

STATECZNOŚĆ GRUBOŚCIENNEJ RURY
OBciążONEJ CIŚNIENIEM ZEWNĘTRZNYM

BERNARD DUSZCZYK (WARSZAWA)

Wstęp

W niniejszej pracy rozważa się zagadnienie utraty stateczności dla grubościennej rury przy niejednorodnej deformacji w kierunku promieniowym, spowodowanej prostopadłym do aktualnej powierzchni i stałym co do modułu obciążeniem zewnętrznym q , oraz jednorodnej w kierunku osiowym, wywołanej stałym równoległym do osi rury obciążeniem q_1 . Z uwagi na zastosowaną metodę statyczne parametry obciążenia zostały zastąpione przez geometryczne: promieniowe przemieszczenie ścianki zewnętrznej oraz skrócenie (wydłużenie) rury. Podobnym zagadnieniem dla kuli zajmował się Z. WESOŁOWSKI [6].

W pracy opieramy się na ogólnej teorii małych dodatkowych odkształceń opracowanej przez A. E. GREENA, R. S. RIVLINA i R. T. SHIELDA. Rozważany materiał est sprężysty, jednorodny, izotropowy i nieściśliwy o dowolnej fizycznej nielinowości. Szczegółową dyskusję wyników przeprowadzono jednak tylko dla materiału Mooney'a.

Jako kryterium utraty stateczności przyjmujemy osiągnięcie takiego stanu, w którym problem brzegowy dla dodatkowych deformacji dopuszcza istnienie wielu rozwiązań (por. [2]).

Oznaczenia stosowane w pracy w zasadzie pokrywają się z oznaczeniami używanymi w monografii A. E. GREENA i W. ZERNY [1].

1. Wstępny, skończony stan odkształcenia

Rozważamy grubościenną rurę z materiału sprężystego jednorodnego, izotropowego i nieściśliwego, która w stanie nieodkształconym (stan \hat{B}) ma promień zewnętrzny \hat{a} , wewnętrzny \hat{b} oraz długość \hat{l} , przy czym $\hat{b} = \hat{\mu}\hat{a}$, $0 < \hat{\mu} < 1$.

Pod wpływem obciążeń zewnętrznych q i q_1 rura doznaje skończonego odkształcenia (stan B). Rozwiązanie tego zagadnienia zostało podane w monografii [1]:

$$(1.1) \quad g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = r^2;$$

$$(1.2) \quad \overset{\circ}{g}_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad \overset{\circ}{g}{}^{ik} = \begin{bmatrix} \frac{Q^2}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 Q^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \overset{\circ}{g} = r^2;$$

$$(1.3) \quad B^{ik} = \begin{bmatrix} Q^2 + \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{r^2 Q^2} + \frac{1}{\lambda^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} \end{bmatrix};$$

$$(1.4) \quad I_1 = \frac{Q^2}{\lambda^2} + \frac{1}{Q^2} + \lambda^2, \quad I_2 = \frac{\lambda^2}{Q^2} + Q^2 + \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_3 = 1;$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \tau^{11} &= \Phi \frac{Q^2}{\lambda^2} + \Psi \left(Q^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) + p, \\ r^2 \tau^{22} &= \Phi \frac{1}{Q^2} + \Psi \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + p, \\ \tau^{33} &= \Phi \lambda^2 + \Psi \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) + p, \quad \tau^{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j, \end{aligned}$$

gdzi

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \Phi &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}; \\ Q(r) &= \frac{1}{r} \sqrt{\lambda^2 r^2 + (1 - \lambda^2 \kappa^2) \overset{\circ}{a}}, \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{l}{r}, \quad \kappa = \frac{a}{\overset{\circ}{a}}.$$

Wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

a, b, l promień zewnętrzny, wewnętrzny i długość rury w B ,
 $\overset{\circ}{g}{}^{ik}, \overset{\circ}{g}_{ik}; g^{ik}, g_{ik}$ odpowiednio kontrawariantne i kowariantne współrzędne tensorów metrycznych w $\overset{\circ}{B}$ i B ,

I_1, I_2, I_3 niezmienniki stanu odkształcenia,

B^{ik} tensor pomocniczy,

τ^{ik} tensor naprężenia,

$W(I_1, I_2)$ potencjał sprężysty,

p funkcja skalarna (umożliwiająca nałożenie na powierzchnię rury dowolnego ciśnienia hydrostatycznego).

Jedyny nie spełniony tożsamościowo warunek równowagi sprowadza się do następującego:

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[p + \Phi \frac{Q^2}{\lambda^2} + \Psi \left(Q^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] + \Phi \left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \frac{1}{r} + \Psi \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \frac{1}{r} = 0.$$

Jeśli oznaczyć

$$(1.8) \quad L(r) = \int_r^a \left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Phi + \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi \right] \frac{dr}{r}, \quad L(b) = q,$$

wówczas składowe fizyczne σ_{ik} i składowe tensora naprężenia τ^{ik} można przedstawić jak następuje:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \tau^{11} = L(r) - L(b), \\ \sigma_{22} &= r^2 \tau^{22} = L(r) - L(b) + \Phi \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + \Psi \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right), \\ \sigma_{33} &= \tau^{33} = L(r) - L(b) + \Phi \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + \Psi \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

2. Dodatkowe małe odkształcenia rury

Założmy teraz, że odkształcona rura doznaje małego przemieszczenia $\varepsilon w'$ (stan $\overset{\#}{B}$), gdzie ε jest małym parametrem. Niech

$$(2.1) \quad w' = w'^r g_r = w'_r g^r, \quad w'_1 = u, \quad w'_2 = v, \quad w'_3 = w.$$

Wielkości podane uprzednio doznają wówczas pewnych przyrostów (por. [1]), które oznaczać będziemy kreską u góry:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} g'_{11} &= -g'^{11} = 2u_r, & g'_{12} &= -r^2 g'^{12} = u_\theta + v_r - 2\frac{v}{r}, \\ g'_{22} &= -r^4 g'^{22} = 2(v_\theta + ru), & g'_{13} &= -g'^{13} = u_z + w_r, \\ g'_{33} &= -g'^{33} = 2w_z, & g'_{23} &= -r^2 g'^{23} = v_z + u_\theta. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$(2.3) \quad I'_3 = -2 \left[u_r + \frac{1}{r^2} (v_\theta + ru) + w_z \right] = 0,$$

mamy

$$(2.4) \quad \begin{aligned} I'_1 &= 2 \left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) u_r + 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{Q^2} \right) w_z, \\ I'_2 &= 2 \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) u_r + 2 \left(Q^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) w_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau'_{11} &= \Phi' g^{11} + \Psi' B^{11} - 2d_1 u_r + 2(a_2 - a_1) w_z + p', \\
 r^2 \tau'_{22} &= \Phi' g^{22} + \Psi' B^{22} + 2a_1 u_r + 2a_3 w_z + p', \\
 \tau'_{33} &= \Phi' g^{33} + \Psi' B^{33} + 2(a_2 - a_3) u_r - 2a_3 w_z + p', \\
 r^2 \tau'_{12} &= -a_1 \left(u_\theta + v_r - 2 \frac{v}{r} \right), \\
 \tau'_{13} &= -a_2 (u_z + w_r), \\
 r^2 \tau'_{23} &= -a_3 (v_z + w_\theta),
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \Psi' \frac{1}{\lambda^2} + p, & a_2 &= \Psi' Q^2 + p, & a_3 &= \Psi' \frac{\lambda^2}{Q^2} + p, \\
 \Phi' &= AI'_1 + FI'_2, & \Psi' &= FI'_1 + BI'_2, \\
 A &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2}, & B &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}, & F &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Przyrost ciśnienia p' należy wyznaczyć z równań równowagi i warunków brzegowych.

Tensor naprężenia całkowitego $\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}$ spełnia warunki równowagi, gdy spełnione są równania

$$\nabla_i \tau^{ij} = 0,
 \tag{2.7}$$

$$\nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma'_{rs}{}^i \tau'^{rs} + \Gamma'_{rs}{}^s \tau'^{rj} = 0,
 \tag{2.8}$$

gdzie $\Gamma'_{ij}{}^k$ są przyrostami symboli Christoffela II-go rodzaju:

$$\begin{aligned}
 \Gamma'^1_{11} &= u_{rr}, & \Gamma'^1_{22} &= u_{\theta\theta} + r u_r - \frac{2}{r} v_\theta - u, & \Gamma'^1_{33} &= u_{zz}, \\
 \Gamma'^2_{11} &= \frac{1}{r^2} v_{rr} - \frac{2}{r^3} v_r + \frac{2}{r^4} v, & \Gamma'^2_{22} &= \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{2}{r} u_\theta + \frac{1}{r} v_r - \frac{2}{r^2} v, \\
 \Gamma'^2_{33} &= \frac{1}{r^2} v_{zz}, & \Gamma'^3_{11} &= w_{rr}, & \Gamma'^3_{22} &= w_{\theta\theta} + r w_r, & \Gamma'^3_{33} &= w_{zz}, \\
 \Gamma'^1_{12} &= u_{r\theta} - \frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v, & \Gamma'^1_{23} &= u_{\theta z}, & \Gamma'^1_{13} &= u_{rz}, \\
 \Gamma'^2_{12} &= \frac{1}{r^2} v_{r\theta} - \frac{2}{r^3} v_\theta + \frac{1}{r} u_r - \frac{u}{r^2}, & \Gamma'^2_{23} &= \frac{1}{r^2} v_{\theta z} + \frac{1}{r} u_z, \\
 \Gamma'^2_{13} &= \frac{1}{r^2} v_{rz} - \frac{1}{r^3} v_z, & \Gamma'^3_{12} &= w_{r\theta} - \frac{1}{r} w_\theta, & \Gamma'^3_{23} &= w_{\theta z}, \\
 \Gamma'^3_{13} &= w_{rz}, & \Gamma'^k_{lk} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Podstawiając (2.9) do (2.8) i uwzględniając warunek nieściśliwości (2.3) otrzymujemy układ czterech równań różniczkowych z niewiadomymi funkcjami u , v , w , p' :

$$\begin{aligned}
 & [2\beta_1\beta_{13} + \tau^{11} - a_1] u_{rr} + \frac{1}{r^2} [r^2 \tau^{22} - a_1] u_{\theta\theta} + [\tau^{33} - a_2] u_{zz} + \\
 & + [2\beta_3\beta_{11} + a_2 - a_1] w_{rz} + \frac{1}{r} \left\{ 2 \frac{d}{dr} [r (\beta_1\beta_{13} - a_1)] - 2\beta_1\beta_{23} + \right. \\
 & \left. + a_1 + r^2 \tau^{22} \right\} u_r + \frac{2}{r} \left\{ \frac{d}{dr} [r (\beta_3\beta_{11} + a_2 - a_1)] - \beta_3\beta_{21} + a_1 - a_3 \right\} w_z - \\
 & - \frac{1}{r^3} [r^2 \tau^{22} - a_1] [ru + 2v_\theta] + p'_r = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & [2\beta_1\beta_{23} + a_1 - r^2 \tau^{22}] u_{r\theta} + [\tau^{11} - a_1] v_{rr} + [\tau^{33} - a_3] v_{zz} + \\
 & + [2\beta_3\beta_{21} + a_3 - r^2 \tau^{22}] w_{\theta z} + \frac{1}{r} \left[r^2 \tau^{22} - \frac{d}{dr} (ra_1) \right] u_\theta + \\
 & + \frac{1}{r} \left[r^2 \tau^{22} - 2\tau^{11} + a_1 - r \frac{da_1}{dr} \right] v_r + \frac{2}{r^2} \left[r \frac{da_1}{dr} + \tau^{11} - r^2 \tau^{22} \right] v + p'_\theta = 0, \\
 & [2\beta_1\beta_{33} + a_2 - a_3] u_{rz} + [\tau^{11} - a_2] w_{rr} + \frac{1}{r^2} [r^2 \tau^{22} - a_3] w_{\theta\theta} + \\
 & + [2\beta_3\beta_{31} + \tau^{33} - a_2] w_{zz} + \frac{1}{r} \left[2a_3 - 2a_2 - r \frac{da_2}{dr} \right] u_z + \\
 & + \frac{1}{r} \left[r^2 \tau^{22} - a_2 - r \frac{da_2}{dr} \right] w_r + p'_z = 0,
 \end{aligned}$$

$$r^2 u_r + r^2 w_z + v_\theta + ru = 0,$$

gdzie

$$(2.11) \quad \beta_k = \overset{\circ}{g}{}^{kk} - r^2 \overset{\circ}{g}{}^{22}, \quad \beta_{ij} = \overset{\circ}{g}{}^{ii} (F \overset{\circ}{g}{}^{ij} + A) + B^{ii} (B \overset{\circ}{g}{}^{ij} + F) \quad (\text{nie sumować}).$$

Warunki brzegowe dla tych funkcji otrzymamy z żądania, by podczas dodatkowego odkształcenia wewnętrzna powierzchnia rury $r = b$ była nieobciążona, a powierzchnia zewnętrzna $r = a$ pozostała obciążona tylko ciśnieniem hydrostatycznym q . Fizycznie oznacza to, że istnieje pole przemieszczeń $\varepsilon w'$, które nie wymaga zmiany ciśnienia hydrostatycznego działającego na zewnętrzną powierzchnię rury. Przy tym samym obciążeniu możliwy jest stan równowagi B oraz inny stan równowagi B^* , bliski B . Zakładać więc będziemy, że rura ściskana jest równomiernie rozłożonym obciążeniem «śledzącym», normalnym do aktualnej powierzchni, stałym co do modułu. Niech \mathbf{n} i $\mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}'$ będą odpowiednio wersorami normalnymi do powierzchni $r = a$ w stanie B i B^* . Wtedy

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{g}^1}{\sqrt{g^{11}}}, & \mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}' &= \frac{\mathbf{g}^1 + \varepsilon \mathbf{g}'^1}{\sqrt{g^{11} + \varepsilon g'^{11}}}, \\
 n_1 &= \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}, & n'_1 &= -\frac{g'^{11}}{g^{11} \sqrt{g^{11}}}, \\
 n_2 &= n_3 = 0, & n'_2 &= n'_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Ponieważ siła \mathbf{P} działająca na jednostkę powierzchni o normalnej \mathbf{n} wyraża się wzorem

$$(2.13) \quad \mathbf{P} = \tau^{ij} n_i \mathbf{g}_j,$$

zatem dla stanu B i B^* mamy związki

$$\begin{aligned} (\tau^{1j} + \varepsilon \tau^{1j}) (g_j + \varepsilon g'_j) &= -q (g^1 + \varepsilon g'^1), \\ \tau^{1k} + \varepsilon \tau'^{1k} &= -q (g^{1k} + \varepsilon g'^{1k}), \end{aligned}$$

albo, jeśli uwzględnić $\tau^{11} = -q$ dla $r = a$,

$$(2.14) \quad \tau'^{1k} - \tau^{11} g'^{1k} = 0.$$

Dla powierzchni $r = b$ obliczenia i rezultaty są analogiczne. Ostateczne warunki brzegowe dla $r = a, b$ mają postać (2.14), albo — po wykorzystaniu (1.5), (2.2) i (2.5)

$$\begin{aligned} (\beta_1 \beta_{13} + \tau^{11} - \alpha_1) u_r + (\beta_3 \beta_{11} + \alpha_2 - \alpha_1) w_z + \frac{1}{2} p' &= 0, \\ (2.15) \quad u_\theta + v_r - \frac{2}{r} v &= 0, \\ u_z + w_r &= 0 \quad \text{dla} \quad r = a, b. \end{aligned}$$

Dla $z = 0, l$ przyjmujemy

$$(2.16) \quad w = 0.$$

Układ (2.10) oraz warunki brzegowe (2.15) tworzą jednorodne liniowe zagadnienie brzegowe, które zawsze ma przynajmniej jedno rozwiązanie (zerowe). Interesować nas jednak będą warunki, przy których zagadnienie to ma więcej niż jedno rozwiązanie; fizycznie odpowiadać to będzie osiągnięciu przez ciało B stanu równowagi obojętnej. Warunki te, jak wspomniano we wstępie, przyjmować będziemy za warunki utraty stateczności. Rozpatrywany problem stateczności rury sprowadził się więc do poszukiwania wartości własnych zbudowanego wyżej zagadnienia brzegowego.

3. Rozwiązanie

Przyjmując funkcje u, v, w, p' w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u &= f_1(r) \cos \alpha \vartheta \cos \beta z, & w &= f_3(r) \cos \alpha \vartheta \sin \beta z, \\ v &= f_2(r) \sin \alpha \vartheta \cos \beta z, & p' &= \xi(r) \cos \alpha \vartheta \cos \beta z, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \beta = n\pi/l$, i podstawiając odpowiednio do (2.10), (2.15) i (2.16) otrzymamy następujący układ czterech równań różniczkowych zwyczajnych z niewiadomymi funkcjami f_1, f_2, f_3 i ξ zmiennej r :

$$\begin{aligned}
 & [2\beta_1\beta_{13} + \tau^{11} - \alpha_1] \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \left\{ 2 \frac{d}{dr} [r(\beta_1\beta_{13} - \alpha_1)] - 2\beta_1\beta_{23} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_1 + r^2\tau^{22} \right\} \frac{df_1}{dr} + \frac{\alpha^2}{r^2} [\alpha_1 - r^2\tau^{22}] f_1 + \beta^2 [\alpha_2 - \tau^{33}] f_1 + \\
 & \quad + \frac{1}{r^3} [\alpha_1 - r^2\tau^{22}] [rf_1 + 2\alpha f_2] + \beta [2\beta_3\beta_{11} + \alpha_2 - \alpha_1] \frac{df_3}{dr} + \\
 & \quad + 2 \frac{\beta}{r} \left\{ \frac{d}{dr} [r(\beta_3\beta_{11} + \alpha_2 - \alpha_1)] - \beta_3\beta_{21} + \alpha_1 - \alpha_3 \right\} f_3 + \frac{d\xi}{dr} = 0, \\
 (3.2) \quad & [\tau^{11} - \alpha_1] \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \alpha [2\beta_1\beta_{23} + \alpha_1 - r^2\tau^{22}] \frac{df_1}{dr} + \\
 & \quad + \frac{1}{r} \left[r^2\tau^{22} - 2\tau^{11} + \alpha_1 - r \frac{dp}{dr} \right] \frac{df_2}{dr} + \beta^2 [\alpha_3 - \tau^{33}] f_2 + \\
 & \quad + \frac{\alpha}{r} \left[\frac{d}{dr} (r\alpha_1) - r^2\tau^{22} \right] f_1 + \frac{2}{r^2} \left[r \frac{d\alpha_1}{dr} + \tau^{11} - r^2\tau^{22} \right] f_2 + \\
 & \quad + \alpha\beta [2\beta_3\beta_{21} + \alpha_3 - r^2\tau^{22}] f_3 - \alpha\xi = 0, \\
 & [\tau^{11} - \alpha_2] \frac{d^2 f_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[r^2\tau^{22} - \alpha_2 + r \frac{d\alpha_2}{dr} \right] \frac{df_3}{dr} - \beta [2\beta_1\beta_{33} + \alpha_2 - \alpha_3] \frac{df_1}{dr} + \\
 & \quad + \frac{\alpha^2}{r^2} [\alpha_3 - r^2\tau^{22}] f_3 + \frac{\beta}{r} \left[r \frac{dp}{dr} + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 \right] f_1 + \\
 & \quad + \beta^2 [\alpha_2 - \tau^{33} - 2\beta_3\beta_{31}] - \beta\xi = 0, \\
 & \frac{df_1}{dr} + \beta f_3 + \frac{\alpha}{r^2} f_2 + \frac{1}{r} f_1 = 0
 \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi dla $r = a, b$:

$$\begin{aligned}
 & [\beta_1\beta_{12} + \tau^{11} - \alpha_1] \frac{df_1}{dr} + \beta [\beta_3\beta_{11} + \alpha_2 - \alpha_1] f_3 + \frac{1}{2} \xi = 0, \\
 (3.3) \quad & \frac{df_2}{dr} - \left(\frac{2}{r} + \alpha \right) f_1 = 0, \\
 & \frac{df_3}{dr} - \beta f_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Warunek (2.16) jest spełniony tożsamościowo.

Powyższe zagadnienie brzegowe zbudowane zostało dla dowolnej, odpowiednio gładkiej funkcji $W = W(I_1, I_2)$. Ponieważ niezmienniki stanu odkształcenia są funkcjami tylko zmiennej r , zatem współczynniki równań tego zagadnienia zależą także tylko od r ; wielkości α i β [pochodzące od (3.1)] są parametrami. Dla uzyskania efektywnych rozwiązań musimy jednak przyjąć określoną postać funkcji energii sprężystej.

Ograniczmy obecnie dalsze rozważania do przypadku tzw. materiału Mooney'a, dla którego potencjał sprężysty ma postać

$$(3.4) \quad W(I_1, I_2) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3);$$

wówczas $\Phi = 2C_1$, $\Psi = 2C_2$, $A = B = F = 0$. Założymy ponadto, że nałożone zaburzenia $\varepsilon w'$ istnieją tylko w płaszczyznach $z = \text{const}$ (1), tzn.

$$u = u(r, \vartheta), \quad v = v(r, \vartheta), \quad w \equiv 0, \quad p' = p'(r, \vartheta).$$

Układ (3.2) redukuje się wtedy do 3 równań różniczkowych rzędu II z czterema warunkami brzegowymi. Po wyrugowaniu funkcji $f_2(r)$ i $\xi(r)$ otrzymujemy stąd następujące równanie różniczkowe liniowe, rzędu czwartego:

$$(3.5) \quad 2(C_1 + \lambda^2 C_2) \left\{ \frac{Q^2}{\lambda^2} \frac{d^4 f_1}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \frac{d^3 f_1}{dr^3} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{8}{\lambda} - 3 \frac{Q^2}{\lambda^2} - \alpha^2 \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda} - \alpha^2 \left(\frac{3}{Q^2} + \frac{2}{\lambda} - \frac{Q^2}{\lambda^2} - 2 \frac{\lambda}{Q^4} \right) \right] \frac{df_1}{dr} + \frac{1}{r^4} \left[\frac{4}{\lambda} - 3 \frac{Q^2}{\lambda^2} + \alpha^2 \left(3 \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda} - \frac{1}{Q^2} + \frac{\alpha^2}{Q^2} \right) \right] f_1 \right\} = 0$$

z warunkami

$$(3.6) \quad 2(C_1 + \lambda^2 C_2) \left\{ \frac{Q^2}{\lambda^2} \frac{d^3 f_1}{dr^3} + 2 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{2}{\lambda} - \frac{Q^2}{\lambda^2} - \alpha^2 \left(\frac{1}{Q^2} + 2 \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{df_1}{dr} + \frac{1}{r^3} \left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \right) (1 - \alpha^2) f_1 \right\} = 0,$$

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} + \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} f_1 = 0 \quad \text{dla } r = a, b.$$

Rozpatrywany problem sprowadził się więc do poszukiwania wartości własnych zagadnienia brzegowego określonego równaniem (3.5) i warunkami (3.6) na brzegu $r = b, a$.

Charakterystyczne dla rozważanego przypadku jest to, że problem ten nie zależy od stałych materiałowych C_1 i C_2 . Wpływ na wartości własne ma tu więc tylko przyjęta początkowa grubość rury, początkowe odkształcenie oraz parametr α , który przebiega liczby całkowite nieujemne. Wykażemy niżej, że ponadto należy wykluczyć wartość parametru $\alpha = 0$ (2). Przypuśćmy bowiem, że $\alpha = 0$. Wówczas z (3.2) mamy

$$(3.7) \quad f_1(r) = \frac{K}{r}, \quad \frac{df_1}{dr} = -\frac{K}{r^2}.$$

(1) Przy $\lambda = 1$ odpowiada to rurze nieskończenie długiej.

(2) Przypadek ten odpowiada osiowo-symetrycznemu wyboczeniu.

Uwzględniając to w (3.3)₁ otrzymujemy

$$(3.8) \quad \xi(r) = \frac{2K}{r^2} (C_1 \cdot 2 + \lambda^2 C_2) \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad \text{dla } r = a, b.$$

Rozważmy teraz (3.2)₁; po podstawieniu (3.7) otrzymujemy tutaj funkcję $\xi(r)$ w postaci całki pewnej funkcji zmiennej r . Oznaczając tę całkę przez $\omega(r)$ mamy

$$(3.9) \quad \xi(r) = K\omega(r) + K_1.$$

Przez porównanie (3.9) i (3.8) na brzegu $r = a, b$ otrzymujemy jednorodny układ dwu równań z niewiadomymi stałymi K i K_1 mający tylko trywialne rozwiązanie. Oznacza to, że dla $a = 0$ układ (3.2) przy warunkach (3.3) ma jedynie rozwiązanie zerowe.

Przypadek $a = 1$ zasługuje na odrębną uwagę. Otóż jak łatwo zauważyć, przy takiej wartości parametru można obniżyć rząd równania (3.5), gdyż w równaniu tym [a także w warunkach (3.6)] nie występuje sama funkcja $f_1(r)$, a tylko jej pochodne. Mamy zatem równanie różniczkowe stopnia trzeciego z czterema warunkami brzegowymi. Można jednak wykazać rozważając równowagę rury jako całości (por. [6]), że «nadmiar» warunków brzegowych jest tylko pozorny: warunki te są między sobą zależne i spełnienie dowolnych trzech pociąga spełnienie czwartego. Tak więc przypadek $a = 1$ można rozważać na równi z innymi dla pozostałych a [por. (3.1)].

Ze względu na stosunkowo skomplikowaną postać współczynników równania zdecydowano się poszukiwać wartości własne tego zagadnienia na drodze numerycznej (3). Z przyczyn technicznych przeprowadzono obliczenia tylko dla $a = 2$ i $\lambda = 1$.

Obliczenia oparto na metodzie różnic skończonych. Otrzymano jednorodny układ liniowych równań algebraicznych, którego wyznacznik jest funkcją parametrów κ i μ : $D = D(\kappa, \mu)$. Zerowanie się tego wyznacznika

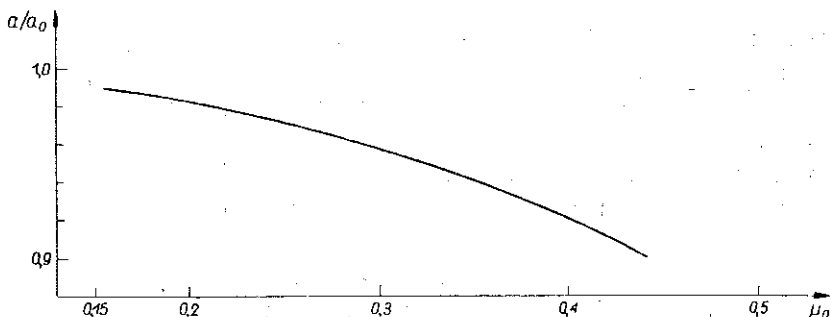
$$(3.10) \quad D(\kappa, \mu) = 0$$

jest warunkiem istnienia rozwiązań nietrywialnych układu, a więc jest warunkiem utraty stateczności. Równanie (3.10) «wiąże» dwa interesujące nas parametry: bezwymiarową wielkość $\kappa = a/\bar{a}$ charakteryzującą deformację promieniową rury oraz także bezwymiarową wielkość $\mu = \bar{b}/\bar{a}$ ($0 < \mu < 1$), określającą jej grubość. Pozwala to wyznaczyć odpowiadające przyjętym «grubościom» rury krytyczne przemieszczenia promieniowe (krytyczne ciśnienia).

Przy obliczeniach numerycznych wygodniej było odwrócić zależność: poszukiwano μ przy ustalonych κ . Uzyskane rozwiązania równania (3.10) wskazują, że przy założonej deformacji istnieją dwie wartości własne μ odpowiadające dwu różnym grubościom, przy których dla tej deformacji następuje utrata stateczności. Innymi słowy to samo obciążenie może być obciążeniem krytycznym dla dwu różnych grubości rury. W rozważanym zakresie deformacji ($0,9 < \kappa < 1$) uzyskano dwie

(3) Obliczenia numeryczne wykonano w Centrum Obliczeniowym PAN.

wyraźnie różne grupy wartości własnych, odpowiadające rurze o «małym» promieniu wewnętrznym ($\mu < 0,5$) i rurze o promieniu wewnętrznym «dużym» ($\mu > 0,5$), przy czym ze wzrostem ciśnienia (tzn. z maleniem κ) w pierwszym przypadku wartości μ rosły (grubość malała), natomiast w drugim malały (grubość rosła). Na rysunku 1 przedstawiono graficznie zależność $\kappa = \kappa(\mu)$ (dla $\mu < 1/2$). Niestety, zastosowana metoda obliczeń nie dała spodziewanych rezultatów ilustrujących tę zależność dla μ bliskich jedności. Uzyskane wyniki numeryczne wykazywały tak znaczny rozrzut,



Rys. 1

że trudno było przedstawić je na wykresie. W tej sytuacji nie było także możliwe porównanie wyników z rezultatami otrzymanymi dla tego zagadnienia w liniowej teorii (por. [7 i 8]). Duża czasochłonność obliczeń numerycznych praktycznie uniemożliwiła w dostępnych warunkach zastosowanie innej, skuteczniejszej metody postępowania, jak również nie pozwoliła na przeprowadzenie analizy tej zależności dla innych wartości parametrów λ i α .

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
2. GUO-ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., 2, 15 (1963).
3. E. W. WILKES, *On the stability of a circular tube under end thrust*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 8 (1955), 88-100.
4. A. E. GREEN, J. M. SPENCER, *The stability of a circular cylinder under finite extension and torsion*, J. Math. Phys., 4, 37 (1959), 316-338.
5. Z. WESOŁOWSKI, *The axially symmetric problem of stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., 3, 15 (1963).
6. Z. WESOŁOWSKI, *Stability of the thick-walled spherical shell loaded by the hydrostatic pressure*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966).
7. M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza stateczności promieniowo ściskanych powłok walcowych metodą uogólnionych szeregów potęgowych*, Rozpr. Inżyn., 1, 14 (1966), 157-174.
8. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, 4 Aufl., Springer-Verlag, Wien 1956. Tłum. polskie: *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ
ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Обсуждается вопрос устойчивости толстостенной трубы при неоднородной деформации, вызванной гидростатическим давлением. Рассматриваемый материал является упругим однородным, изотропным и несжимаемым.

Полная деформация разделяется на два состояния а именно: на конечную предварительную деформацию и на малую добавочную деформацию. Условие несжимаемости и уравнения равновесия образуют систему четырех линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными и с однородными краевыми условиями. Дальнейшие рассуждения ограничиваются плоским деформированным состоянием и материалом Муэня. После разделения переменных получено, в конце концов, одно обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Вопрос потери устойчивости сводится к определению собственных значений данного дифференциального уравнения. Для иллюстрации проводится численный расчет при установленных значениях параметров α и λ : принятой деформации соответствуют две различные «критические толщины» трубы.

S u m m a r y

STABILITY OF A THICK-WALLED TUBE SUBJECT TO EXTERNAL PRESSURE

The problem is that of stability of a thick-walled tube under nonhomogeneous deformation produced by hydraulic pressure. The material is assumed to be elastic, homogeneous, isotropic and incompressible.

The total strain is divided into two parts: finite initial and small additional part. The incompressibility conditions and the equilibrium equations constitute a set of four homogeneous linear differential equations with homogeneous boundary conditions. Further considerations are confined to the case of plane strain and the Mooney material. By separating the variables a single ordinary differential equation of the fourth order is obtained. The problem of stability loss is reduced to that of eigenvalues of a differential equation. As an illustration numerical computation is done for fixed values of the parameters α and λ . The deformation assumed corresponds to two different "critical thicknesses" of the tube.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 września 1966 r.