4820	-0,0842	0,0555	-0,2459	0,0659	-2,1996	-0,5715	0,9535	0,4114
1,0097	-1,5325	-0,0630	-0,0635	1,0744	-2,2811	2,2657	0,0354	-0,8829	-1,0182	1,8621
0,0306	0,1214	-0,0214	0,0	-0,1529	0,9710	-0,0555	0,0133	0,0	0,4981	-1,0189
0,0384	-0,0676	-0,0258	0,0103	0,1455	-0,0842	0,9911	0,0515	-0,4942	-0,0746	1,4832
0,0605	0,0637	-0,1217	0,1533	-0,0013	-0,0609	-0,0890	-1,0750	1,0096	-1,5322	-0,0630
0,0	0,1329	-0,0933	0,245	-0,0023	0,0	-0,1599	0,2037	1,0030	-0,1574	-0,0936
-0,1288	-0,0024	0,2220	-0,0012	0,0025	0,1179	0,0015	-0,1279	-0,0089	1,0385	0,0176
0,0926	-0,2226	-0,0050	-0,0010	0,2473	-0,2040	0,1288	0,0022	-0,0135	-0,0874	1,0688

Tablica 17

\mathfrak{M}_{33}

0		0
0_1	0_1	0
0_1	A	

Tablica 18

$\Omega_{43} \mathfrak{M}_{33}$

0_1	B	0
0_1	C	
0_1	D	0
0_1	E	

Tablica 19

$\Omega_{k3} \mathfrak{M}_{32}$

0_1	0_1	0
0_1	F	
0_1	G	0
0_1	H	

Symbol 0 macierz zerową o wymiarach 6×6 , 0_1 macierz zerową o wymiarach 3×3 oraz

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0286 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0286 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0 & 0,0286 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0 & 0,0036 & 0,0 \\ \hline 0,0036 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ \hline \end{array}$$

$$C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0006 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0006 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ \hline \end{array}$$

$$D = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0 & -0,0143 & 0,0 \\ \hline 0,0143 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ \hline \end{array}$$

$$E = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0286 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0286 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0 & 0,0286 \\ \hline \end{array}$$

$$F = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0006 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0012 & 0,0 \\ \hline 0,0036 & 0,0 & 0,0006 \\ \hline \end{array}$$

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0 & 0,0143 & 0,0 \\ \hline 0,0143 & 0,0 & 0,0143 \\ \hline 0,0143 & 0,0 & 0,0 \\ \hline \end{array}$$

$$H = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,0002 & 0,0 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0002 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 0,0 & 0,0002 \\ \hline \end{array}$$

Tablica 20

	0									1			2			3			4			
	M ₁			M ₂			M ₃			P ₁	P ₂	P ₃	P ₁	P ₂	P ₃	u ₁	u ₂	u ₃	P ₁	P ₂	P ₃	
	M ₁	M ₂	M ₃	M ₁	M ₂	M ₃	P ₁	P ₂	P ₃	P ₁	P ₂	P ₃	P ₁	P ₂	P ₃	u ₁	u ₂	u ₃	P ₁	P ₂	P ₃	
1	u ₂	0	0	-0,5001	0	0,1667	0	2,4619														
2	u ₁	0	-1,5024	0	0,1664	0	0,1664	-1,0007	0	0	0	0	0	0	0							
	u ₂	1,2697	0	-0,5031	0	0,3343	0	0,1667	0	0,1667	0	2,3039										
3	u ₁	0	+1,5133	2,2740	0,3340	-1,7707	0,3340	-1,0077	0	0,1667	0	0	-1,0	0	0							
	u ₂	1,2697	0	-0,5031	0	0,3340	0	0,1664	0	0,1664	0	-0,0003	0	-1,0	0							
	u ₃	-2,2780	0,5080	0,2350	0	-1,0077	0,3356	0,3356	-1,0007	0	0	0	0	0	-1,0							
4	u ₁	0	0,0043	2,2757	-0,4047	-1,7720	0,2554	0,2554	0	0,1877	0	0	0,0006	0	0	0,0006	0	0	0	0,1920	0	0
	u ₂	-0,2485	0,0195	-0,4832	0	-0,5275	0,3813	0,3813	-0,6891	0	0,0205	0,0205	0	0,0006	0	0	0,0006	0	0	0	0,0004	0
	u ₃	-2,2780	0,5080	0,0235	0	-1,0077	0,3353	0,3353	-1,0007	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1920
K	u ₁	0	0,0043	2,2757	-0,4048	-1,7720	0,2554	0,2554	0	0,1875	0	0	0,0006	0	0	0,0006	0	0	0	-0,0002	0	0
	u ₂	-0,2459	0,0659	-2,1996	-0,5715	0,9535	0,4114	0,4114	-0,6683	-0,5675	0,0414	0,0414	0	0,0012	0	0	0,0012	0	0	0	0,0209	0
	u ₃	-2,2811	2,2657	0,0354	-0,8829	-1,0182	1,8621	1,8621	-1,0020	0,1256	0	0	0,0036	0	0,0006	0,0036	0	0,0006	0	0	0	0,0209
	M ₁	0,9710	-0,0555	0,0133	0	0,4981	-1,0189	-1,0189	0,5030	0	-0,5000	-0,5000	0	0,0143	0	0	0,0143	0	0	0	0	0
	M ₂	-0,0842	0,9911	0,0515	-0,4942	-0,0746	1,4832	1,4832	-0,0356	0,5029	0	0	0,0143	0	0,0143	0	0,0143	0	0,0143	0	0	0
	M ₃	-0,0609	-0,0890	1,0750	1,0096	-1,5322	-0,0630	-0,0630	-0,4970	1,0018	-0,5002	-0,5002	0	-0,0143	0	-0,0143	0	-0,0143	0	0	0	-0,5000

Literatura cytowana w tekście

1. C. WOŹNIAK, M. ŁUKOWIAK, *Z teorii przestrzennych rurociągów samokompensacyjnych*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965).
2. В. А. Троицкий, *Матричные методы расчета колебаний стержневых систем*, Динамика и прочность машин, Труды Л. П. И., nr. 210, Москва-Ленинград 1960.
3. The M.W. Kellogg Company, *Design of Piping Systems*, New-York-London 1957.
4. А. Г. Камерштейн, В. В. Рождественский, М. Х. Ручимский, *Расчет трубопроводов на прочность*, Москва 1963.
5. M. ŁUKOWIAK, Cz. WOŹNIAK, *Rekurencyjne sposoby obliczania rurociągów samokompensacyjnych*, Arch. Inż. Łąd., 1, 11 1965.
6. S. BŁASZKOWIAK, Z. KAŹCZOWSKI, *Metoda Crossa*, PWN, Warszawa 1961.

Резюме

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В работе [1] даются методы расчета статических стержневых систем, статические схемы которых близки статическим схемам энергетических трубопроводов.

Приводится способ определения частот собственных колебаний, стержневых систем и внутренних сил, вызванных приложением механических воздействий. Способ опирания системы произвольный, при чем в ней могут существовать гибкие узлы, в виде шарниров или компенсаторов. Рассуждения проводятся в матричной записи, пригодной для программирования на цифровых машинах.

Summary

STATIONARY VIBRATIONS OF SPATIAL BAR SYSTEMS

In Ref. [1] were described computation methods of bar systems, the mechanical schemes of which approach those of power pipelines.

The author proposes a method for determining the frequency of natural vibration of a bar system and the internal forces and moments produced by mechanical actions. The way in which the bar system is supported is arbitrary and elastic elements may occur on its length in the form of hinges or compensators. The matrix notation is used thus facilitating computer programming.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 listopada 1966 r.