

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA CAUCHY'EGO DLA RÓWNAŃ PŁASKIEGO
PLASTYCZNEGO STANU NAPRĘŻENIA ZA POMOCĄ SZEREGÓW POTĘGOWYCH

AMALIA PIELORZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problem Cauchy'ego dla równań płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia w ośrodku idealnie plastycznym i nieściśliwym w przestrzeni kartezjańskiej w praktyce jest rozwiązywany przez zastosowanie podstawienia Levy'ego, linearyzującego układ rozpatrywanych równań, metodą Riemanna lub metodami numerycznymi, wykorzystującymi charakterystyki. Szeregi potęgowe po raz pierwszy zostały zastosowane do rozwiązania tego problemu przez S. KOMLJENOWIĆA i J. RYCHLEWSKIEGO w pracy [2] dla płaskiego stanu odkształcenia.

Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla płaskiego stanu naprężenia jest w praktyce rzeczą bardziej skomplikowaną aniżeli rozwiązanie odpowiedniego problemu dla płaskiego stanu odkształcenia. Na przykład nieliczne rozwiązania zadań metodą podstawień Levy'ego są określone przez stosunkowo skomplikowane funkcje [1]. Zastosowanie dla równań płaskiego stanu naprężenia metody zaproponowanej w pracy [2] pozwala w prosty sposób otrzymać rozwiązanie problemu Cauchy'ego w sąsiedztwie brzegu ciała.

2. Sformułowanie problemu

W płaskim stanie naprężenia składowe fizyczne tensora naprężenia $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ w ciele idealnie plastycznym i nieściśliwym muszą spełniać dwa równania równowagi i warunek plastyczności. W dowolnym układzie ortogonalnym α , β równania te mają postać

$$\begin{aligned} h_{\beta} \sigma_{\alpha\alpha, \alpha} + h_{\beta, \alpha} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}) + h_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta, \beta} + 2h_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta} &= 0, \\ h_{\alpha} \sigma_{\beta\beta, \beta} + h_{\alpha, \beta} (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}) + h_{\beta} \sigma_{\alpha\beta, \alpha} + 2h_{\beta, \alpha} \sigma_{\alpha\beta} &= 0, \\ \sigma_{\alpha\alpha}^2 + \sigma_{\beta\beta}^2 - \sigma_{\alpha\alpha} \sigma_{\beta\beta} + 3\sigma_{\alpha\beta}^2 &= 3K^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie h_{α} i h_{β} są parametrami Lamégo układu współrzędnych, $f_{, \alpha}$, $f_{, \beta}$ oznaczają pochodne cząstkowe funkcji f względem odpowiedniej współrzędnej, przy czym ten sam indeks powtórzony dwa razy nie oznacza sumacji. W równaniach (2.1) zostały pominięte siły masowe.

Powyższy układ 3 równań dla funkcji szukanych $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, jest quasi-liniowym układem równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu.

Oznaczmy przez C łuk regularny o następującym równaniu parametrycznym:

$$(2.2) \quad \alpha = \alpha(\xi), \quad \beta = \beta(\xi), \quad \text{gdzie} \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1.$$

Niech łuk C będzie brzegiem naszego ciała i niech w każdym jego punkcie dane są składowa normalna i styczna obciążenia:

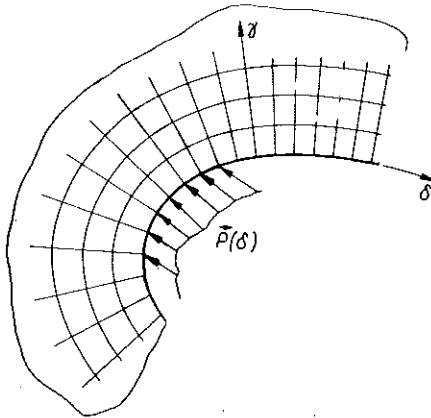
$$(2.3) \quad \sigma_{nn} = \sigma_{nn}(\xi), \quad \sigma_{nt} = \sigma_{nt}(\xi).$$

Poprzez (2.2) i (2.3) został sformułowany problem Cauchy'ego dla układu równań (2.1) przy założeniu, że krzywa C nie pokrywa się z żadną z charakterystyk układu (2.1). Rozwiązanie tego problemu określa stan plastycznego naprężenia w sąsiedztwie brzegu C tarczy idealnie plastycznej i nieściśliwej.

3. Wybór układu współrzędnych

Opiszmy brzeg tarczy C z danym na nim obciążeniem \bar{P} następującym równaniem naturalnym:

$$(3.1) \quad R = R(s) \quad \text{lub} \quad \kappa = \kappa(s), \quad \text{gdzie} \quad s_0 \leq s \leq s_1$$



Rys. 1

oraz gdzie R oznacza promień krzywizny, $\kappa = 1/R$ jest krzywizną, a s jest parametrem długości.

Wprowadźmy krzywoliniowy układ ortogonalny współrzędnych δ, γ będący układem naturalnym dla tego zadania. Jedną rodziną krzywych układu są równoległe do łuku C ($\gamma = \text{const}$), drugą rodziną są proste prostopadłe do łuku C ($\delta = \text{const}$) (rys. 1). Wobec tego parametry Lamégo dla odpowiednich parametrów naszego układu (δ jest parametrem długości łuku brzegu, γ określa odległość od brzegu tarczy C) są następujące:

$$(3.2) \quad h_\delta = 1 + \kappa(\delta)\gamma, \quad h_\gamma = 1.$$

Po podstawieniu (3.2) układ równań (2.1) przyjmuje postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{\delta\delta, \delta} + (1 + \kappa\gamma) \sigma_{\delta\gamma, \gamma} + 2\kappa\sigma_{\delta\gamma} &= 0, \\ (1 + \kappa\gamma) \sigma_{\gamma\gamma, \gamma} + \sigma_{\delta\gamma, \delta} + \kappa(\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta}) &= 0, \\ \sigma_{\delta\delta}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - \sigma_{\delta\delta} \sigma_{\gamma\gamma} + 3\sigma_{\delta\gamma}^2 &= 3K^2. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (2.3) na krzywej C ($[\delta]_C = s$) napiszemy następująco:

$$(3.4) \quad [\sigma_{\gamma\gamma}]_C = N_0(\delta), \quad [\sigma_{\delta\gamma}]_C = T_0(\delta).$$

Z warunku plastyczności (3.3)₃ otrzymujemy wtedy

$$(3.5) \quad [\sigma_{\delta\delta}]_C = S_0(\delta) = \frac{N_0 + \lambda [3(4K^2 - 4T_0^2 - N_0^2)]^{1/2}}{2}, \quad \lambda = \pm 1.$$

Zauważamy, że $S_0(\delta)$ jest określone dla

$$(3.6) \quad 4K^2 - 4T_0^2 - N_0^2 \geq 0,$$

czyli dla punktów (T_0, N_0) leżących wewnątrz i na brzegu elipsy

$$(3.7) \quad \frac{T_0^2}{K^2} + \frac{N_0^2}{4K^2} = 1$$

w układzie prostokątnym T_0, N_0 (rys. 3).

Obliczmy pierwsze pochodne naprężeń na brzegu C ($\gamma = 0$) w kierunku normalnym. Z równań równowagi (3.3)_{1,2} mamy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} [\sigma_{\delta\gamma, \gamma}]_C &= -(S'_0 + 2\kappa T_0), \\ [\sigma_{\gamma\gamma, \gamma}]_C &= -[T'_0 + \kappa(N_0 - S_0)] = -\left\{T'_0 + \frac{N_0}{2} - \frac{\lambda}{2} [3(4K^2 - 4T_0^2 - N_0^2)]^{1/2}\right\}, \end{aligned}$$

gdzie za pomocą znaczka «prim» oznaczono pochodną zwyczajną $dg(z)/dz = g'$. Po zróżniczkowaniu warunku plastyczności (3.3)₃ otrzymujemy

$$(2\sigma_{\delta\delta} - \sigma_{\gamma\gamma})\sigma_{\delta\delta, \gamma} = (\sigma_{\delta\delta} - 2\sigma_{\gamma\gamma})\sigma_{\gamma\gamma, \gamma} - 6\sigma_{\delta\gamma}\sigma_{\delta\gamma, \gamma},$$

a stąd

$$(3.9) \quad [\sigma_{\delta\delta, \gamma}]_C = -\frac{(2N_0 - S_0)[\sigma_{\gamma\gamma, \gamma}]_C + 6T_0[\sigma_{\delta\gamma, \gamma}]_C}{2S_0 - N_0}.$$

Przeprowadźmy dyskusję równania (3.9). Funkcja $[\sigma_{\delta\delta, \gamma}]_C$ nie przyjmuje skończonych wartości dla $2S_0 = N_0$, przy czym zachodzą dwa przypadki:

a) dla każdego δ na łuku C

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 2S_0 &= N_0, \\ (2N_0 - S_0)[\sigma_{\gamma\gamma, \gamma}]_C + 6T_0[\sigma_{\delta\gamma, \gamma}]_C &= 0, \end{aligned}$$

co pociąga za sobą

$$(3.11) \quad \begin{aligned} 4K^2 - 4T_0^2 - N_0^2 &= 0, \\ \kappa N_0^2 + 4T_0 N'_0 + 2N_0 T'_0 + 16\kappa T_0^2 &= 0; \end{aligned}$$

b) dla każdego δ na łuku C

$$(3.12) \quad \begin{aligned} 4K^2 - 4T_0^2 - N_0^2 &= 0, \\ \kappa N_0^2 + 4T_0 N'_0 + 2N_0 T'_0 + 16\kappa T_0^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

W przypadku a) pochodna $[\sigma_{\delta\delta, \gamma}]_C$ jest nieokreślona, a C jest łukiem charakterystyki układu równań (3.3), natomiast (3.11)₂ jest tzw. warunkiem zgodności wzdłuż

charakterystyki. Zagadnienie Cauchy'ego nie ma wtedy sensu. W drugim przypadku $[\sigma_{\delta\delta, \gamma}]_C$ ma wartość nieskończoną, a C jest łukiem obwiedni charakterystyk układu (3.3).

Oba powyższe przypadki wykluczamy z naszych rozważań, a więc uwzględniając warunek (3.6) zajmować się będziemy problemami początkowymi układu równań (3.3), dla których dane (T_0, N_0) są punktami wewnętrznymi elipsy (3.7), rys. 3.

4. Analiza typu równań

Zbadajmy dokładnie typ układu równań (3.3) w otoczeniu brzegu C . W zależności od postaci funkcji $T_0(\delta)$ i $N_0(\delta)$, danych na brzegu C , omawiany układ równań może być hiperboliczny, paraboliczny lub eliptyczny. Odpowiednie kryterium dla przypadku układu równań płaskiego stanu naprężenia podane jest w [1].

Okazuje się, że układ równań płaskiego stanu naprężenia jest hiperboliczny, gdy $3 - 4\cos^2 \omega > 0$, paraboliczny, gdy $3 - 4\cos^2 \omega = 0$, a typu eliptycznego dla $3 - 4\cos^2 \omega < 0$, gdzie $\cos \omega = \sigma/\sqrt{3}K$, oraz $\sigma = (\sigma_{\delta\delta} + \sigma_{\gamma\gamma})/2$.

Z łatwością obliczamy, że układ równań (3.3) jest typu hiperbolicznego dla

$$(4.1) \quad -\frac{3}{2}K < \sigma < \frac{3}{2}K,$$

typu parabolicznego dla

$$(4.2) \quad \sigma = \pm \frac{3}{2}K,$$

a jest układem eliptycznym, gdy

$$(4.3) \quad \frac{3}{2}K < \sigma \quad \text{lub} \quad \sigma < -\frac{3}{2}K.$$

Rozpatrzmy przestrzeń kartezjańską $\mathcal{E}_3 : [\sigma_{\delta\delta}]_C = S_0, [\sigma_{\gamma\gamma}]_C = N_0, [\sigma_{\delta\gamma}]_C = T_0$. Warunek plastyczności (3.3)₃ w tej przestrzeni jest reprezentowany przez elipsoidę (rys. 2). Aby lepiej zobrazować, jakie ograniczenia należy nałożyć na warunki początkowe $T_0(\delta)$ i $N_0(\delta)$, aby układ równań (3.3) był odpowiedniego typu w otoczeniu brzegu C , zrzutujmy elipsoidę plastyczności (3.3)₃ na płaszczyznę T_0, N_0 . Rzut ten o równaniu (3.7) jest elipsą o środku w punkcie $(0, 0)$ i długościach osi odpowiednio $2K$ i K (rys. 3).

Zbiór punktów przestrzeni \mathcal{E}_3 , dla których rozważany układ (3.3) jest paraboliczny, opisują równania

$$(4.4) \quad S_0^2 + N_0^2 - S_0 N_0 + 3T_0^2 = 3K^2, \quad N_0 + S_0 = 3\lambda K,$$

gdzie $\lambda = \pm 1$.

Rzutując ten zbiór na płaszczyznę T_0, N_0 otrzymujemy dla danych na brzegu C zbiór

$$(4.5) \quad \left(N_0 - \frac{3}{2}\lambda K\right)^2 + T_0^2 = \frac{1}{4}K^2.$$

Są to dwa okręgi o środku w punktach $(0, 3\lambda K/2)$ i promieniu $K/2$. Leżą one wewnątrz elipsy (3.7).

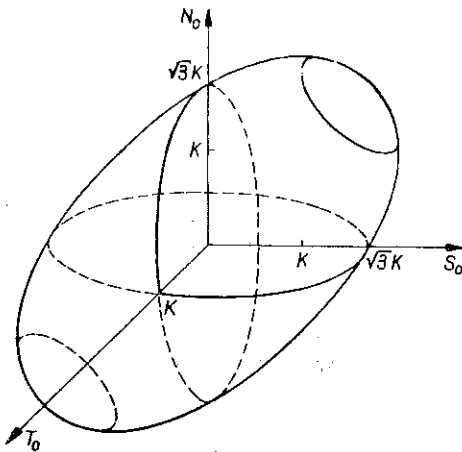
Z łatwością zauważamy, że dla naprężeń danych na brzegu tarczy spełniających warunki

$$(4.6) \quad \frac{N_0^2}{4K^2} + \frac{T_0^2}{K^2} < 1, \quad \left(N_0 - \frac{3}{2}K\right)^2 + T_0^2 > \frac{1}{4}K^2,$$

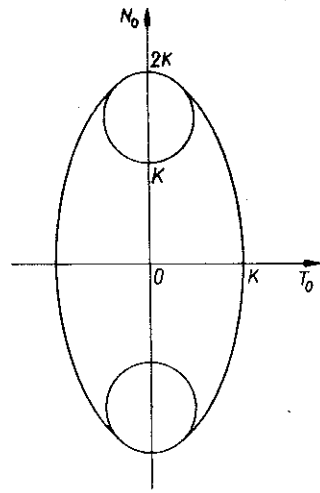
$$\left(N_0 + \frac{3}{2}K\right)^2 + T_0^2 > \frac{1}{4}K^2,$$

układ (3.3) jest typu hiperbolicznego, natomiast warunki eliptyczności omawianego układu dane są za pomocą warunków

$$(4.7) \quad \left(N_0 - \frac{3}{2}K\right)^2 + T_0^2 < \frac{1}{4}K^2, \quad \left(N_0 + \frac{3}{2}K\right)^2 + T_0^2 < \frac{1}{4}K^2.$$



Rys. 2



Rys. 3

Nierówności (4.6) opisują zbiór punktów (T_0, N_0) leżących wewnątrz elipsy (3.7) i na zewnątrz okręgów (4.5), a nierówności (4.7) dają punkty leżące wewnątrz okręgów (4.5).

5. Rozwiązywanie układu równań

Będziemy szukać rozwiązań układu równań (3.3) w postaci następujących szeregów:

$$(5.1) \quad \sigma_{\delta\delta} = S_0(\delta) + \sum_{i=1}^{\infty} S_i(\delta)\gamma^i, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = N_0(\delta) + \sum_{i=1}^{\infty} N_i(\delta)\gamma^i,$$

$$\sigma_{\delta\gamma} = T_0(\delta) + \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\delta)\gamma^i.$$

Wymaga to założenia, aby krzywizna brzegu $\kappa(\delta)$ i dane naprężenia $T_0(\delta)$ i $N_0(\delta)$ były funkcjami analitycznymi argumentu δ .

Istnienie i zbieżność szeregów (5.1) dla każdego δ wynika z twierdzenia Z. KOWALEWSKIEJ [3]. I rzeczywiście, eliminując $\sigma_{\delta\delta}$ z warunku plastyczności (3.3)₃ i wstawiając do równań równowagi (3.3)_{1,2} otrzymujemy

$$(5.2) \quad \sigma_{\delta\gamma, \gamma} = -\frac{1}{1+\kappa\gamma} \left\{ 2\kappa\sigma_{\delta\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma\gamma, \delta}}{2} - \frac{3\lambda}{2} [3(4K^2 - 4\sigma_{\delta\gamma}^2 - \sigma_{\gamma\gamma}^2)]^{-1/2} (4\sigma_{\delta\gamma} \sigma_{\delta\gamma, \delta} + \sigma_{\gamma\gamma} \sigma_{\gamma\gamma, \delta}) \right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma, \gamma} = -\frac{1}{1+\kappa\gamma} \left\{ \sigma_{\delta\gamma, \delta} + \kappa \frac{\sigma_{\gamma\gamma} - \lambda [3(4K^2 - 4\sigma_{\delta\gamma}^2 - \sigma_{\gamma\gamma}^2)]^{1/2}}{2} \right\}.$$

Zauważmy, że w otoczeniu punktu P na brzegu C o współrzędnych $\gamma = 0$, $\delta = \delta_0$ i dla wartości $\sigma_{\delta\gamma}(P) = T_0(\delta_0)$, $\sigma_{\delta\gamma, \delta}(P) = T_0'(\delta_0)$, $\sigma_{\gamma\gamma}(P) = N_0(\delta_0)$, $\sigma_{\gamma\gamma, \delta}(P) = N_0'(\delta_0)$ prawe strony równań (5.2) są analityczne względem δ , γ , $\sigma_{\delta\gamma}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, $\sigma_{\delta\gamma, \delta}$, $\sigma_{\gamma\gamma, \delta}$ w obszarze

$$(5.3) \quad 4K^2 - 4\sigma_{\delta\gamma}^2 - \sigma_{\gamma\gamma}^2 > 0 \quad \text{na } C.$$

Obszar (5.3) jest nam znany: jest to wnętrze elipsy (3.7) (rys. 3).

Z twierdzenia Z. Kowalewskiej wynika, że przy spełnionym warunku (5.3) w pewnym otoczeniu punktu P

$$(5.4) \quad |\delta - \delta_0| < a(\delta_0), \quad |\gamma| < b(\delta_0)$$

istnieje jedyne rozwiązanie w klasie funkcji analitycznych układu (3.3) postaci

$$(5.5) \quad \sigma_{\delta\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \sigma_{\delta\gamma, \underbrace{\delta \dots \delta}_k \underbrace{\gamma \dots \gamma}_l}(P) (\delta - \delta_0)^k \gamma^l,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \sigma_{\gamma\gamma, \underbrace{\delta \dots \delta}_k \underbrace{\gamma \dots \gamma}_l}(P) (\delta - \delta_0)^k \gamma^l.$$

Istnienie i jednoznaczność szeregów (5.5) pociąga za sobą istnienie i jednoznaczność analogicznego szeregu dla $\sigma_{\delta\delta}$.

Punkt P był dowolnym punktem łuku C . Możemy więc rozwiązanie postaci (5.5) znaleźć w otoczeniu każdego punktu brzegu tarczy C .

Używanie podwójnych szeregów (5.5) jest uciążliwe, gdy tymczasem szeregi (5.1) są bardziej wygodne przy obliczeniach. Rozwiązania dane szeregami (5.5) i (5.1) w otoczeniu punktu P są równoważne, jeśli wprowadzić następujące oznaczenia:

$$(5.6) \quad T_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l! k!} \sigma_{\delta\gamma, \underbrace{\delta \dots \delta}_k \underbrace{\gamma \dots \gamma}_l}(P) (\delta - \delta_0)^k,$$

$$N_l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l! k!} \sigma_{\gamma\gamma, \underbrace{\delta \dots \delta}_k \underbrace{\gamma \dots \gamma}_l}(P) (\delta - \delta_0)^k.$$

Zauważmy, że z założeń twierdzenia Z. Kowalewskiej wynika, iż rozwiązanie układu równań (3.3) w postaci (5.1) otrzymujemy dla wszystkich $[\sigma_{\delta\gamma}]_C$ i $[\sigma_{\gamma\gamma}]_C$, spełniających nierówność (5.3) czyli dla punktów hiperboliczności, paraboliczności i eliptyczności rozważanego układu z wyjątkiem punktów $(0, \lambda K)$.

Obecnie przystąpmy do wyznaczenia wszystkich współczynników występujących w szeregach (5.1). Podstawiając (5.1) do warunku płastyczności (3.3)₃ i korzystając z reguły mnożenia szeregów potęgowych otrzymujemy

$$(5.7) \quad S_0^2 + N_0^2 - S_0 N_0 + 3T_0^2 - 3K^2 + (2S_0 S_1 + 2N_0 N_1 - S_0 N_1 - N_0 S_1 + 6T_0 T_1) \gamma + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} [(2S_0 - N_0) S_i + (2N_0 - S_0) N_i + 6T_0 T_i + \\ + \sum_{m=1}^{i-1} (S_m S_{i-m} + N_m N_{i-m} - S_m N_{i-m} + 3T_m T_{i-m})] \gamma^i = 0.$$

Z równań równowagi (3.3)_{1,2} mamy

$$(5.8) \quad S_0' + T_1 + 2\kappa T_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [S_i' + (i+1)T_{i+1} + \kappa(i+2)T_i] \gamma^i = 0, \\ N_1 + T_0' + \kappa(N_0 - S_0) + \sum_{i=1}^{\infty} [(i+1)N_{i+1} + \kappa i N_i + T_i' + \kappa(N_i - S_i)] \gamma^i = 0.$$

Wyrażenia w (5.8), stojące przy zerowej potędze γ , oraz współczynniki przy zerowej i pierwszej potędze γ w (5.7) są poprzednio już otrzymanymi wielkościami (3.5), (3.8) i (3.9)

$$(5.9) \quad S_0 = \frac{N_0 + \lambda [3(4K^2 - 4T_0^2 - N_0^2)]^{1/2}}{2}, \quad T_1 = -(S_0' + 2\kappa T_0), \\ N_1 = -[T_0' + \kappa(N_0 - S_0)], \quad S_1 = -\frac{(2N_0 - S_0) N_1 + 6T_0 T_1}{2S_0 - N_0}.$$

Przyrównując do zera współczynniki przy pozostałych potęgach γ w (5.7) i (5.8) obliczamy

$$(5.10) \quad T_\nu = -\frac{1}{\nu} [S_{\nu-1}' + \kappa(\nu+1) T_{\nu-1}], \quad N_\nu = -\frac{1}{\nu} [T_{\nu-1}' + \kappa \nu N_{\nu-1} - \kappa S_{\nu-1}], \\ S_\nu = -\frac{1}{2S_0 - N_0} \left[(2N_0 - S_0) N_\nu + 6T_0 T_\nu + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\nu-1} (S_m S_{\nu-m} + N_m N_{\nu-m} - S_m N_{\nu-m} + 3T_m T_{\nu-m}) \right], \quad \nu = 2, 3, \dots$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzory rekurencyjne, które pozwalają obliczyć każdy współczynnik szeregów (5.1) [przypadek $2S_0 = N_0$ dla każdego δ na brzegu C wyłączyliśmy z naszych rozważań, gdyż wtedy C jest łukiem charakterystyki lub obwiedni charakterystyk układu (3.3)].

Wzory (5.1), (5.9) i (5.10) określają rozwiązanie problemu Cauchy'ego w otoczeniu brzegu tarczy, danego przez dowolne analityczne równanie (3.1) dla danych naprężeń, opisanych przez dowolne funkcje analityczne (3.4), spełniających warunek (5.3).

6. Przykład

Zbadajmy szczególnie przypadek, gdy brzeg tarczy jest wolny od obciążeń, tzn.

$$(6.1) \quad T_0 = 0, \quad N_0 = 0, \quad S_0 = \sqrt{3}\lambda K, \quad \lambda = \pm 1.$$

Za pomocą wzorów (5.1), (5.9) i (5.10) znajdujemy naprężenia w sąsiedztwie brzegu rozważanej tarczy:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\delta\gamma} &= \lambda \sqrt{3} K \left[-\frac{1}{4} \frac{\kappa'}{\kappa^2} (\kappa\gamma)^2 + \frac{5}{6} \frac{\kappa'}{\kappa^2} (\kappa\gamma)^3 - \left(\frac{1}{96} \frac{\kappa'''}{\kappa^4} + \frac{317}{192} \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right) (\kappa\gamma)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{23}{192} \frac{\kappa' \kappa''}{\kappa^5} + \frac{17}{320} \frac{\kappa'''}{\kappa^4} + \frac{21}{8} \frac{\kappa'}{\kappa^2} \right) (\kappa\gamma)^5 + \dots \right], \\ \sigma_{\delta\delta} &= \lambda \sqrt{3} K \left[1 + \frac{1}{2} (\kappa\gamma) - \frac{3}{4} (\kappa\gamma)^2 + \left(\frac{1}{24} \frac{\kappa''}{\kappa^3} + \frac{13}{16} \right) (\kappa\gamma)^3 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{19}{96} \frac{\kappa' \kappa'}{\kappa^4} + \frac{13}{64} \frac{\kappa''}{\kappa^3} + \frac{103}{128} \right) (\kappa\gamma)^4 + \left(\frac{1}{960} \frac{\kappa^{IV}}{\kappa^5} + \frac{287}{240} \frac{\kappa' \kappa'}{\kappa^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1043}{1920} \frac{\kappa''}{\kappa^3} + \frac{501}{640} \right) (\kappa\gamma)^5 + \dots \right], \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= \lambda \sqrt{3} K \left[(\kappa\gamma) - \frac{3}{4} (\kappa\gamma)^2 + \left(\frac{1}{12} \frac{\kappa''}{\kappa^3} + 1 \right) (\kappa\gamma)^3 - \left(\frac{5}{24} \frac{\kappa' \kappa'}{\kappa^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{32} \frac{\kappa''}{\kappa^3} + \frac{19}{64} \right) (\kappa\gamma)^4 + \left(\frac{1}{480} \frac{\kappa^{IV}}{\kappa^5} + \frac{199}{240} \frac{\kappa' \kappa'}{\kappa^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{137}{240} \frac{\kappa''}{\kappa^3} + \frac{87}{640} \right) (\kappa\gamma)^5 + \dots \right]. \end{aligned}$$

W szczególności, gdy brzeg tarczy jest łukiem okręgu koła ($\kappa = \text{const}$), otrzymujemy

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{\delta\gamma} &= 0, \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= \lambda \sqrt{3} K \left[(\kappa\gamma) - \frac{3}{4} (\kappa\gamma)^2 + \frac{1}{2} (\kappa\gamma)^3 - \frac{19}{64} (\kappa\gamma)^4 + \frac{87}{640} (\kappa\gamma)^5 + \dots \right], \\ \sigma_{\delta\delta} &= \lambda \sqrt{3} K \left[1 + \frac{1}{2} (\kappa\gamma) - \frac{3}{4} (\kappa\gamma)^2 + \frac{13}{16} (\kappa\gamma)^3 - \frac{103}{128} (\kappa\gamma)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{501}{640} (\kappa\gamma)^5 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Wykazanie zbieżności szeregów (6.3)_{2,3}, nie odwołując się do twierdzenia Z. Kowalewskiej, jest rzeczą skomplikowaną, bowiem nie zdołano znaleźć zależności między współczynnikami rozważanych szeregów. Jednakże znane jest rozwiązanie

w naprężeniach dla tarczy idealnie plastycznej i nieściśliwej z kołowym otworem [1]. Sprawdźmy, czy otrzymane w [1] rozwiązanie pokrywa się ze wzorami (6.3)_{2,3}.

Mamy tarczę idealnie plastyczną i nieściśliwą, której brzeg, będący łukiem okręgu koła, jest nieobciążony. Wówczas warunki brzegowe są następujące:

$$(6.4) \quad \sigma_r = 0 \quad \text{dla} \quad \kappa = \frac{1}{a}, \quad \text{gdzie} \quad a = \text{const.}$$

Naprężenia σ_r , σ_θ w tarczy muszą spełniać warunek plastyczności

$$(6.5) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 3K^2$$

i równanie równowagi

$$(6.6) \quad \sigma_{r,r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Zauważmy, że (6.5) jest spełnione tożsamościowo dla

$$(6.7) \quad \sigma_r = 2K \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_\theta = 2K \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

i wtedy warunek na brzegu (6.4) jest równoważny warunkowi

$$(6.8) \quad \omega = \frac{\pi}{3} \quad \text{dla} \quad \kappa = \frac{1}{a}.$$

Wstawiając (6.7) do (6.6) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(6.9) \quad (\sqrt{3} + \text{ctg } \omega) d\omega + 2 \frac{dr}{r} = 0$$

o rozwiązaniu

$$(6.10) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \sin \omega e^{\sqrt{3}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Porównując z naszymi oznaczeniami otrzymujemy zależności

$$(6.11) \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_r, \quad \sigma_{\delta\delta} = \sigma_\theta, \quad \gamma = r - a, \quad \delta = \theta.$$

Aby σ_r i σ_θ porównać z $\sigma_{\gamma\gamma}$ i $\sigma_{\delta\delta}$ danymi wzorami (6.3)_{2,3}, należy (6.7) rozwinąć w szereg potęgowy względem $\kappa\gamma = (r/a) - 1$. Najpierw ω wyrażamy w postaci szeregu wykorzystując (6.10). Rozwiązania szukamy w sąsiedztwie brzegu tarczy, wobec tego prawą stronę (6.10) rozwijamy w szereg potęgowy w otoczeniu $\omega = \pi/3$, natomiast lewą stronę równości (6.10) rozwijamy w szereg potęgowy w otoczeniu $r/a = 1$ i otrzymujemy

$$(6.12) \quad -\sqrt{3}(\kappa\gamma) + \frac{3\sqrt{3}}{2}(\kappa\gamma)^2 - 2\sqrt{3}(\kappa\gamma)^3 + \frac{5\sqrt{3}}{2}(\kappa\gamma)^4 - 3\sqrt{3}(\kappa\gamma)^5 + \dots = \\ = 2\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)^3 - \frac{23}{240}\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)^5 + \dots$$

Poszukując $\omega - \pi/3$ w postaci $\omega - \pi/3 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\kappa\gamma)^i$ otrzymujemy

$$(6.13) \quad \omega - \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(xy) + \frac{3\sqrt{3}}{8}(xy)^2 - \frac{5\sqrt{3}}{16}(xy)^3 + \frac{37}{128}\sqrt{3}(xy)^4 - \\ - \frac{369}{1280}(xy)^5 + \dots$$

Następnie rozwijamy prawe strony równości (6.7) w otoczeniu $\omega = \pi/3$ i po wykorzystaniu (6.13) otrzymujemy wzory (6.3)_{2,3} przy $\lambda = 1$.

Wyniki, otrzymane proponowaną w tej pracy metodą, pokrywają się więc ze znanym rozwiązaniem w przypadku tarczy, której brzeg jest łukiem okręgu koła. Zaletą tej metody jest to, że pozwala znaleźć stan naprężenia dla tarczy idealnie plastycznej i nieściśliwej o dowolnym brzegu, opisanym równaniem naturalnym, przy danych początkowych, spełniających warunek (5.3), niezależnie od typu rozpatrywanego układu równań (3.3).

Literatura cytowana w tekście

1. Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, ГИТТЛ, Москва 1956.
2. S. KOMLJENOVIC i J. RYCHLEWSKI, *The Cauchy problem for the case of plane plastic strain solved with use of power series*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 8 (1963).
3. I. PIETROWSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, Warszawa 1955.

Резюме

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В работе определяется напряженное состояние в идеальнопластической, несжимаемой пластине, нагруженной по контуру. Контур тела задан аналитическим натуральным уравнением (3.1) а нагрузка аналитическими функциями (3.4). Использована специальная сетка криволинейных координат.

Решение приводится в виде степенных рядов по расстоянию от контура. Коэффициенты рядов это функции координаты длины на контуре. Получено решение для кругового контура и показано, что оно совпадает с известным решением этой задачи (см. [1]). Результаты работы представляют особый интерес при исследовании напряженного состояния вблизи контура тела.

Summary

A POWER SERIES SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF PLANE PLASTIC STRESS

The state of stress is determined for a perfectly plastic incompressible disc loaded on the edge. This edge is described by the natural analytic equation (3.1) and the load — by the analytic functions (3.4). A special set of curvilinear coordinates is used.

The solution is obtained in the form of power series of the distance from the edge, the coefficients of the series being functions of the arch length of the edge. This is done for a disc, the edge of which is a circular arch the solution being shown to coincide with the existing solution of the same problem (cf. [1]). The results are particularly interesting in the neighbourhood of the edge.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 grudnia 1966 r.