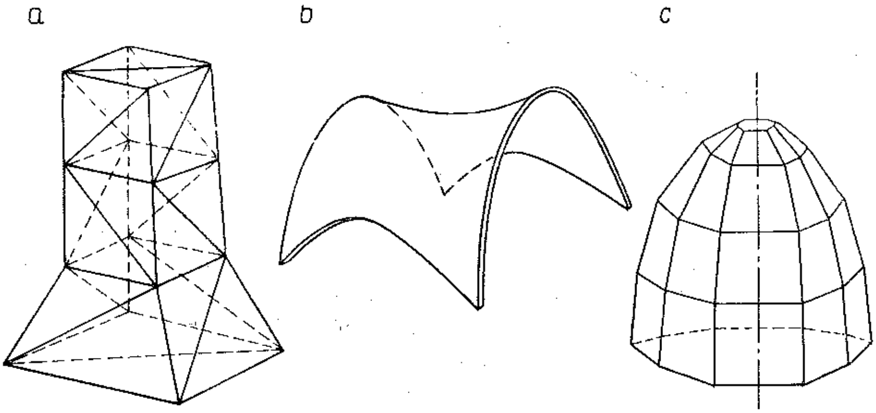
ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 15 (1967)

O OSOBLIWOŚCI PEWNYCH NIEGŁADKICH KONSTRUKCJI POWIERZCHNIOWYCH (I)

HENRYK FRĄCKIEWICZ, ADAM LEGAT (WARSZAWA)

1. Pojęcia wstępne

1.1. Konstrukcjami powierzchniowymi nazywać będziemy układy, w których pod działaniem obciążenia zewnętrznego powstają siły wewnętrzne styczne do pewnej powierzchni, zwanej dalej powierzchnią konstrukcji. Z powyższego określenia widać, że to, czy dana konstrukcja jest powierzchniową, zależy również od sposobu przyłożenia sił zewnętrznych.



Rys. 1

Na rysunku 1 pokazano przykłady konstrukcji, które przy założeniu zerowej lokalnej sztywności giętnej i skrętnej prętów i blach mogą być uważane za konstrukcje powierzchniowe. W przypadku kratownic (rys. 1a) powierzchnią konstrukcji jest powierzchnia utworzona przez płaszczyzny ścian, w przypadku powłok (rys. 1b) powierzchnią konstrukcji jest powierzchnia środkowa powłoki.

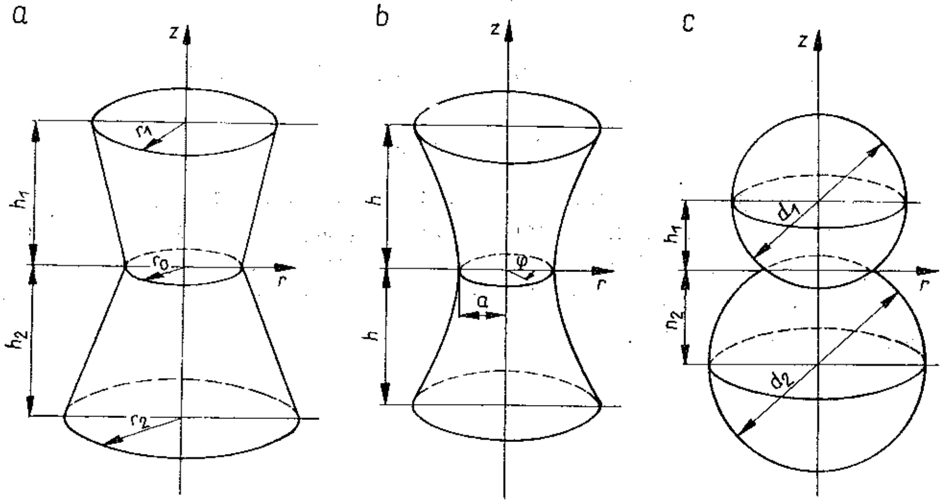
Konstrukcje powierzchniowe możemy podzielić na dwie klasy: a) konstrukcje powierzchniowe gładkie (znaczna większość powłok) (1), b) konstrukcje powierzchniowe niegładkie (kratownice przestrzenne, niektóre typy powłok, np. rys. 1c) (2).

---

(1) Konstrukcją powierzchniową gładką nazywamy taką konstrukcję, do powierzchni której można w każdym punkcie poprowadzić jednoznacznie płaszczyznę styczną.

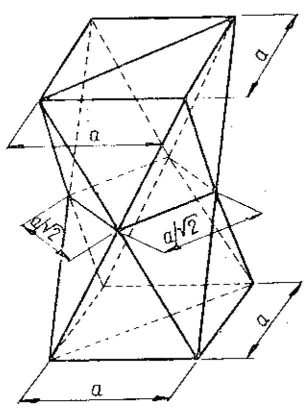
(2) Jeżeli dla danej konstrukcji powyższy warunek nie jest spełniony, to konstrukcję taką nazywamy niegładką.

1.2. Pojęcie postaci osobliwej konstrukcji powierzchniowej związane jest z kryterium sztywności. Warunkiem koniecznym, aby konstrukcja powierzchniowa była sztywna, jest aby była ona zamknięta. W klasie konstrukcji zamkniętych są jednak konstrukcje niesztywne, które nazywamy konstrukcjami o postaci osobliwej. Można zatem zdefiniować powierzchnie o postaci osobliwej jako zamknięte powierzchnie niesztywne.



Rys. 2

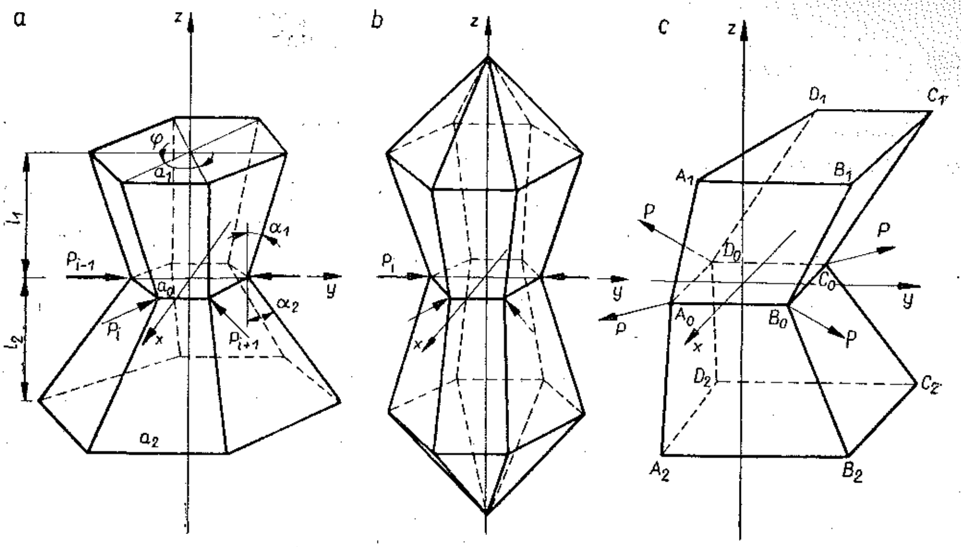
W teorii powierzchni gładkich powierzchnię zamkniętą uważa się za niesztywną (osobliwą), jeżeli jej punktom można nadać przemieszczenia wywołujące zmianę współczynników drugiej formy kwadratowej bez zmiany współczynników pierwszej formy kwadratowej. Powyższe kryterium nazywamy kinematycznym.



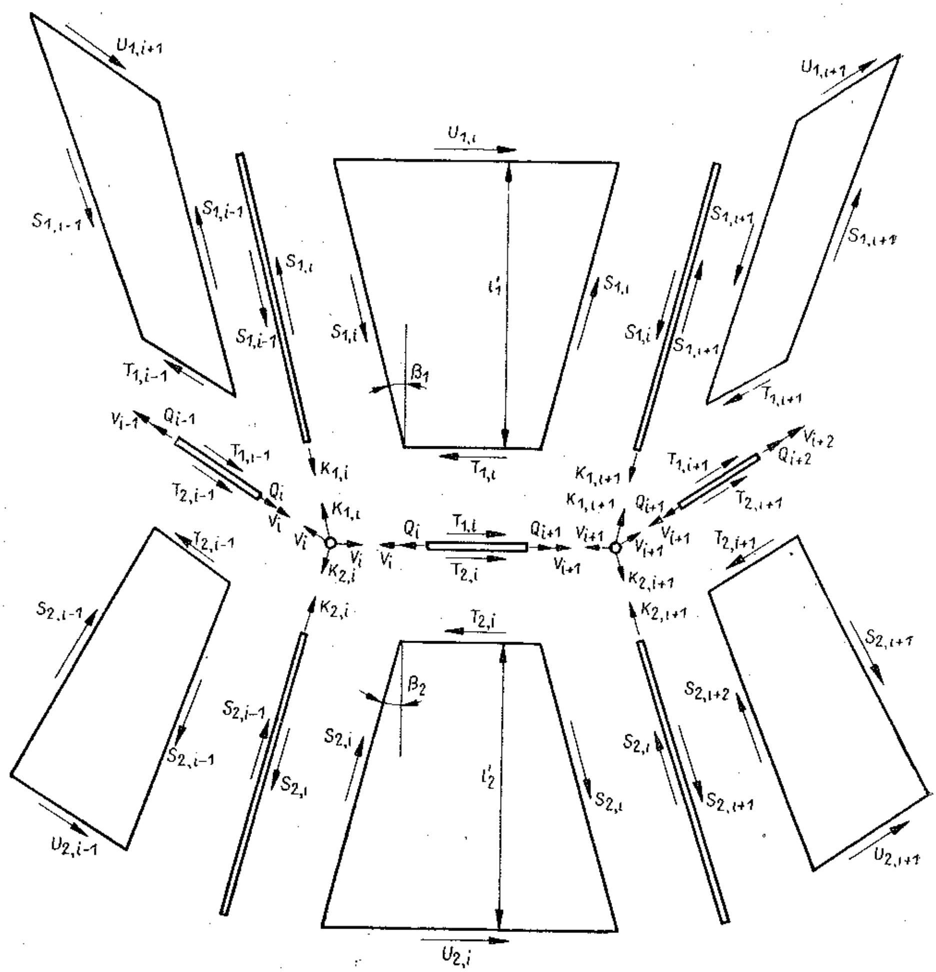
Rys. 3

Zagadnienie osobliwości powierzchni gładkich zostało opracowane przez wielu autorów. Dla nas najbardziej interesujące są rezultaty otrzymane przez W. Z. Własowa [1], który zbadał m.in. postać osobliwą trzech typów powłok (rys. 2).

Problem osobliwości, a tym samym sztywności konstrukcji niegładkich, nie został dotychczas opracowany. Istnieją pojedyncze prace [2 i 3], których autorzy podają przykłady konstrukcji o postaci osobliwej (np. rys. 3). Znane jest także twierdzenie Cauchy'ego [4], wg którego powierzchnia zamknięta, wszędzie wypukła, nie może być osobliwa. Zgodnie z tym twierdzeniem konstrukcje o postaci osobliwej mogą się zawierać tylko w klasie konstrukcji, których powierzchnie mają wklęsłości. Problem wyodrębnienia i opisania konstrukcji osobliwych, a więc niesztywnych (chociaż zamkniętych), jest zagadnieniem technicznie ważnym i zasługuje na gruntowne opracowanie.



Rys. 4



Rys. 5

Badanie postaci osobliwych konstrukcji niegładkich jest możliwe w oparciu o kryterium statyczne bądź kinematyczne.

Kryterium statyczne: konstrukcją o postaci osobliwej nazywać będziemy taką konstrukcję o powierzchni zamkniętej, dla której można znaleźć chociaż jedno skończone obciążenie zewnętrzne, które nie może być przeniesione skończonymi siłami wewnętrznymi. Obciążenie to wywołuje zatem w konstrukcji nieskończenie duże siły wewnętrzne.

Sformułowanie kryterium kinematycznego dla konstrukcji niegładkich wymaga odpowiedniego zdefiniowania współczynników pierwszej i drugiej formy kwadratowej. Zostały one zdefiniowane w pracy [5]. Treść kryterium kinematycznego jest taka sama jak dla powierzchni gładkich.

W pracy posługiwać się będziemy kryterium statycznym. Rozpatrzymy trzy typy konstrukcji pokazane na rys. 4. Każda z nich zbudowana jest z płaskich ścian zamykających sobą pewien jednospójny obszar, a więc spełnia warunek konieczny sztywności i jest statycznie wyznaczalna. Niech podobnie jak powłoka w stanie błonowym konstrukcja przenosi tylko siły wewnętrzne typu powierzchniowego (zgodnie z definicją konstrukcji powierzchniowej), przy czym żądamy, aby ściana przenosiła tylko siły styczne, natomiast pasy i rozpórki — siły styczne i normalne działające wzdłuż ich osi (rys. 5).

2. Rozwiązanie dla konstrukcji I typu (rys. 4a)

Obciążenie stanowi układ sił P_i leżących w płaszczyźnie xy, przy czym

$$P_i = P_0 \cos(ni\varphi), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k,$$

gdzie i oznacza numer kolejnego naroża, k liczbę naroży w płaszczyźnie xy oraz $\varphi = 2\pi/k$.

Obciążenie to możemy traktować jako odpowiadające n-temu wyrazowi szeregu trygonometrycznego, przez który zostało wyrażone jakieś bardziej ogólne obciążenie. Wywołane działaniem obciążenia P siły wewnętrzne wyznaczymy z warunków równowagi poszczególnych elementów konstrukcji (rys. 5) i w oparciu o statyczne kryterium określimy warunek, jaki musi być spełniony, aby konstrukcja miała postać osobliwą. Można wykazać, że wyżej wspomniane warunki równowagi sprowadzają się do następujących równań:

$$\begin{gathered}
Q_i - Q_{i+1} + V_i - V_{i+1} - T_{1,i} - T_{2,i} = 0, \\
S_{1,i-1} - S_{1,i} + K_{1,i} = 0, \qquad S_{2,i-1} - S_{2,i} + K_{2,i} = 0, \\
S_{1,i} a_1 \cos\beta_1 - T_{1,i} l_1' = 0, \qquad S_{2,i} a_2 \cos\beta_2 - T_{2,i} l_2' = 0, \\
K_{1,i} \cos\alpha_1 - K_{2,i} \cos\alpha_2 = 0, \qquad V_i = \frac{W_i}{2\sin\frac{\varphi}{2}},
\end{gathered} \tag{2.1}$$

gdzie

$$Q_i = \frac{P_i}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \qquad W_i = K_{1,i}\sin\alpha_1 + K_{2,i}\sin\alpha_2$$

oraz gdzie α oznacza kąt nachylenia pasa do osi konstrukcji. Wyrażając siły T przez S (z czwartego i piątego równania), a siły V przez K (z siódmego równania) i podstawiając do równania pierwszego otrzymamy równanie równowagi i-tej rozpórki w następującej postaci:

$$Q_i - Q_{i+1} + A_1 K_{1,i} - A_1 K_{1,i+1} - B_1 S_{1,i} - B_2 S_{2,i} = 0,$$

gdzie

$$A_1 = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\alpha_2}, \qquad B_1 = \frac{a_1}{l_1'}\cos\beta_1, \qquad B_2 = \frac{a_2}{l_2'}\cos\beta_2.$$

Pisząc następnie identyczne równanie dla $i-1$ rozpórki i wyrażając K_2 przez K_1 (z równania szóstego) otrzymamy po odjęciu obu tych równań stronami i wykorzystaniu drugiego i trzeciego równania (2.1) równanie następujące:

$$A_1 K_{1,i-1} + (B_1 - B_2 C_1 - 2A_1) K_{1,i} + A_1 K_{1,i+1} = -Q_{i-1} + 2Q_i - Q_{i+1},$$

gdzie

$$C_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}.$$

Poszukujemy rozwiązania tego równania w postaci

$$K_{1,i} = K_{1,0}\cos(ni\varphi).$$

Wyrażając współczynniki A_1, B_1, B_2 i C_1 przez wymiary l_1, l_2, a_1, a_0 i a_2 otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$K_{1,0} = P_0 \frac{2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{a_1-a_0}{2l_1}\right)^2}}{\left(\frac{a_1}{l_1}+\frac{a_2}{l_2}\right)\left(\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{n\varphi}{2}} + \frac{\frac{a_0-a_2}{l_2} - \frac{a_1-a_0}{l_1}}{\frac{a_1}{l_1}+\frac{a_2}{l_2}}\right)},$$

$$K_{2,0} = P_0 \frac{2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{a_2-a_0}{2l_2}\right)^2}}{\left(\frac{a_1}{l_1}+\frac{a_2}{l_2}\right)\left(\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{n\varphi}{2}} + \frac{\frac{a_0-a_2}{l_2} - \frac{a_1-a_0}{l_1}}{\frac{a_1}{l_1}+\frac{a_2}{l_2}}\right)}.$$

Obliczenie pozostałych sił wewnętrznych nie jest konieczne dla dalszych rozważań. Konstrukcja przybiera postać osobliwą, jeśli mianownik powyższych wyrażeń jest równy zeru. Ma to miejsce, gdy

$$\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}+\frac{\frac{a_0-a_2}{l_2}-\frac{a_1-a_0}{l_1}}{\frac{a_1}{l_1}+\frac{a_2}{l_2}}=0.$$

Przekształcając powyższe równanie możemy otrzymać wyrażenie określające warunek, jaki musi spełniać długość a_0 środkowej rozpórki, aby konstrukcja była osobliwa:

$$a_0=\frac{a_1l_2+a_2l_1}{l_1+l_2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}\right) \tag{2.2}$$

lub wyrażający φ przez k

$$a_0=\frac{a_1l_2+a_2l_1}{l_1+l_2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi}{k}}{\sin^2\frac{n\pi}{k}}\right).$$

W powyższych wzorach a_1, l_1, a_2 i l_2 mogą przyjmować dowolne wartości, liczba boków k może być dowolną liczbą całkowitą większą od trzech, n musi być podzielnikiem k i spełniać nierówność $1<n\leqslant k/2$. Jeżeli $n=0$ lub $n=k$, to $K=0$ i całe obciążenie równoważy się w płaszczyźnie środkowych rozpórek; nie może więc być mowy o osobliwości. Przyjęcie $n=1$ jest niedopuszczalne, bo wtedy układ sił zewnętrznych nie byłby w równowadze; przypadek $n>k$ nie ma sensu.

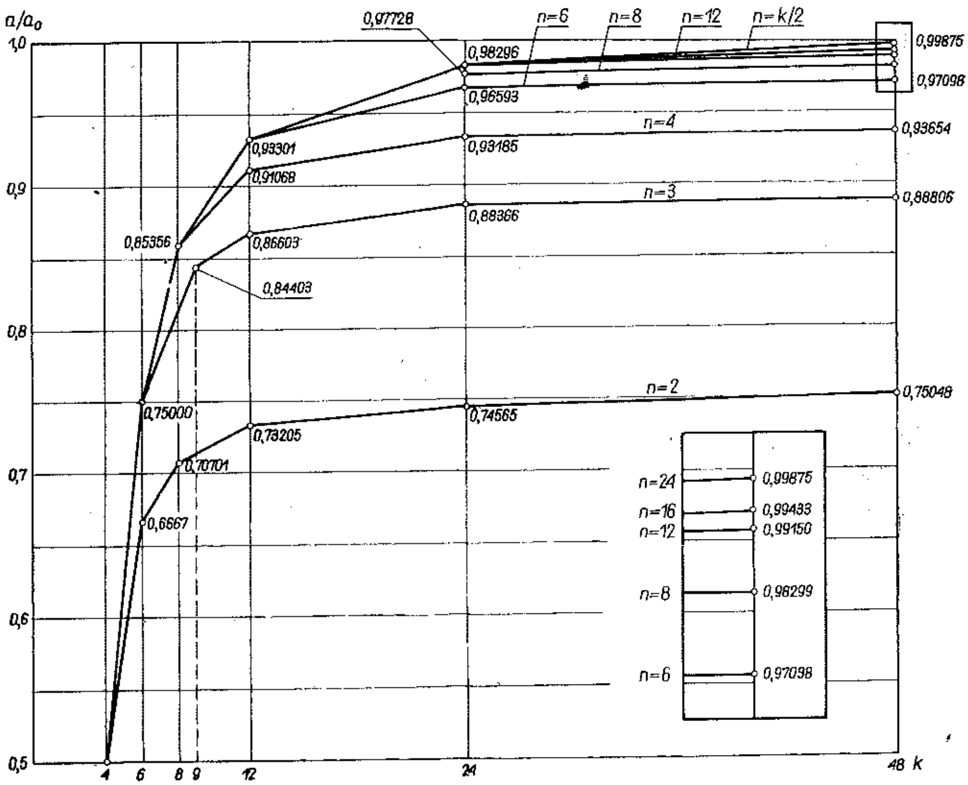
Jeżeli $(a_0-a_2)/l_2>(a_1-a_0)/l_1$, tzn. jeżeli konstrukcja jest wypukła, mianownik wyrażenia na siłę K jest zawsze dodatni, a więc zgodnie z cytowanym twierdzeniem Cauchy'ego nie może istnieć postać osobliwa.

Jeżeli mamy konstrukcję symetryczną względem płaszczyzny działania obciążenia, tzn. $a_1=a_2=a$ i $l_1=l_2=l$, to wzór (2.2) przybiera postać

$$a_0=a\left(1-\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}\right). \tag{2.3}$$

Można udowodnić, że dla danego n istnieje tylko jedna wartość stosunku a_0/a, przy którym konstrukcja przybiera postać osobliwą.

Obliczono stosunki a_0/a, przy których konstrukcja przybiera postać osobliwą. Wyniki zostały przedstawione na wykresie (rys. 6). Zwracamy uwagę, że nie jest konieczne, aby k było liczbą parzystą.



Rys. 6

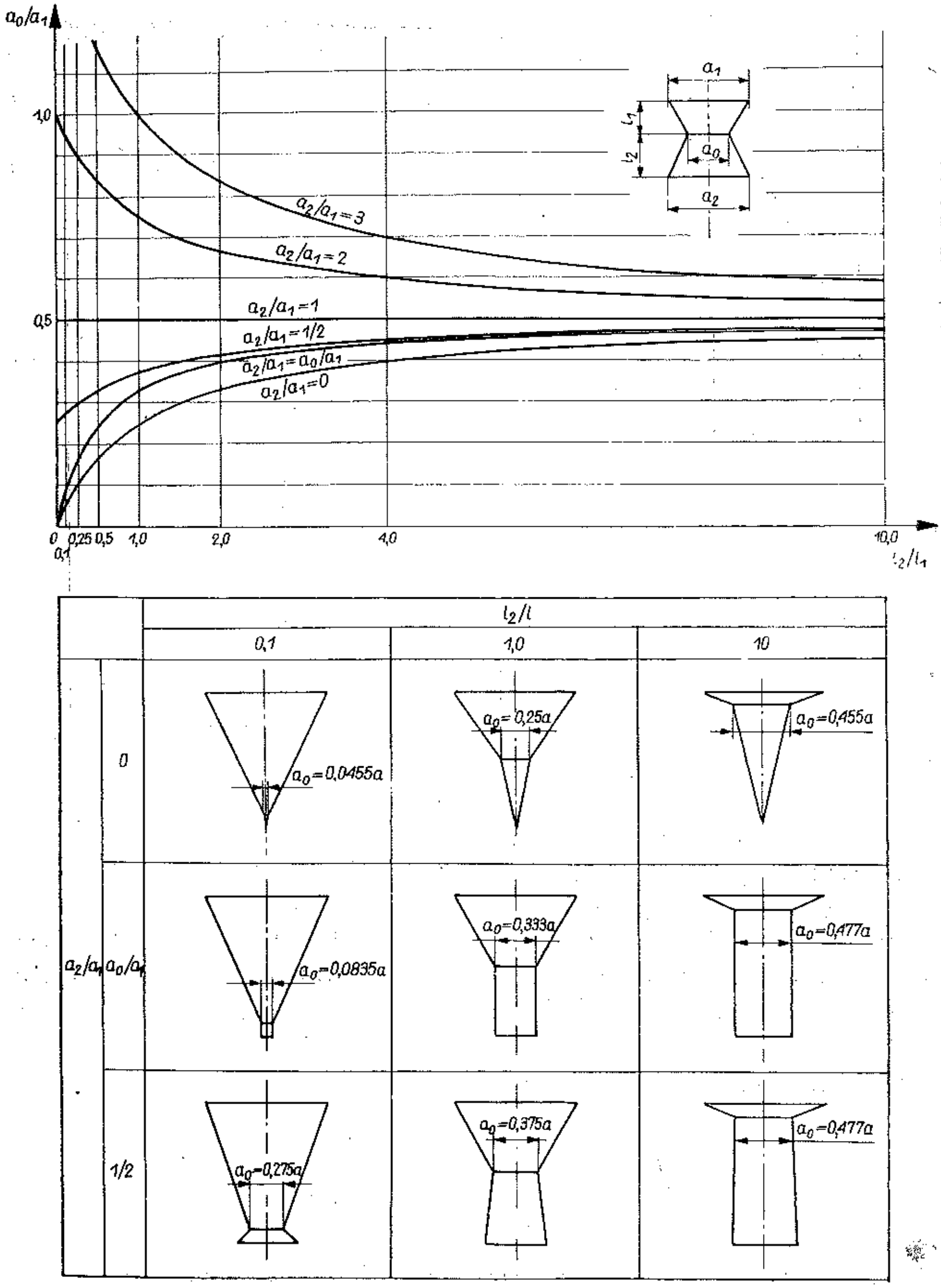
Wpływ zmiany długości l_1 i l_2 na stosunek a_0/a zanalizowano na przykładzie konstrukcji o kwadratowej wrędze ($k = 4$). Jeżeli $a_1 = a_2$, to przy dowolnym stosunku l_1/l_2 otrzymuje się ten sam stosunek $a_0/a = 0{,}5$. Jeżeli natomiast $a_1 \neq a_2$, to stosunek a_0/a, przy którym konstrukcja przybiera postać osobliwą, zależy od zależności pomiędzy l_1 i l_2. Zależność między l_1/l_2 od a_0/a pokazano na wykresie (rys. 7).

Wzór (2.3) można wyrazić nieco inaczej podstawiając

$$r = \frac{a}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}, \quad r_0 = \frac{a_0}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}},$$

gdzie r oznacza promień koła opisanego na wrędze konstrukcji. Wtedy

$$r_0 = r\left(1 - \frac{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{\sin^2\dfrac{n\varphi}{2}}\right).$$



a0/a1
1,0
0,5
a1
l1
l2
a0
a2
a2/a1=3
a2/a1=2
a2/a1=1
a2/a1=1/2
a2/a1=a0/a1
a2/a1=0
0
0,1
0,25
0,5
1,0
2,0
4,0
10,0
l2/l1
l2/l
0,1
1,0
10
a2/a1
0
a0/a1
1/2
a0=0,0455a
a0=0,25a
a0=0,455a
a0=0,0835a
a0=0,333a
a0=0,477a
a0=0,275a
a0=0,375a
a0=0,477a

Rys. 7

Zobaczmy teraz, jak będzie wyglądał warunek osobliwości, gdy ilość ścian k będzie nieskończenie wzrastać, tzn. gdy φ dąży do zera, a konstrukcja przybiera kształt dwóch stożków ściętych, połączonych mniejszymi podstawami. Ponieważ

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{n\varphi}{2}} = \frac{1}{n^2},$$

to warunek osobliwości wyrazi się następująco:

$$r_0 = r\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Zatem dla $n = k/2$ kształt konstrukcji osobliwej dąży do walca, gdy ilość ścian dąży do nieskończoności. Widać to zresztą z wykresu (rys. 6).

Otrzymany wynik jest identyczny z wynikiem otrzymanym przez WŁASOWA dla powłoki zbudowanej z dwóch stożków, pokazanej na rys. 2a. Na razie nie znamy rozwiązania dla konstrukcji niegładkiej, która w granicznym przypadku przechodzi w powłokę hiperboliczną (rys. 2b) zbadaną przez Własowa. Dla powłoki takiej podaje on następujący warunek osobliwości:

$$h = b\,\frac{1+\cos\frac{m\pi}{n}}{\sin\frac{m\pi}{n}},$$

gdzie b oznacza urojoną półoś hiperboli, a m i n dowolne liczby naturalne.

3. Rozwiązanie dla konstrukcji II typu (rys. 4b)

Sposób rozwiązania jest taki sam jak w p. 2. Układ równań równowagi poszczególnych elementów konstrukcji (rys. 8) sprowadza się do równań następujących:

$$Q_i - Q_{i+1} + V_i - V_{i+1} - T_{1,i} - T_{2,i} = 0, \quad U_{1,i} + Y_{1,i} - Y_{1,i+1} = 0,$$

$$S_{1,i-1} - S_{1,i} + K_{1,i} + N_{1,i} = 0, \quad S_{1,i} a_1 \cos\beta_1 - T_{1,i} l_1' = 0,$$

$$S_{1,i} a_0 \cos\beta_1 - U_{1,i} l_i' = 0, \quad K_{1,i}\cos\alpha_1 - K_{2,i}\cos\alpha_2 = 0,$$

$$V_i = \frac{W_i}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad M_{1,i}\sin\alpha_1 - N_{1,i}\cos\alpha_1 = 0, \quad Y_{1,i} = \frac{Z_{1,i}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

gdzie

$$W_i = K_{1,i}\sin\alpha_1 + K_{2,i}\sin\alpha_2, \quad Z_i = \frac{N_{1,i}}{\sin\alpha_1},$$

a pozostałe oznaczenia są takie same jak w p. 2.

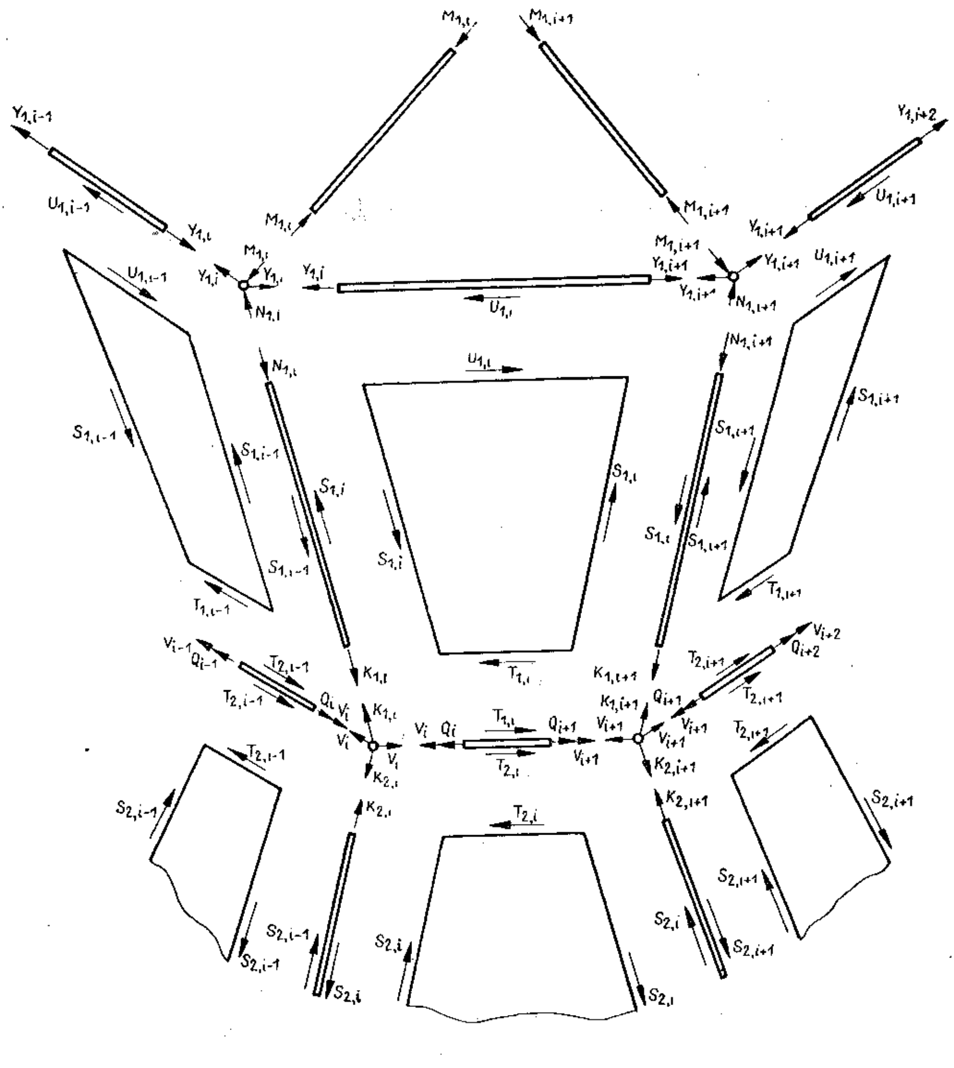
Zakładając rozkład sił wewnętrznych w postaci

$$K_{1,i} = K_{1,0} \cos ni\varphi, \qquad K_{2,i} = K_{2,0} \cos ni\varphi,$$

$$N_{1,i} = N_{1,0} \cos ni\varphi, \qquad N_{2,i} = N_{2,0} \cos ni\varphi,$$

$$S_{1,i} = S_{1,0} [\cos n\varphi\,(i+1) - \cos n\varphi i].$$

$$S_{2,i} = S_{2,0} [\cos n\varphi\,(i+1) - \cos n\varphi i]$$



Rys. 8

otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$K_{1,0}=\frac{2P_0\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{a_1-a_0}{2l_1}\right)^2}}{\frac{1}{l_1}\left[\frac{a_1}{\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{a_0(a_1-a_0)}{4l_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(a_1-a_0)^2}}-a_1+a_0\right]+\frac{1}{l_2}\left[\frac{a_2}{\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{a_0(a_2-a_0)}{4l_2^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(a_2-a_0)^2}}-a_2+a_0\right]},$$

$$K_{2,0}=\frac{2P_0\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{a_2-a_0}{2l_2}\right)^2}}{\frac{1}{l_1}\left[\frac{a_1}{\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{a_0(a_1-a_0)}{4l_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(a_1-a_0)^2}}-a_1+a_0\right]+\frac{1}{l_2}\left[\frac{a_2}{\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{a_0(a_2-a_0)}{4l_2^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(a_2-a_0)^2}}-a_2+a_0\right]}.$$

Warunek osobliwości otrzymamy podobnie jak w poprzednim przypadku przyrównując do zera mianownik wyrażenia na siłę K:

$$\frac{1}{l_1}\left[\frac{a_1}{\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{a_0(a_1-a_0)}{4l_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(a_1-a_0)^2}}-a_1+a_0\right]+\frac{1}{l_2}\left[\frac{a_2}{\frac{\sin^2\frac{n\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}+\frac{a_0(a_2-a_0)}{4l_2^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+(a_2-a_0)^2}}-a_2+a_0\right]=0. \tag{3.1}$$

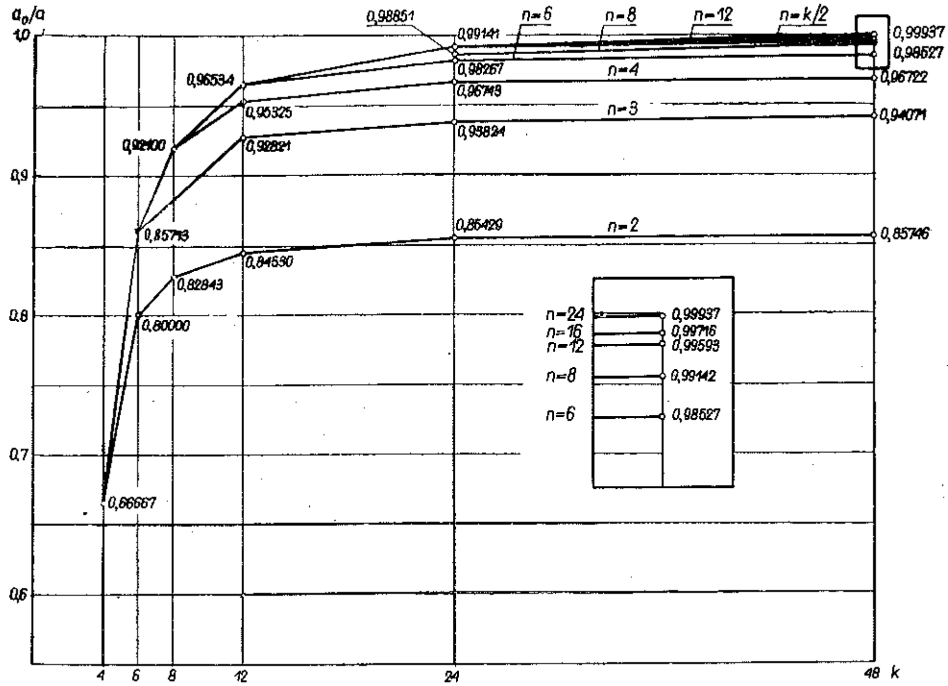
Szukając zależności między długościami boków a i a_0, jaka musi zachodzić, aby konstrukcja przybierała postać osobliwą, ograniczymy się do wypadku konstrukcji symetrycznej względem środkowej wręgi. Założymy ponadto, że

$$l = r - r_0 = \frac{a - a_0}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Warunek osobliwości przedstawia się wówczas następująco:

$$a_0 = a \left(1 - \frac{1}{2 \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 1} \right).$$

Dla przykładu obliczono stosunki a_0/a dla kilku konstrukcji, przy których przybierają one postać osobliwą. Wyniki zostały przedstawione na wykresie (rys. 9). Jak widać, konstrukcja przybiera postać osobliwą już przy mniejszej wklęsłości niż konstrukcja I typu.

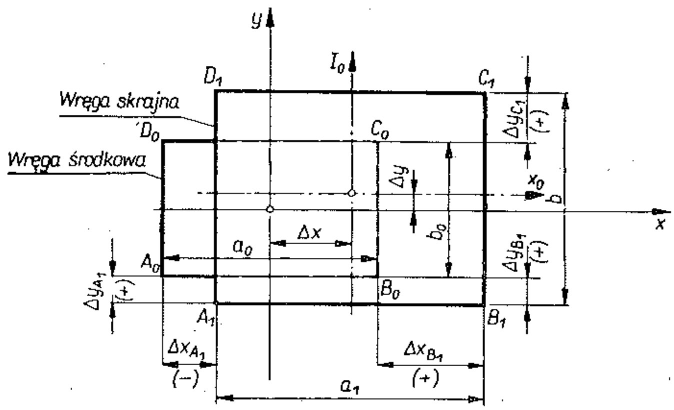


Rys. 9

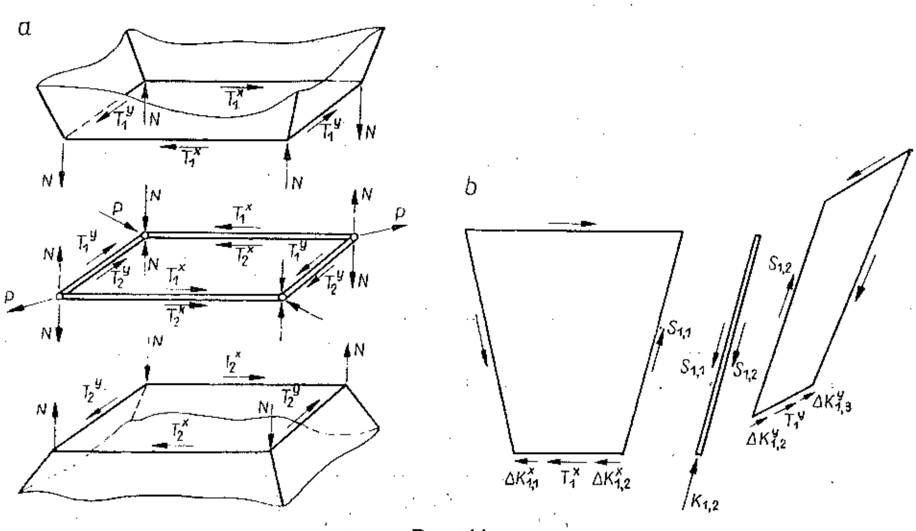
Konstrukcja II typu jest nieco podobna do analizowanej przez Własowa powłoki (rys. 2c); zarówno na jej górnej jak i dolnej części można opisać kulę. Mimo to jednak nie przechodzi w granicy w tę powłokę, a w powłokę zbudowaną ze stożków. Dla porównania podajemy wynik, jaki otrzymał Własow dla swojej powłoki. Warunkiem osobliwości jest, aby $n = d/h$, tzn. stosunek średnic obu kul do odległości między ich środkami musi być liczbą całkowitą.

4. Rozwiązanie dla konstrukcji III typu

Rozpatrujemy konstrukcję o trzech wręgach prostokątnych, których środki nie leżą na jednej prostej. Żądamy jedynie, aby ich krawędzie były do siebie równoległe, tzn. aby ściany boczne były płaskie. Obciążenie stanowi układ czterech sił P działających wzdłuż przekątnych wręgi środkowej. Udowodnimy, że przesunięcie wręg (rys. 10) zupełnie nie wpływa na warunek osobliwości.



Rys. 10



Rys. 11

Niech między dolną i górną częścią konstrukcji a wręgą środkową istnieją oddziaływania w postaci sił T i N (rys. 11a). Z warunków równowagi tych części konstrukcji dla dalszych rozważań istotne są następujące równania:

$$T_1^x + T_2^x = 2P\frac{b_0}{\sqrt{a_0^2+b_0^2}}, \quad T_1^y = T_1^x\frac{b_0}{a_0}, \quad T_2^y = T_2^x\frac{b_0}{a_0}. \tag{4.1}$$

Dzieląc następnie górną część konstrukcji na pasy i ściany możemy napisać równania równowagi tych elementów, z których potrzebne nam będą trzy równania dotyczące równowagi dwóch ścian i zawartego między nimi pasa (rys. 11b):

$$\begin{gathered}(T_1^x+\Delta K_{1,1}^x+\Delta K_{1,2}^x)\, l'_{1,1} = S_{1,1}\,a_1\cos\beta_{1,1},\\ (T_1^y+\Delta K_{1,2}^y+\Delta K_{1,3}^y)\, l'_{1,2} = S_{1,2}\,b_1\cos\beta_{1,2},\\ S_{1,1}+S_{1,2} = K_{1,2},\end{gathered} \tag{4.2}$$

gdzie

$$K_{1,2} = N\frac{l_{B_1B_0}}{l_1}$$

oznacza składową siły N wzdłuż pasa oraz gdzie symbole

$$\Delta K_{1,1}^x = N\frac{\Delta x_{A_1}}{l_1}, \quad \Delta K_{1,2}^x = N\frac{\Delta x_{B_1}}{l_1}$$

$$\Delta K_{1,2}^y = N\frac{\Delta y_{B_1}}{l_1}, \quad \Delta K_{1,3}^y = N\frac{\Delta y_{C_1}}{l_1}$$

oznaczają składowe siły N wzdłuż poziomych krawędzi ścian bocznych. Mamy również

$$\cos\beta_{1,1} = \frac{l'_{1,1}}{l_{B_1B_0}}, \quad \cos\beta_{1,2} = \frac{l'_{1,2}}{l_{B_1B_0}}.$$

Wykorzystując te zależności i rugując z układu (4.2) wielkości $S_{1,1}$ i $S_{1,2}$ otrzymamy

$$\left(T_1^x+N\frac{\Delta x_{A_1}+\Delta x_{B_1}}{l_1}\right)b_1 + \left(T_1^y+N\frac{\Delta y_{B_1}+\Delta y_{C_1}}{l_1}\right)a_1 = N\frac{a_1 b_1}{l_1},$$

przy czym

$$\Delta x_{A_1}+\Delta x_{B_1} = a_1 - a_0, \quad \Delta y_{B_1}+\Delta y_{C_1} = b_1 - b_0.$$

Jak widać, udało się wyeliminować z równań wymiary Δx i Δy określające wzajemne przesunięcia wręg. W dalszym ciągu wykorzystując układ równań (4.1) i identyczne z (4.2) równania dla dowolnej części konstrukcji otrzymujemy zależność między siłami N i P:

$$N = 2P\frac{b_0}{a_0\sqrt{a_0^2+b_0^2}}\cdot\frac{1}{l_1\left(1-\dfrac{a_1 b_1}{a_0 b_1+b_0 a_1}\right)+l_2\left(1-\dfrac{a_2 b_2}{a_0 b_2+b_0 a_2}\right)}.$$

Aby konstrukcja przybrała postać osobliwą musi być

$$l_1\left(1-\frac{a_1 b_1}{a_0 b_1+b_0 a_1}\right)+l_2\left(1-\frac{a_2 b_2}{a_0 b_2+b_0 a_2}\right)=0. \tag{4.3}$$

Jeśli założymy, że

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a}{b},\quad a_1=a_2=a,\quad l_1=l_2,$$

to

$$\frac{a_0}{a}=\frac{b_0}{b}=\frac{1}{2}.$$

Wynik ten pokrywa się z wynikiem uzyskanym w p. 2.

1. Jeśli np. $a_1=a$, $b_1=2a$, $a_2=2a$, $b_2=a$, $a_0=b_0$, $l_1=l_2$, to warunkiem osobliwości są warunki

$$a_0=\frac{2}{3}a,\quad b_0=\frac{2}{3}a.$$

2. Jeśli $a_1=a$, $b_1=2a$, $a_2=a$, $b_2=2a$, $a_0=2b_0$, $l_1=l_2$, to warunkiem osobliwości są warunki

$$a_0=\frac{4}{5}a,\quad b_0=\frac{2}{5}a.$$

5. Wnioski

Jak widać z otrzymanych wzorów (2.2), (3.1) i (4.3), na warunek osobliwości ma wpływ wiele niezależnych czynników, jakimi są wymiary konstrukcji występujące w powyższych wzorach. Na warunek ów nie wpływa natomiast konstrukcja samych ścian (tzn. sposób ustawienia prętów czy usztywnienia blachą).

Podany sposób analizy konstrukcji pod kątem możliwości przybrania przez nią postaci osobliwej można oczywiście stosować i do innych konstrukcji tej klasy. Analiza taka jest konieczna przy projektowaniu konstrukcji posiadających wklęsłości; nie tylko ze względu na możliwość przypadkowego dobrania takich wymiarów, które czynią konstrukcję osobliwą. Konstrukcja zbliżona wymiarami do osobliwej jest znacznie mniej sztywna i doznaje w związku z tym znacznie większych odkształceń niż konstrukcja o wymiarach dalekich od osobliwości. Może się również zdarzyć, że konstrukcja bliska osobliwej może na skutek błędów wykonawczych bądź deformacji wywołanych działaniem obciążenia (także przypadkowego) przejść w konstrukcję o postaci osobliwej. Elementy konstrukcji musiałyby przenieść wtedy siły typu zgięciowego, na które nie były projektowane, co grozi zniszczeniem konstrukcji.

Literatura cytowana w tekście

1. В. З. Власов, *Избранные труды*, Изд. АН СССР, Москва 1962.
2. Z. Brzoska, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN, 1961.
3. А. А. Уманский, *Статика и кинематика ферм*, Гос. Изд. Тех. Лит., Москва 1957.
4. А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Гостехиздат, 1950.
5. H. Frąckiewicz, *The geometry of a discrete set of points on a surface*, Arch. Mech. Stos., 2, **19** (1967).

Резюме

О СИНГУЛЯРНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе рассматриваются некоторые классы негладких замкнутых поверхностей. Формулируются критерии, дающие возможность исследовать их геометрическую изменяемость. На основе этих критериев определяются геометрические параметры и некоторые зависимости между ними, при выполнении которых, исследуемые поверхности становятся геометрически изменяемыми поверхностями. Для некоторого типа негладких поверхностей получаются формулы определяющие их геометрическую изменяемость, которые после предельного перехода к гладким поверхностям становятся тождественными формулами, выделенным В. З. Влассовым для конических оболочек. Работа иллюстрируется рядом диаграмм, дающих возможность правильно проектировать пространственные поверхностные конструкции (т.е. проектировать их как геометрически неизменяемые конструкции).

Summary

THE SINGULARITY OF SOME NON-SMOOTH SURFACE STRUCTURES

The object of the considerations are non-smooth closed surfaces of certain classes. To enable the of their geometrical variability some criteria are formulated and used to determine the geometric parameters and certain relations between them, the satisfaction of which makes a surface geometrically variable. For irregulat surfaces of a certain type equations are obtained describing their geometrical variability. By passing to smooth surfaces these equations become identical with those derived by V.Z. Vlasov for conical surfaces. The paper is illustrated by detailed diagrams enabling us to design correct (that is geometrically invariable) spatial surface structures.

KATEDRA MECHANIKI OGÓLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 listopada 1966 r.