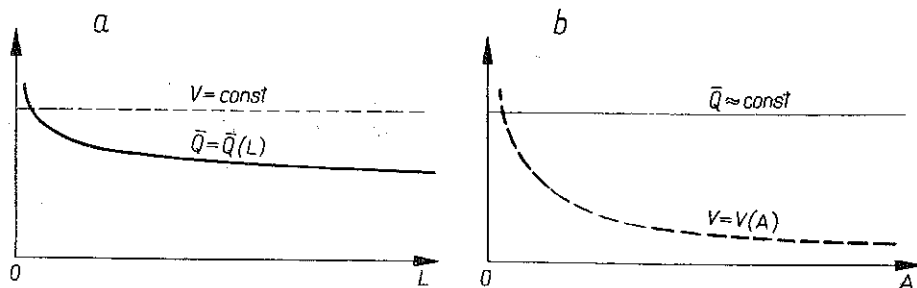


CHARAKTERYSTYKA PRAWDOPODOBIENSTWA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
USTROJU Z QUASI-JEDNORODNEGO MATERIAŁU CIĄGLIWEGO

JANUSZ MURZEWSKI, JÓZEF SOJKA (KRAKÓW)

1. Wstęp

Wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe nośności granicznej obiektu z materiału odznaczającego się wyraźną granicą plastyczności analizować będziemy w zależności od skali, w jakiej obiekt danego typu jest wykonany. Efektem skali przyjęło się nazywać wpływ rzeczywistych rozmiarów ciała na wartość cech mechanicznych materiału, w szczególności na wartość granicy wytrzymałości materiału. W. WEIBULL [7], a następnie inni autorzy [1, 2] wyjaśnili efekt skali zakładając istnienie przypadkowych defektów materiału i stosując rachunek prawdopodobieństwa. Prace te dotyczą w zasadzie materiałów kruchych i opierają się na koncepcji najslabszego ogniwa w łańcuchu, czyli na poglądzie, że o wytrzymałości całego ciała



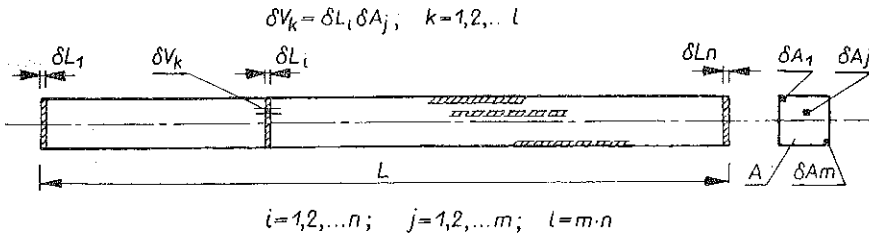
Rys. 1

decyduje jego najslabszy element. W wyniku tego rodzaju założeń otrzymuje się wzory, z których wynika, że średnia wytrzymałość jednostkowa materiału kruchego jest malejącą funkcją objętości ciała. Pierwszy z autorów [3] rozważał ośrodek ciągły, elasto-plastyczny, o granicy plastyczności będącej stacjonarną funkcją stochastyczną punktu i doszedł do wniosku, że wartość średnia siły niszczonej dla prętów osiowo obciążonych maleje wraz z ich długością (rys. 1a), a wariancja maleje wraz z polem przekroju (rys. 1b). A więc dla ośrodków ciągłych efekt skali ma charakter «anizotropowy» w tym sensie, że wymiary podłużne i poprzeczne w stosunku do kierunku działania siły mają różny wpływ na parametry rozkładu granicy plastyczności. Wniosek ten jeszcze raz wyprowadzimy w tej pracy dla ośrodków sztywno-plastycznych przy upraszczającym sprawę założeniu, że granica plastycz-

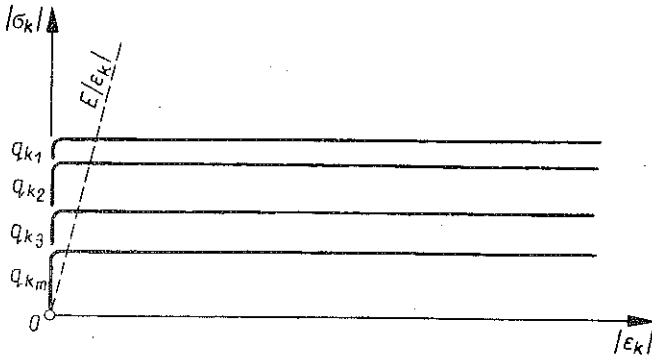
ności jest nieskorelowaną funkcją losową mikroskopowych elementów ośrodka. Ponadto powiązemy parametry rozkładu nośności granicznej pręta z praktyczną bazą statystyczną i uogólnimy rozwiązanie efektu skali na bardziej skomplikowane niż prosty pręt rozciągany układy prętowe, ograniczając się jednakże do ustrojów statycznie wyznaczalnych.

2. Pręt pryzmatyczny w makroskopowo jednorodnym stanie naprężeń

Rozważamy pręt pryzmatyczny (rys. 2) o przekroju A i długości L pod ustaloną siłą podłużną N , przy czym $|N| = A\sigma$. Symbolem σ oznaczamy bezwzględną wartość średnią (makroskopową) naprężenia. Rozróżnianie znaku σ jest tu nieistotne, bowiem materiał posiada z założenia jednakową granicę plastyczności przy rozciąganiu



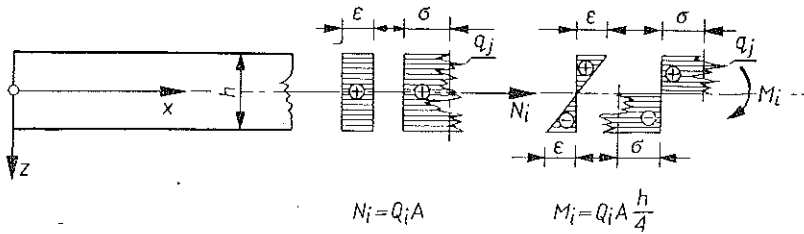
Rys. 2



Rys. 3

i ściskaniu, a uwzględnia się tylko możliwość uplastycznienia (abstrahuje się od zagadnień niestateczności i pęknięć; rys. 3). A więc pręt jest bądź to w stanie czystego rozciągania, bądź ściskania siłą N , a także możemy wyprowadzone wzory łatwo zastosować do czystego zginania momentem $|M| = Z\sigma$, gdzie symbol Z oznacza wskaźnik zginania plastycznego dla pręta o przekroju A . W tych warunkach wartość średnia naprężenia $\sigma = |N|/A$ lub $\sigma = |M|/Z$ jest oczywiście jednako-
wa, $\sigma(x_i) = \text{const}$ dla każdego przekroju pręta x_i . Nie wynika z tego jednak, że rzeczywiste, mikroskopowe naprężenia σ_k mają rozkład jednorodny. Ażeby mogło powstać pole prędkości dające efekt plastycznego płynięcia pręta, musi co najmniej w jednym przekroju x_i powstać taki stan, że naprężenia σ_j osiągają

wszędzie wartości równe mikroskopowej granicy plastyczności q_j , a ta ostatnia ma przypadkowy, nierównomierny rozkład w przekroju pręta, rys. 4. Zgodnie ze sztywno-plastycznym schematem pracy (rys. 3) żadnych odkształceń materiału aż do chwili powstania prędkości ε_j w przekroju x_i nie ma ($\varepsilon_k = 0$). Jeśli



Rys. 4

chcielibyśmy uogólnić nasze rozważania na materiały elasto-plastyczne, to najprościej byłoby założyć prawo płaskich przekrojów i stąd by wynikało pole odkształceń stałe względem x ($\varepsilon_k(x) = \text{const}$) i towarzyszące mu pole naprężeń

$$(2.1) \quad \sigma_k = \min(E|\varepsilon_k|, q_k).$$

Kinematyczny mechanizm zniszczenia pręta ograniczamy do schematu uplastycznienia w płaskim przekroju poprzecznym. Można jednak przypuścić, że prawdopodobne są też inne schematy pól prędkości, np. posunięcie w płaszczyźnie nachylniej do osi pod kątem 45° lub uplastycznienie ziaren wyznaczonych przez jakąś nieregularną zakrzywioną powierzchnię. Nie sądzimy, żeby tego rodzaju uogólnienie mogło wpłynąć na jakościową stronę efektu skali, jeśli zaś chodzi o aspekt ilościowy, tzn. wyznaczenie wartości parametrów figurujących w ostatecznych wzorach, to i tak proponujemy wyznaczenie ich metodą odwrotną z badań fenomenologicznych. Dlatego rezygnujemy z uwzględnienia dowolnych powierzchni uplastycznienia i ograniczamy się do rozważania jednoparametrowej rodziny przekrojów płaskich, upraszczając w ten sposób znacznie rozwiązanie problemu.

Niechaj materiał pomyślanego pręta ma strukturę mikroskopową, ziarnistą, tego mniej więcej typu, co ośrodki polikrystaliczne [4], tzn. jest spójnym konglomeratem mikro-elementów δ_k o objętości δV_k i granicy plastyczności mikroskopowej q_k , $k = 1, 2, \dots, l$, liczba l równa się ilości mikro-ziaren (krystalitów) w całym ciele. Wartości q_k są to realizacje zmiennej losowej o nieznanym z góry, ale tym samym dla wszystkich ziaren mikroskopowych δ_k rozkładzie prawdopodobieństw. Zakładamy, że ziarna strukturalne δ_k są bezzładnie wymieszane, tak że granice mikro-plastyczności dla dwóch różnych mikro-ziaren δ_{k_1} i δ_{k_2} są niezależnymi zmiennymi losowymi q_{k_1} i q_{k_2} . Niechaj m będzie liczebnością mikro-elementów δ_j w dowolnym ustalonym przekroju pręta x_i , czyli ilością elementarnych włókien pręta o mikroskopowym przekroju δA_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Niechaj n będzie liczebnością mikro-elementów δ_i w dowolnym ustalonym włóknie materialnym, czyli ilością elementarnych przekrojów pręta o mikroskopowej grubości δL_i , $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie $n = l/m$. Liczby m i n są wielkie, ale nie na tyle, aby stosować twierdzenia

graniczne rachunku prawdopodobieństwa, co by strywializowało nasze rozważania i nie pozwoliło ujawnić efektu skali. Dlatego siłę N_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jaką przenosi przekrój pręta przyrmatycznego $A_i = A$ w stanie granicznym, kiedy to mikro-naprężenia osiągają wartość graniczną w każdym z mikro-elementów δ_j ,

$$(2.2) \quad \sigma_j = q_j,$$

obliczamy jako sumę skończoną

$$(2.3) \quad N_i = \sum_{j=1}^m q_j \delta A_j = A \sum_{j=1}^m q_j p_j = A Q_i,$$

gdzie $p_j = \delta A_j / A$ jest geometrycznym prawdopodobieństwem warunkowym występowania naprężenia $\sigma_j = q_j$, gdy $q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq \dots \neq q_m$, a jeśli zdarzy się, że np. $q_{j_1} = q_{j_2}$, to pod oznaczeniem δA_j należy rozumieć $\delta A_{j_1} + \delta A_{j_2}$ i odpowiednio skorygować sumę (2.3), opuszczając j_1 -szy albo j_2 -gi wyraz. Nazywając p_j prawdopodobieństwem warunkowym mamy na myśli warunek ograniczenia pola zdarzeń elementarnych do zbioru naprężeń σ_j występujących w jednym przekroju poprzecznym o współrzędnej x_i . Prawdopodobieństwo warunkowe p_j oczywiście nie musi się równać dokładnie prawdopodobieństwu bezwarunkowemu p_k określonego dla wszystkich l ziaren elementarnych. Q_i jest makroskopową granicą plastyczności określoną dla przekroju materialnego x_i . Ze względu na skończoną moc zbioru $j = 1, 2, \dots, m$ nie zachodzi prawo wielkich liczb i Q_i podlega odchyleniom losowym dla różnych przekrojów x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Z uwagi na przyjęte poprzednio założenia Q_i jest nieskorelowanym stacjonarnym łańcuchem losowym ciągu x_i . Na podstawie twierdzenia o wartości średniej sumy zmiennych losowych mamy

$$(2.4) \quad \bar{Q}_i = \bar{q}_j \sum_{j=1}^m p_j = \bar{q}_j = \bar{q}_k = \text{const},$$

gdzie

$$\sum_{j=1}^m p_j = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^m \delta A_j = 1,$$

oraz gdzie \bar{q}_j jest wartością średnią warunkową (w przekroju x_i), a \bar{q}_k wartością średnią bezwarunkową (w całym pręcie). Liczby te są równe ze względu na stacjonarność i niezależność łańcucha losowego q_j i q_k dla $\delta_j \neq \delta_k$, a identyczność — dla $\delta_j \equiv \delta_k$.

Na podstawie twierdzenia o wariancji sumy zmiennych losowych niezależnych mamy

$$(2.5) \quad \mu_i^2 = \frac{\mu_k^2}{A^2} \left[\overline{\delta A_i^2} + \sum_{j=1}^m (\delta A_j - \overline{\delta A_i})^2 \right] = \mu_k^2 \left[\frac{1}{m^2} + \sum_{j=1}^m \left(p_j - \frac{1}{m} \right)^2 \right] = \mu_k^2 \frac{\delta A}{A},$$

gdzie μ_i^2 jest wariancją makroskopowej granicy plastyczności, μ_k wariancją mikroskopowej granicy plastyczności,

$$\overline{\delta A_i} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta A_j = \frac{A_i}{m}$$

średnim przekrojem ziarna mikroskopowego w przekroju x_i , v_δ jego współczynnikiem zmienności oraz

$$\delta A = \overline{\delta A_i} + \frac{1}{A} \sum_{j=1}^m (\delta A_j - \overline{\delta A_i})^2 = \overline{\delta A_i} (1 + v_\delta^2) \approx \overline{\delta A_k}$$

jest zastępczym przekrojem mikro-ziarna. Dla materiałów quasi-jednorodnych o ziarnach strukturalnych prawie niezmienniej wielkości ($v_\delta \approx 0$) zastępczy przekrój δA w przybliżeniu równa się średniemu $\overline{\delta A_k}$. Współczynniki zmienności granicy plastyczności makroskopowej v_i i mikroskopowej v_k są proporcjonalne, jak wynika ze wzorów (2.4) i (2.5):

$$(2.6) \quad v_i = \frac{\mu_i}{Q_i} = v_k \sqrt{\frac{\delta A}{A}},$$

gdzie $v_k = \mu_k / \bar{q}_k$.

Siła N , jaką przenosi pręt pryzmatyczny w stanie granicznym, równa jest nośności granicznej najłabszego z przekrojów materiałnych o polu $A_i = A = \text{const}$ i grubości elementarnej

$$(2.7) \quad \delta L_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j=1}^m \delta V_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$N = \min Q_i \quad A_i = A \min (Q_1, Q_2, \dots, Q_n).$$

Dla populacji prętów jednakowych pod względem rozmiarów siła N jest zmienną losową. Fenomenologiczna granica plastyczności, oznaczona symbolem Q bez indeksu i , określona wzorem

$$(2.8) \quad Q = \frac{N}{A} = \min Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

jest też ona zmienną losową i jej dystrybuanta dla stochastycznie niezależnych Q_i w myśl prawa mnożenia prawdopodobieństw wynosi

$$(2.9) \quad F(\sigma) = 1 - P(Q > \sigma) = 1 - \prod_{i=1}^n P(Q_i > \sigma) = 1 - [1 - F_i(\sigma)]^n,$$

gdzie $F_i(Q_i)$ jest dystrybuantą makroskopowej granicy plastyczności dowolnego przekroju elementarnej x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Dystrybuantę $F(\sigma)$ w analogicznych zagadnieniach z zakresu teorii efektu skali [2] wyznacza się zazwyczaj w ten sposób, że z góry zakłada się funkcję rozkładu $F_i(\sigma_i)$ w formie statecznej ze względu na opisaną powyżej operację, tj. minimalizację. Korzystając z wyników uzyskanych w rachunku prawdopodobieństwa ekstremów [6], w szczególności z wyprowadzenia dystrybuanty minimalnego wyrazu szeregu rozdzielczego tzw. trzeciego typu, osłabimy założenia. O zmiennej losowej Q_i założymy tylko, że jest lewostronnie ograniczona,

$$(2.10) \quad Q_i \geq 0,$$

co jest oczywiste z uwagi na modularny sens makroskopowej granicy plastyczności, i wyrazimy dystrybuantę $F_i(Q_i)$ wzorem

$$(2.11) \quad F_i(Q_i) = (c + \Delta c) \sqrt[\alpha]{\bar{Q}_i},$$

gdzie c i α są to stałe dodatnie, Δc jest zaś funkcją spełniającą warunek graniczny

$$\Delta c(Q_i) \rightarrow 0 \text{ dla } Q_i \rightarrow 0.$$

Stosujemy schemat losowania «rzadkich zdarzeń», tzn. zakładamy, że dla $n \rightarrow \infty$ zmienna losowa zmierza do zera, jak następuje:

$$(2.12) \quad \sqrt[\alpha]{\bar{Q}} = \frac{q}{n} \rightarrow 0, \quad q = \text{const.}$$

A więc w granicy mamy

$$(2.13) \quad P \left[Q < \left(\frac{q}{n} \right)^\alpha \right] = 1 - \left[1 - \frac{(c + \Delta c)q}{n} \right]^n \rightarrow 1 - e^{-cq}.$$

Dla dużych $n = L/\delta L_i$, co zachodzi dla materiałów mikro-niejednorodnych, dystrybuantę fenomenologicznej granicy plastyczności możemy aproksymować wzorem asymptotycznym:

$$(2.14) \quad F(Q) \approx 1 - \exp \left(-c \sqrt[\alpha]{\bar{Q}} \frac{L}{\delta L} \right) = 1 - \exp \left(-\sqrt[\alpha]{\frac{Q}{b}} \right),$$

gdzie

$$b = \left(\frac{\delta L}{cL} \right)^\alpha, \quad \delta L = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\delta L}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta L_i.$$

Dochodzimy w ten sposób do wzoru na dystrybuantę trzeciego typu rozkładu minimalnego wyrazu szeregu rozdzielczego, bardziej powszechnie nazywanego rozkładem Weibulla [8] (rys. 5). Wartość średnia fenomenologicznej granicy plastyczności wynosi

$$(2.15) \quad \bar{Q} = \int_0^\infty Q dF(Q) = \left(\frac{\delta L}{cL} \right)^\alpha \Gamma(\alpha + 1) = b\pi(\alpha),$$

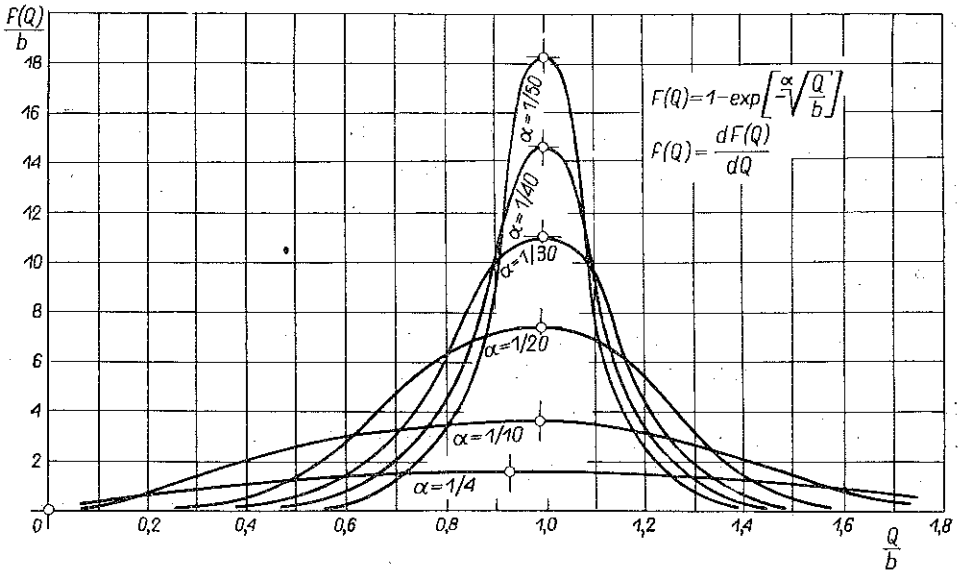
gdzie $F(x)$ oznacza funkcję Eulera gamma, a $\pi(x) = \Gamma(x+1)$ uogólnienie silni.

Wariancja wynosi

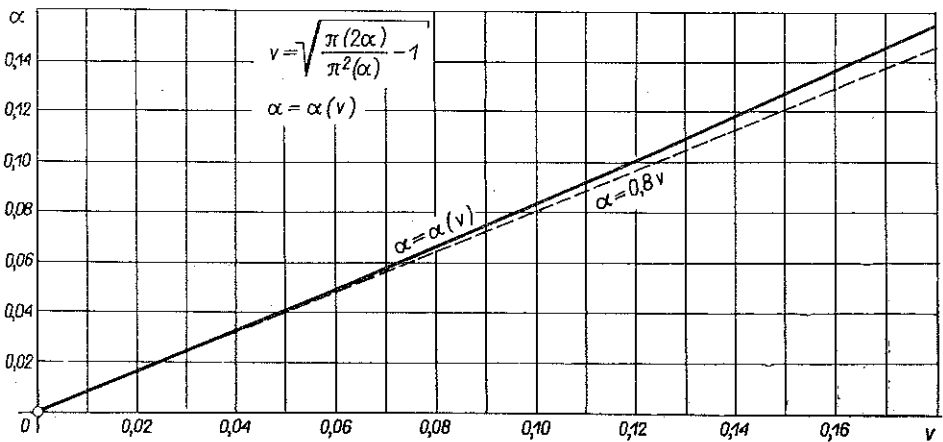
$$(2.16) \quad \mu^2 = \int_0^\infty (Q - \bar{Q})^2 dF(Q) = b^2 [\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)],$$

a współczynnik zmienności (rys. 6)

$$(2.17) \quad v = \frac{\mu}{\bar{Q}} = \frac{\sqrt{\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)}}{\Gamma(\alpha + 1)} = \sqrt{\frac{\pi(2\alpha)}{\pi^2(\alpha)} - 1} = \text{const}(L).$$



Rys. 5



Rys. 6

Ze wzorów (2.15) i (2.17) wynika, że średnia \bar{Q} zależy od długości L , natomiast zmienność v nie zależy od L . Ze wzorów (2.6) i (2.8) wynikało, że v zależy tylko od pola przekroju A , a więc współczynniki zmienności makroskopowej v_i i fenomenologicznej v granicy plastyczności są równe:

$$(2.18) \quad v_i = v.$$

Ze wzorów (2.15) i (2.4) dla $L \rightarrow \delta L$ oraz (2.6) i (2.18) wynikają następujące niezmiennicze związki:

$$(2.19) \quad \frac{\pi(\alpha)}{c^\alpha q_k} = \text{const}$$

oraz

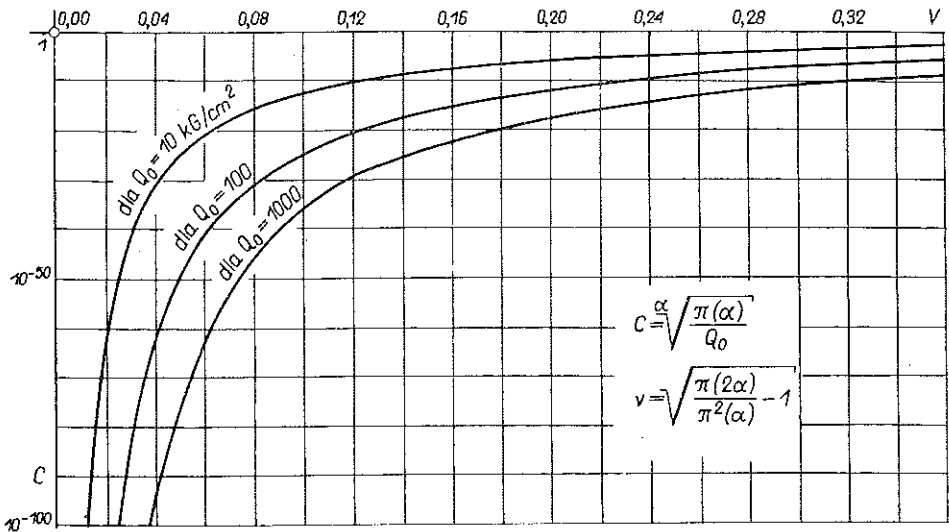
$$(2.20) \quad v^2 A = v_k^2 \delta A = \text{const.}$$

Po prawej stronie tych równań figurują wielkości zależne od struktury mikroscopowej, a niezmiennicze względem rozmiarów pręta. Wzór (2.19) określa c jako funkcję wykładnika α (rys. 7):

$$(2.21) \quad c = \sqrt[\alpha]{\frac{\pi(\alpha)}{q_k}}$$

Wzór (2.20) może być wykorzystany jako sprawdzian stosowalności tej teorii. Ponadto wzory te razem ze wzorami (2.15) i (2.17) potraktujemy jako układ równań, z których wyrugujemy parametry \bar{q}_k , v_k , δA i δL trudne do bezpośrednich pomiarów. Jako bazę statystyczną przyjmujemy dwie serie próbek o długości i przekroju L^* , A^* oraz L^{**} i A^{**} odpowiednio. Mogą to być próbki normowe, które w praktyce stosuje się powszechnie dla potwierdzenia jakości materiału, np. dla stali (rys. 8). Ważne jest, żeby

$$(2.22) \quad A^* \neq A^{**}.$$



Rys. 7

Dla tych próbek drogą doświadczalną wyznaczamy Q^* , v^* i Q^{**} , v^{**} . Następnie ze wzorów (2.17) i (2.15) obliczamy α^* i $Q_0 \delta L^{\alpha^*}$:

$$(2.23^*) \quad \frac{\pi(2\alpha^*)}{\pi^2(\alpha^*)} = 1 + v_*^2 \rightarrow \alpha^* = \alpha(v^*),$$

gdzie

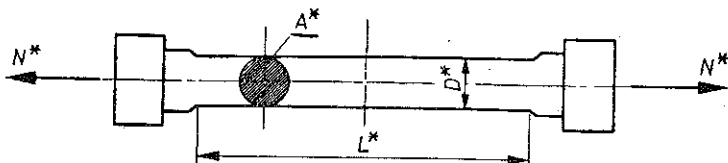
$$(2.15^*) \quad Q^* = \left(\frac{\delta L}{c^* L^*} \right)^{\alpha^*} \pi(\alpha^*) = Q_0 \left(\frac{\delta L}{L^*} \right)^{\alpha^*},$$

gdzie

$$Q_0 = \frac{\pi(a^*)}{(c^*)^{\alpha^*}} = \bar{q}_k,$$

a więc

$$(2.24^*) \quad Q_0 \delta L^{\alpha^*} = Q^* L_*^{\alpha^*},$$



L^* [cm]	2,5	3,0	4,0	5,0	7,5	10,0	12,5
D^* [cm]	0,5	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5
A^* [cm ²]	0,196	0,283	0,502	0,785	1,767	3,140	4,902

Wg PN-62
H-04310

Rys. 8

a z analogicznych równań na mocy (2.19), (2.15*) i (2.24*) α^{**} i $Q_0 \delta L^{\alpha^{**}}$. Biorąc jeszcze do obliczeń równania

$$(2.20^*) \quad v_*^2 A^* = v_k^2 \delta A$$

oraz

$$(2.24) \quad Q_0 \delta L^\alpha = \bar{Q} L^\alpha,$$

otrzymujemy następujące wyniki:

$$(2.25) \quad v = v^* \sqrt{\frac{A^*}{A}},$$

$$(2.26) \quad \bar{Q} = Q_0 \left(\sqrt[\alpha^*]{\frac{Q^*}{Q_0} \frac{L^*}{L}} \right)^\alpha = Q_0 \left(\frac{L_0}{L} \right)^\alpha,$$

(rys. 9 i 10), gdzie

$$Q_0 = \bar{q}_k = Q^* \left(\sqrt[\alpha^{**}]{\frac{Q^{**}}{Q^*} \frac{L^{**}}{L^*}} \right)^{\alpha^* - \alpha^{**}}, \quad L_0 = \sqrt[\alpha^*]{\frac{Q^*}{Q_0}} L^*,$$

a wykładnik α jest pierwiastkiem równania

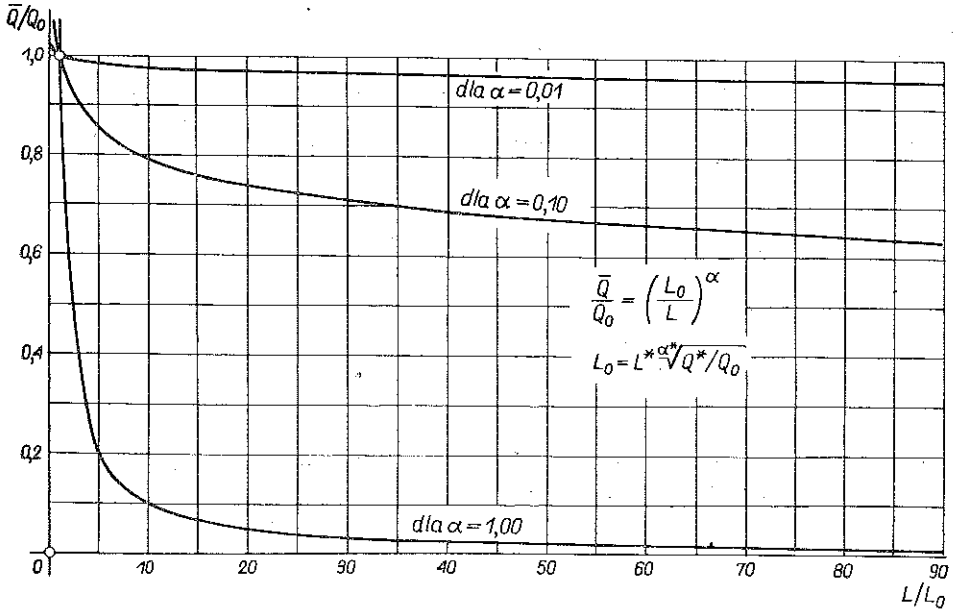
$$(2.23) \quad \frac{\pi(2\alpha)}{\pi^2(\alpha)} = 1 + v_*^2 \frac{A^*}{A} = 1 + \frac{A_0}{A},$$

gdzie $A_0 = v_*^2 A^*$.

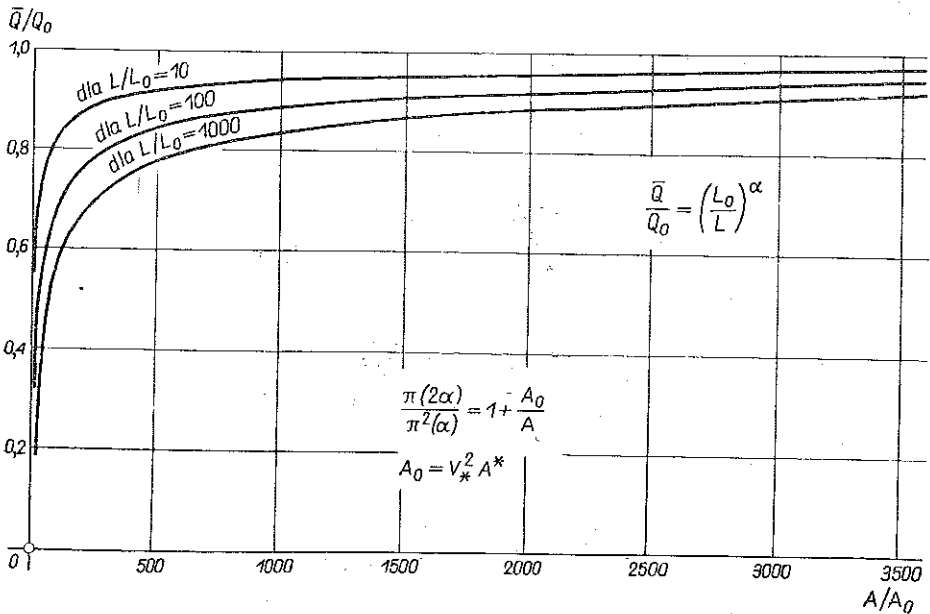
Dla niedużych wartości argumentu ($v \ll 1$), można funkcję uwikłaną $a = a(v)$ z dobrym przybliżeniem zastąpić formułą liniową (rys. 6):

$$(2.27) \quad a \approx 0,8v = 0,8v^* \sqrt{\frac{A^*}{A}},$$

przez co upraszcza się powyższe obliczenia.



Rys. 9

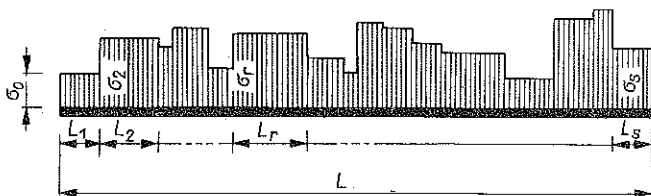


Rys. 10

3. Pręt pryzmatyczny ze zmienną siłą wewnętrzną

Weźmy pod uwagę pręt pryzmatyczny o przekroju A pod działaniem skokowo zmiennej siły podłużnej N_r , $r = 1, 2, \dots, s$ (rys. 11). Naprężenia średnie w przekroju pręta tworzą łańcuch losowy

$$(3.1) \quad \sigma_r = \frac{N_r}{A}$$



Rys. 11

Niechaj między wartościami naprężeń w poszczególnych odcinkach pręta zachodzą deterministyczne związki, tak że z łańcucha losowego daje się wydzielić losowy parametr obciążenia σ_0 ,

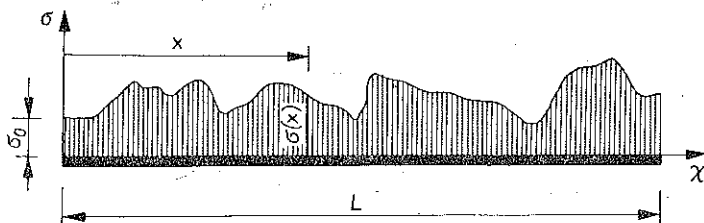
$$(3.2) \quad \sigma_r = \sigma_0 s_r, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie s_r jest ciągiem w pełni określonym.

Dystrybuanta granicznego naprężenia dla r -tego odcinka wynosi wg (2.14)

$$(3.3) \quad F_r(\sigma_r) = 1 - \exp\left(-\frac{cL_r}{\delta L} \sqrt{\sigma_r}\right),$$

gdzie $a, c = \text{const}$ dla $A = \text{const}$.



Rys. 12

Dystrybuantę granicznego naprężenia dla całego pręta, czyli prawdopodobieństwo jego niezniszczenia, obliczamy wykorzystując prawo mnożenia prawdopodobieństw:

$$(3.4) \quad F(\sigma_0) = 1 - \prod_{r=1}^s \exp\left(-\frac{cL_r}{L} \sqrt{\sigma_0 s_r}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{c}{\delta L} \sqrt{\sigma_0} \sum_{r=1}^s s_r L_r\right).$$

Weźmy teraz pod uwagę siłę podłużną $N(x)$ zmieniającą się w sposób ciągły na długości pręta (rys. 12). Naprężenia średnie

$$(3.5) \quad \sigma(x) = N(x)/A$$

tworzą funkcję losową, która z założenia daje się przedstawić w formie iloczynu losowego parametru obciążenia i funkcji zwyczajnej,

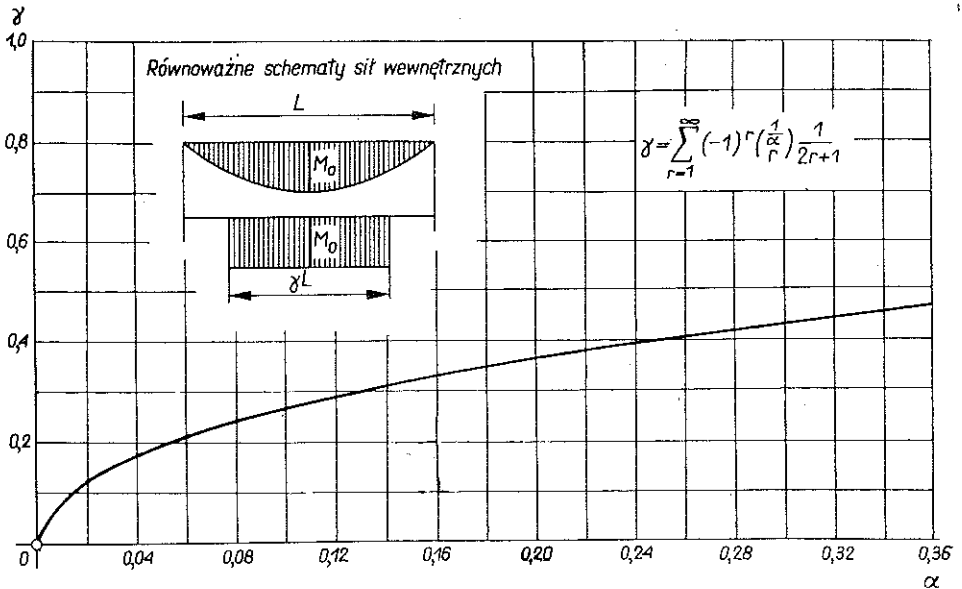
$$(3.6) \quad \sigma(x) = \sigma_0 s(x).$$

Dystrybuantę fenomenologiczną granicy plastyczności, czyli prawdopodobieństwo niezniszczenia, wyprowadza się ze wzoru (3.4) przez zagęszczenie sieci przedziałów L_r i przejście graniczne $L_r \rightarrow dx$ tak, jak się to robi w klasycznej definicji całki:

$$(3.7) \quad F(\sigma_0) = 1 - \left[\exp - \frac{c \sqrt[\alpha]{\sigma_0}}{\delta L} \int_0^L \sqrt{s(x)} dx \right] = 1 - \exp \left(-\gamma \sqrt[\alpha]{\frac{\sigma_0}{b}} \right),$$

gdzie

$$(3.8) \quad b = \left(\frac{\delta L}{cL} \right)^\alpha, \quad \gamma = \int_0^1 \sqrt[\alpha]{s(\xi)} d\xi, \quad \xi = \frac{x}{L}.$$



Rys. 13

Wartość średnia fenomenologicznej granicy plastyczności wynosi

$$(3.9) \quad \bar{Q} = \int_0^{\infty} \sigma_0 dF(\sigma_0) = \frac{b}{\gamma^\alpha} \Gamma(\alpha+1) = Q_0 \left(\sqrt[\alpha]{\frac{Q^*}{Q_0}} \frac{L^*}{\gamma L} \right)^\alpha = Q_0 \left(\frac{L_0}{\gamma L} \right)^\alpha,$$

a współczynnik zmienności wyraża się bez zmian dla $A = \text{const}$ wzorem (2.17). Formuła (3.9) różni się od (2.26) współczynnikiem korekcyjnym γ , przez który mnoży się rzeczywistą długość pręta L . Iloczyn γL daje długość zastępczą uwzględniającą fakt nierównomiernego obciążenia pręta. W tabelicy 1 zestawiono wzory do

obliczania γ jako funkcji a dla niektórych najczęściej spotykanych rozkładów siły wewnętrznej [siły podłużnej $N(x)$ lub momentu zginającego $M(x)$]. Dla belki obciążonej jednostajnie na całej długości zależność γ od a przedstawiono wykreślnie na rys. 13 ze względu na stosunkowo dużą pracochłonność korzystania ze wzoru wg tablicy 1.

4. Pręt o zmiennym przekroju w makroskopowo jednorodnym stanie naprężenia

Rozważamy najpierw pręt o przekroju skokowo zmiennym A_r , $r = 1, 2, \dots, s$, pod stałym naprężeniem $\sigma_r = \sigma = \text{const}$ (rys. 14). Długość r -tego odcinka oznaczamy symbolem L_r i obliczamy parametry α_r i c_r wg wzorów (2.23) i (2.21) dla przekroju A_r . Dystrybuanta naprężenia granicznego σ dla r -tego odcinka wynosi

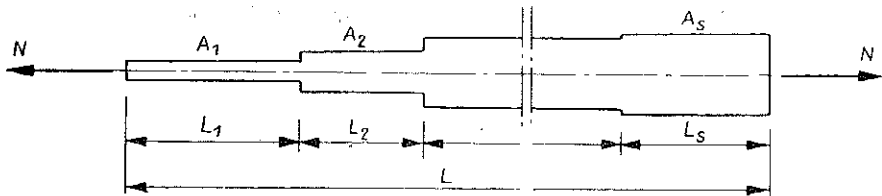
$$(4.1) \quad F_r(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{c_r L_r}{\delta L} \sqrt{\frac{\alpha_r}{\sigma}}\right),$$

a dystrybuanta fenomenologicznej granicy plastyczności

$$(4.2) \quad F(Q) = 1 - \prod_{r=1}^s [1 - F_r(Q)] = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\delta L} \sum_{r=1}^s c_r L_r \sqrt{\frac{\alpha_r}{Q}}\right) = \\ = 1 - \exp\left(-\sum_{r=1}^s \sqrt{\frac{\alpha_r}{b_r} Q}\right),$$

gdzie

$$b_r = \left(\frac{\delta L}{c_r L_r}\right)^{\alpha_r}.$$



Rys. 14

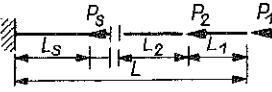
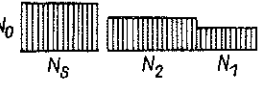
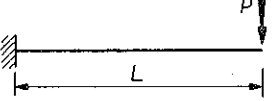

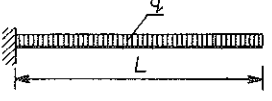

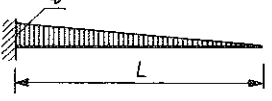

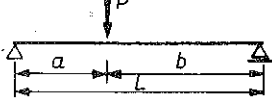
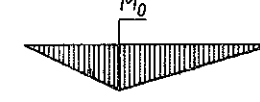
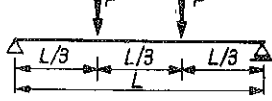
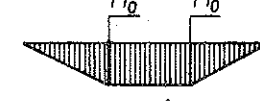
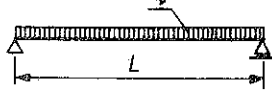
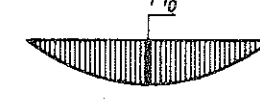

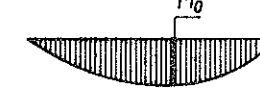


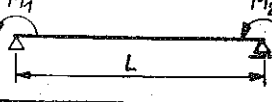

Obliczenie średniej fenomenologicznej granicy plastyczności z zależności

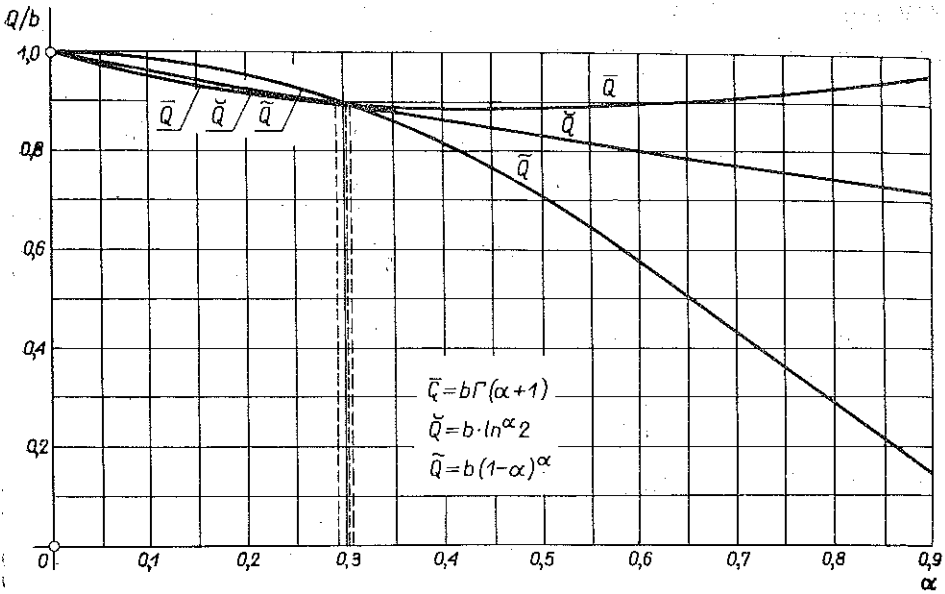
$$(4.3) \quad \bar{Q} = \int_0^{\infty} Q dF(Q) = \int_0^{\infty} \sum_{r=1}^s \frac{1}{\alpha_r} \sqrt{\frac{\alpha_r}{b_r} Q} \exp\left(-\sum_{r=1}^s \sqrt{\frac{\alpha_r}{b_r} Q}\right) dQ$$

jest jednak dosyć trudne, natomiast stosunkowo łatwiej można obliczyć medianę \bar{Q} z równania przestępnego

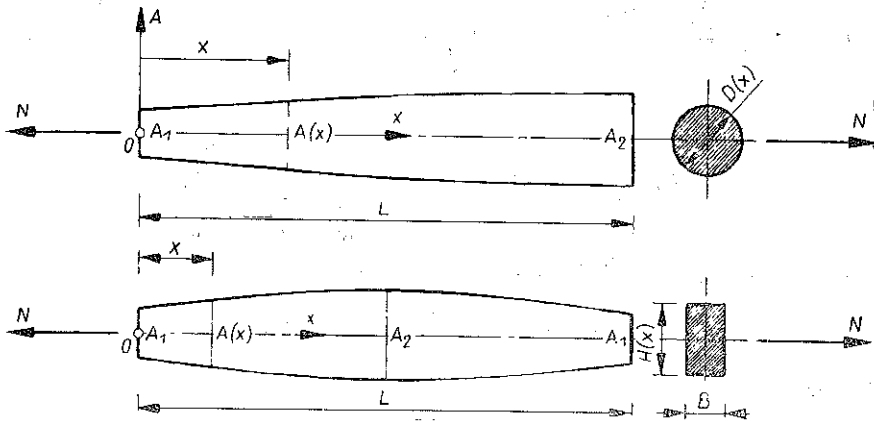
$$(4.4) \quad \sum_{r=1}^s \sqrt{\frac{\alpha_r}{b_r} \bar{Q}} = \ln 2.$$

Tablica 1

Schemat obciążenia	Wykresy momentów i sił podłużnych	γ
		$\frac{1}{L} \sum_{r=1}^s \sqrt{\frac{N_r}{N_0}} \cdot L_r$ $N_r = \sum_{i=1}^r P_i$
		$\frac{\alpha}{1+\alpha}$
		$\frac{\alpha}{2+\alpha}$
		$\frac{\alpha}{3+\alpha}$
		$\frac{\alpha}{1+\alpha}$
		$\frac{1+3\alpha}{3(1+\alpha)}$
		$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{\alpha-1}{r} \frac{1}{2r+1}$
		$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{\alpha-1}{r} \frac{\alpha}{\alpha(2r+1)+1}$
		$\frac{M_1 \left[1 - \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right]}{M_1 - M_2} \frac{\alpha}{1+\alpha}$
		$\frac{M_1 \left[1 - \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right]}{M_1 + M_2} \frac{\alpha}{1+\alpha}$



Rys. 15



Rys. 16

lub modę $\tilde{\tilde{Q}}$ z równania

$$(4.5) \quad \sum_{r=1}^s \frac{1}{\alpha_r} \left(\frac{1}{\alpha_r} - 1 \right) \sqrt[\alpha_r]{\frac{\tilde{\tilde{Q}}}{b_r}} = \left(\sum_{r=1}^s \frac{1}{\alpha_r} \sqrt[\alpha_r]{\frac{\tilde{\tilde{Q}}}{b_r}} \right)^2$$

Korzystanie ze wzorów (4.4) i (4.5) jest o tyle celowe, że dla rozkładu Weibulla przy niedużym parametrze α wartość średnia \bar{Q} , mediana \tilde{Q} i moda $\tilde{\tilde{Q}}$ są w przybliżeniu sobie równe (rys. 15):

$$(4.6) \quad \tilde{\tilde{Q}} \approx \bar{Q} \approx \tilde{Q} \quad \text{dla} \quad \alpha \leq 1/3.$$

Załóżmy teraz, że zmienność przekroju pręta określona jest funkcją ciągłą $A(x)$ (rys. 16). Ze wzorów (2.23) i (2.21) określamy funkcję $a(x)$ i $c(x)$ i formułujemy wzór na dystrybuantę fenomenologicznej granicy plastyczności:

$$(4.7) \quad F(Q) = 1 - \exp \left[-\frac{1}{\delta L} \int_0^L c(x) \frac{a(x)}{\sqrt{Q}} dx \right] = \\ = 1 - \exp \left[-\frac{L}{\delta L} \int_0^1 \sqrt{\frac{Q\pi(a)}{Q_0}} d\xi \right] = 1 - \exp \left(-\frac{IL}{\delta L} \right).$$

Dla małych wartości a skorzystamy z przybliżenia liniowego w rozwinięciu na szereg potęgowy

$$(4.8) \quad \sqrt[3]{\pi(a)} = 0,561 + 0,461a - \dots,$$

a uwzględniając wzór (2.27) dostajemy

$$(4.9) \quad \sqrt[3]{\pi(a)} \approx 0,561 + 0,369v^* \sqrt{\frac{A^*}{A}},$$

a więc

$$(4.10) \quad I = \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{Q\pi(a)}{Q_0}} d\xi \approx 0,561 \int_0^1 \left(1 + \frac{k_1}{\sqrt{A(\xi)}} \right) \exp \left(\frac{\sqrt{A(\xi)}}{k_2} \right) d\xi,$$

gdzie

$$k_1 = 0,658 v^* \sqrt{A^*}, \quad k_2 = \frac{0,8 v^* \sqrt{A^*}}{\ln \frac{Q}{Q_0}}.$$

Jeżeli zmiana przekroju wyraża się wzorem

$$(4.11) \quad A(\xi) = [d_1^p + (d_2^p - d_1^p) \xi]^{2/p},$$

to mamy

$$(4.12) \quad I = 0,561 \int_0^1 \left(1 + \frac{k_1}{\sqrt{A}} \right) \exp \left(\frac{\sqrt{A}}{k_2} \right) d\xi = \\ = \frac{0,561 p'}{d_2^p - d_1^p} \int_{d_1}^{d_2} (z^{p-1} + k_1 z^{p-2}) e^{\frac{z}{k_2}} dz.$$

Powyższą całkę można rozwiązywać korzystając ze wzoru rekurencyjnego

$$(4.13) \quad \int (z^{p-1} + k_1 z^{p-2}) e^{\frac{z}{k_2}} dz = \\ = k_2 (z^{p-1} + k_1 z^{p-2}) e^{\frac{z}{k_2}} - k_2 \int [(p-1) z^{p-2} + (p-2) k_1 z^{p-3}] e^{\frac{z}{k_2}} dz.$$

Wyrazy d_1 i d_2 są proporcjonalne do charakterystycznych wymiarów początkowego i końcowego przekroju pręta, mianowicie dla pręta okrągłego o zmiennej średnicy $D(x)$

$$(4.14) \quad d_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_1, \quad d_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_2,$$

a dla pręta o przekroju prostokątnym $B \times H(x)$

$$(4.15) \quad d_1 = \sqrt{\frac{B}{H_1}} H_1, \quad d_2 = \sqrt{\frac{B}{H_2}} H_2.$$

Wzór na dystrybuantę i dalsze wzory odnoszą się również do przypadku pręta symetrycznego o długości L . Wówczas D_2 i H_2 należy interpretować jako średnicę względnie wysokość przekroju w środku rozpiętości ($x = L/2$). Wyniki obliczeń całki (4.12) dla kilku przykładowych wartości wykładnika p przedstawiono w tabelicy 2. Ze względu na duży stopień trudności obliczenia wartości średniej fenomenologicznej granicy plastyczności ze wzoru

$$(4.16) \quad \bar{Q} = \int_0^{\infty} Q dF(Q)$$

można ją z dobrym przybliżeniem [w myśl (4.6)] zastąpić medianą, którą łatwiej obliczyć z równania przestępnego

$$(4.17) \quad \left[\frac{IL}{\delta L} \right]_{Q=\bar{Q}} = \ln 2.$$

Np. dla pręta o liniowej zmianie przekroju ($p = 2$) i stosunku $\alpha_1/\alpha_2 = 0,050/0,025$, co odpowiada stosunkowi przekrojów $A_1/A_2 = 1/4$, mamy równanie

$$(4.18) \quad \frac{L}{\delta L} \frac{1}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \left[\left(\frac{\bar{Q}}{Q_0} \right)^{40} \left(40,822 - \frac{1}{\ln \frac{\bar{Q}}{Q_0}} \right) - \left(\frac{\bar{Q}}{Q_0} \right)^{20} \left(20,822 - \frac{1}{\ln \frac{\bar{Q}}{Q_0}} \right) \right] =$$

$$= 741,284,$$

co daje wyniki zestawione w poniższej tabelicy.

$\frac{\bar{Q}}{Q_0}$	$\frac{L}{\delta L}$
0,711	10 ⁴
0,579	10 ⁶
0,467	10 ⁸
0,379	10 ¹⁰

5. Statycznie wyznaczalne układy prętowe

Wyniki rozważań przeprowadzonych nad pojedynczymi prętami w celu ustalenia związku między ich wymiarami a fenomenologiczną granicą plastyczności stosunkowo łatwo dadzą się zastosować do statycznie wyznaczalnych układów

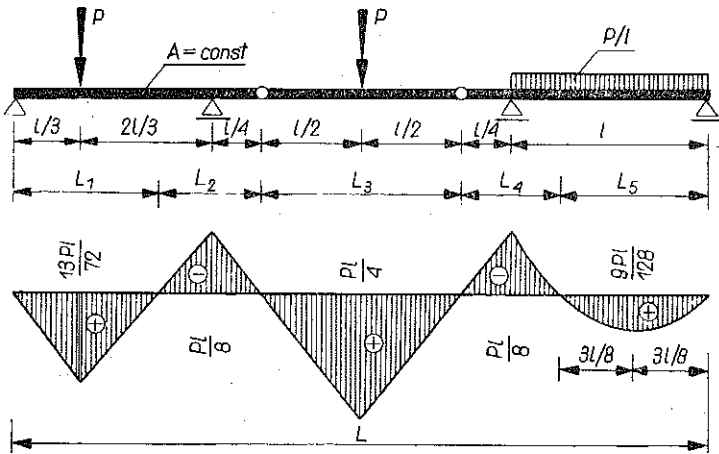
Tablica 2

I

P	
-2	$\frac{0,561}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_0}} \alpha_2^2 \left(\alpha_1 + \alpha_2 \ln \frac{Q}{Q_0} \right) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_0}} \alpha_2^2 \left(\alpha_3 + \alpha_4 \ln \frac{Q}{Q_0} \right) - \ln^2 \frac{Q}{Q_0} \left(1 + 0,274 \ln \frac{Q}{Q_0} \right) \left[Ei \left(\ln \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) - Ei \left(\ln \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) \right] \right\}$
-1	$-\frac{0,561}{\alpha_2 - \alpha_1} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_0}} \alpha_2 \left(1 + 0,411 \ln \frac{Q}{Q_0} + \frac{0,411 \alpha_2}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_0}} \alpha_2 \left(1 + 0,411 \ln \frac{Q}{Q_0} + \frac{0,411 \alpha_1}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) - \ln \frac{Q}{Q_0} \left(1 + 0,411 \ln \frac{Q}{Q_0} \right) \left[Ei \left(\ln \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) - Ei \left(\ln \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) \right] \right\}$
1	$\frac{0,561 \alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2) \ln \frac{Q}{Q_0}} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_0}} \alpha_1 \frac{Q}{Q_0} + 0,822 \ln \frac{Q}{Q_0} \left[Ei \left(\ln \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) - Ei \left(\ln \sqrt{\frac{Q}{Q_0}} \right) \right] \right\}$
2	$\frac{1,122 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \ln \frac{Q}{Q_0}} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_0}} \frac{Q}{Q_0} \left(0,822 + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{Q}{Q_0} \right) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_0}} \frac{Q}{Q_0} \left(0,822 + \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{Q}{Q_0} \right) \right\}$
3	$\frac{1,683 \alpha_1^3 \alpha_2^3}{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3) \ln \frac{Q}{Q_0}} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_0}} \frac{Q}{Q_0} \left[\frac{1}{\alpha_2^2} + \left(0,822 - \frac{2}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) \right] - \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_0}} \frac{Q}{Q_0} \left[\frac{1}{\alpha_1^2} + \left(0,822 - \frac{2}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) \right] \right\}$
4	$\frac{2,244 \alpha_1^4 \alpha_2^4}{(\alpha_1^4 - \alpha_2^4) \ln \frac{Q}{Q_0}} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_0}} \frac{Q}{Q_0} \left[\frac{1}{\alpha_2^4} + \left(0,822 - \frac{3}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) \left(\frac{1}{\alpha_2^2} - \frac{2}{\ln \frac{Q}{Q_0}} + \frac{2}{\ln^2 \frac{Q}{Q_0}} \right) \right] - \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_0}} \frac{Q}{Q_0} \left[\frac{1}{\alpha_1^4} + \left(0,822 - \frac{3}{\ln \frac{Q}{Q_0}} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{2}{\ln \frac{Q}{Q_0}} + \frac{2}{\ln^2 \frac{Q}{Q_0}} \right) \right] \right\}$

Oznaczenia: $Ei(ax) = \int \frac{e^{ax}}{x} dx$, $\alpha_1 = 1 + 0,274 (2\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2})$, $\alpha_2 = 0,274 + \frac{1}{\alpha_2}$, $\alpha_3 = 1 + 0,274 (2\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1})$, $\alpha_4 = 0,274 + \frac{1}{\alpha_1}$

prętowych. Urządzenia takie traktujemy jako zbiór prętów połączonych ze sobą przegubowo, w stosunku do których stosuje się uogólnioną koncepcję najsłabszego ogniwa w łańcuchu, ponieważ zniszczenie jednego pręta burzy cały układ. Jeżeli ponadto fenomenologiczne granice plastyczności poszczególnych prętów układu potraktujemy jako nieskorelowane zmienne losowe, co jest tym bardziej uzasadnione, że mikroskopowe granice plastyczności przyjmowaliśmy jako zmienne niezależne, to możemy również zastosować prawo mnożenia do określenia prawdopodobieństwa niezniszczenia żadnego z prętów. W pracy niniejszej ograniczamy się do badania nośności granicznej przykładowych, prostych urządzeń statycznie wyznaczalnych, takich jak belki ciągle przegubowe i kratownice jednoprzęsłowe.



Rys. 17

W przypadku belki przegubowej (rys. 17) pod obciążeniem poprzecznym należałoby się zastrzec, że rozwiązanie nasze nie uwzględnia wpływu sił poprzecznych. Jeśli stosunek rozpiętości przęseł do wysokości przekroju jest duży, to wpływ sił poprzecznych jak wiadomo jest nieduży i może być w praktyce pomijany. Dla belki o stałym przekroju A stosujemy model pręta pryzmatycznego pod ciągle zmienną siłą podłużną. Według wzoru (3.9) mamy

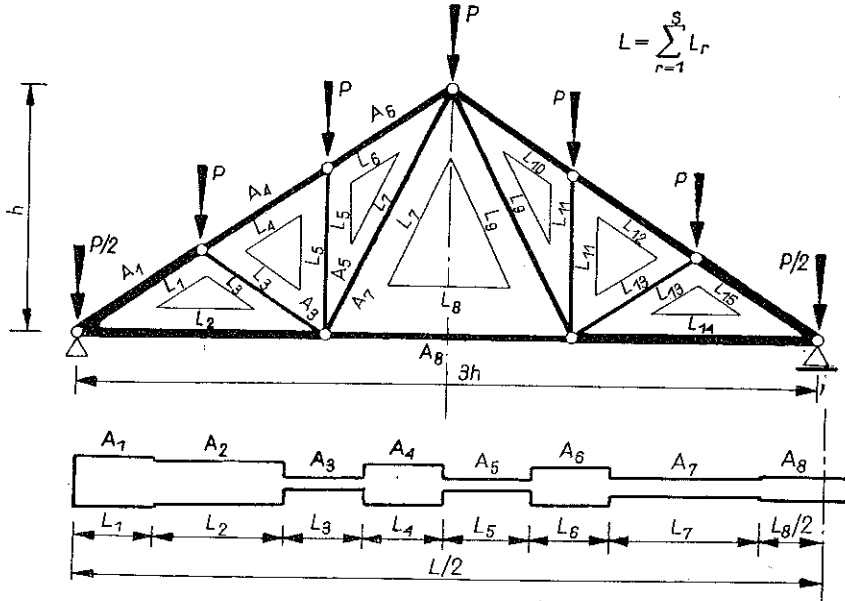
$$(5.1) \quad \bar{Q} = Q_0 \left(\sqrt[\alpha^*]{\frac{Q^*}{Q_0}} \frac{L^*}{\gamma L} \right)^\alpha,$$

gdzie γ jest to współczynnik, który dla najważniejszych rozkładów sił wewnętrznych belek jednoprzęsłowych sformułowany jest w tablicy 1. Chcąc skorzystać z tych danych w przypadku belki wieloprzęsłowej należy jej całkowitą długość podzielić na s odcinków o długości L_r , gdzie $r = 1, 2, \dots, s$ i $\sum_{r=1}^s L_r = L$. Podziału należy tak dokonać, żeby rozkład momentów zginających w każdym z odcinków pokrywał się z którymś ze schematów z tablicy 1. Wówczas

$$(5.2) \quad \gamma = \frac{1}{L} \sum_{r=1}^s L_r \gamma_r.$$

Wzór powyższy uzasadnia się tym, że we wzorze na dystrybuantę (3.7) całkę oznaczoną w wykładniku można obliczyć przez rozkład na całki po odcinkach L_r .

W przypadku kratownicy statycznie wyznaczalnej (rys. 18) o tęgich prętach (wymiarowych z pominięciem zagadnień niestateczności) stosujemy następną z rozpatrywanych w tej pracy modeli pręta, mianowicie pręt o skokowo zmiennym przekroju pod równomiernym obciążeniem. Model taki uzasadnia się w sposób następujący.



Rys. 18

Przy obliczaniu dystrybuanty niezniszczenia ustroju

$$(5.3) \quad F(\sigma_0) = 1 - \exp \left(- \sum_{r=1}^s \sqrt{\frac{\alpha_r \sigma_r}{b_r}} \right)$$

nieistotne jest ułożenie prętów. Wynik się nie zmienia, jeśli wyobrazimy sobie, że wszystkie pręty są ułożone i połączone wzdłuż jednej osi. Naprężenia σ_r są stałe dla każdego z prętów, $r = 1, 2, \dots, s$, jeśli tylko obciążenia są skupione w węzłach, jak to się z reguły zakłada przy obliczaniu kratownic. Przy wymiarowaniu prętów kratownicy staramy się dobrać każdy przekrój A_r tak, by wykorzystać naprężenia dopuszczalne σ_{dop} . Wobec tego

$$(5.4) \quad \sigma_r = \sigma_{\text{dop}} = \text{const}$$

i dla obliczenia średniej wartości fenomenologicznej granicy plastyczności stosujemy wzory (4.3), (4.4) i (4.5). Natomiast jeśli naprężenia σ_r nie są wyrównane, to wzory na średnią \bar{Q} , medianę \tilde{Q} i modę \hat{Q} należy uogólnić, jak następuje:

$$(5.5) \quad \bar{Q} = \int_0^{\infty} \sum_{r=1}^s \frac{1}{a_r} \sqrt{\frac{\alpha_r Q s_r}{b_r}} \exp \left(- \sum_{r=1}^s \sqrt{\frac{\alpha_r Q s_r}{b_r}} \right) dQ,$$

$$(5.6) \quad \sum_{r=1}^s \alpha_r \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{s_r}}{b_r}} = \ln 2,$$

$$(5.7) \quad \sum_{r=1}^s \frac{1}{\alpha_r} \left(\frac{1}{\alpha_r} - 1 \right) \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{s_r}}{b_r}} = \left(\sum_{r=1}^s \frac{1}{\alpha_r} \sqrt{\frac{\tilde{Q}_{s_r}}{b_r}} \right)^2.$$

Przeniesienie rozważań tej pracy na ustroje prętowe statycznie niewyznaczalne i płyty oraz inne ustroje powierzchniowe wymaga osobnego opracowania. Uzyskane rezultaty pozwalają jednak na wyciągnięcie wniosków, które mają w pewnym sensie znaczenie ogólne. Mianowicie metoda postępowania przy obliczaniu fenomenologicznej granicy plastyczności z uwzględnieniem efektu skali jest następująca. Bierzemy pod uwagę wszystkie niezależne, kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia, określamy prawdopodobieństwo każdego z nich przy wykorzystaniu prawa Weibulla, a następnie obliczamy wartość oczekiwaną i wariancję obciążenia granicznego dla całego zbioru mechanizmów zniszczenia. Ten mechanizm zniszczenia, który z deterministycznego punktu widzenia jest skuteczny i miarodajny [5], z probabilistycznego punktu widzenia jest tylko najbardziej prawdopodobny, modalny. Znając zależność funkcyjną między nośnością graniczną ustroju i granicą plastyczności materiału oraz mając obliczoną średnią wartość nośności granicznej obliczyć można średnią wartość granicy plastyczności, nazywanej przez nas fenomenologiczną, gdyż może ona być potwierdzona przez zjawiska realne przy próbnym załamaniu większej partii ustrojów danego typu i statystycznym obliczeniu średniej nośności. Na wartość średnią fenomenologicznej granicy plastyczności mają różny wpływ poszczególne rozmiary obiektu, a także schemat obciążenia, a więc jest to «efekt skali» w sensie uogólnionym, a być może należałoby tu to hasło, dobre — dla ciał kruchych [2] — zarzucić. Także «koncepcja najłabszego ogniwa w łańcuchu» traci rację bytu dla ustrojów, które ulegają zniszczeniu poprzez płynięcie plastyczne. Ta sprawa jest zresztą oczywista w deterministycznej teorii plastyczności i wyraźnie odróżnia metody wymiarowania na niej oparte od metod tradycyjnych, opartych na teorii sprężystości. Jednakże dla prętowych, statycznie wyznaczalnych ustrojów plastycznych, stosowaliśmy tę nazwę i uważamy, że wyjątkowo można to tak nazywać, rozumiejąc tę koncepcję w sensie uogólnionym, gdyż uplastycznienie nie punktu, ale całego przekroju, w którymkolwiek z prętów jest równoznaczne z katastrofą całej konstrukcji. Przy podejściu probabilistycznym koncepcja najłabszego ogniwa traci swą ostrość nawet dla ustrojów statycznie wyznaczalnych. Bowiem o parametrach rozkładu nośności granicznej decydują pewne całki oznaczone na długości wszystkich prętów, a więc wszystkie przekroje materiałne mają jakiś udział w ostatecznym wyniku, a nie tylko ten najniebezpieczniejszy.

Literatura cytowana w tekście

1. В. Болотин, *Статистические методы в строительной механике*, Изд. II, Госстройиздат. Москва 1965.
2. В. В. Чечулин, *Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов*, Металлургиздат, Москва 1963.

3. J. MURZEWSKI, *Elastic-plastic stochastically non-homogeneous bodies*, Non-homogeneity, in Elasticity and Plasticity, Proceedings of IUTAM Symposium in Warsaw 1958, Pergamon Press 1959, 479-489.

4. J. MURZEWSKI, *Plastyczność i wytrzymałość mikroskopowa niejednorodnych ośrodków stałych*, Architektura Budownictwo, Politechnika Krakowska, Zeszyt specjalny Nr 1, PWN, Kraków 1966, 257-308.

5. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK (red.), *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.

6. N. W. SMIRNOW, I. W. DUNIN-BORKOWSKI, *Krótki kurs statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa 1966.

7. W. WEIBULL, *A statistical theory of strength of materials*, Proc. Roy. Swedish [Inst. Res., nr 151, Stockholm 1939.

8. W. WEIBULL, *A statistical distribution function of wide applicability*, J. Appl. Mech., 3, 18 (1951), 293-297.

Резюме

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ ИЗ КВАЗИ-ОДНОРОДНОГО ТЯГУЧЕГО МАТЕРИАЛА

Математическое ожидание и дисперсия несущей способности простого стержня и более простых стержневых систем построенных из тягучего, микроскопически неоднородного материала, анализируется в зависимости от размеров т.е. масштаба, в котором они реализуются. При этом применяется теория вероятностей и кинематический метод несущей способности жестко-идеально-пластических сред.

Подробный анализ проводится, сперва, для простого призматического стержня, подвергаемого чистому растяжению или изгибу. Микроскопический предел пластичности q_k рассматривается как случайную, независимую переменную для микро-элементов стержня δ_k , где $k = 1, 2, 3, \dots, l$. Снятая, что несущая способность стержня равняется несущей способности самого слабого его "материального сечения", феноменологический предел пластичности ставится Q в зависимости от макрокопического предела пластичности Q_i . С помощью формул (2.8), где $i = 1, 2, \dots, n$ есть номер материального сечения в макрокопической толщине δL и макрокопической поверхностью A . При относительно слабых предположениях, касающихся распределения макрокопического предела пластичности, выводятся формулы для функции распределения $F(Q)$ (2.14), известную под названием распределения третьего типа мнимального выражения распределительного ряда или названием распределения Вейбулла. Затем определяется среднее значение феноменологического предела пластичности \bar{Q} с помощью формулы (2.15) и коэффициент изменчивости v , с помощью формулы (2.17). С помощью формул (2.25) и (2.26) связано \bar{Q} и v с практической статистической базой, состоящей из двух серий образцов известного размера и с исследованных экспериментально пределов пластичности и коэффициентов изменчивости. При малых значениях коэффициента изменчивости ($v \ll 1$) применяются приближенная линейная формула (2.27). Из анализа формул (2.23), (2.25) и (2.26) вытекает, что продольные и поперечные размеры (по отношению направления действия силы) имеют различное влияние на параметры распределения феноменологического предела пластичности.

Результаты, полученные для стержня в макрокопически однородном напряженном состоянии обобщаются на стержни с переменной внутренней силой, с помощью корректирующего коэффициента γ , который определяется, в общем, по формуле (3.8), а для особых случаев по готовым формулам (Табл. 1) или по диаграмме (рис. 13). Среднее значение предела пластичности \bar{Q} выражается, в этом случае, формулой (3.9), а коэффициент изменчивости v не изменяется (2.17).

Затем, рассматривается стержень переменного сечения в макрокопически-однородном напряженном состоянии. В случае скачкообразного изменения можно аппроксимировать среднее значение, определяя медиану или моду с помощью формул (4.4) или (4.5). Для стержней

с постоянно переменным сечением, расчет среднего значения \bar{Q} является еще более затруднительным и, поэтому рекомендуется использовать линейное приближение (4.8), решать интеграл (4.12) с помощью рекуррентных формулы и определять медиану \bar{Q} по уравнению (4.17).

Результаты рассуждений, касающихся одинарных стержней используются для определения параметров распределения несущей способности более простых статически определимых стержневых систем, по отношению к которым используется обобщенная концепция самого слабого звена цепи, в том смысле, что разрушение одного сечения влечет за собой разрушение всей системы.

Для случая многопролетной шарнирной балки (изгибаемой поперечно), постоянного поперечного сечения, применяется модель призматического стержня, нагруженного непрерывно продольной переменной силой, получено формулу (5.1) для среднего значения феноменологического предела пластичности, совпадающую с формулой (3.9) при обобщенном корректирующим коэффициенте γ .

Модель стержня со скачкообразным переменным сечением под равномерной нагрузкой, применяется к статически определимой ферме, рассчитанной на полное использование допускаемых напряжений. Если это последнее условие не выполнено — применяются формулы (5.5), (5.6) и (5.7).

В заключение даются общие указания, касающиеся метода расчета среднего феноменологического предела пластичности, с учетом эффекта масштаба, статически неопределимых систем.

Заключением, вытекающим из настоящей работы, является то, что нормативный предел пластичности должен, как правило, подвергаться исправлению, чтобы учесть особый, "неизотропный" эффект масштаба упруго-пластических тел.

Summary

THE PROBABILITY CHARACTERISTIC OF THE LIMIT LOAD OF A STRUCTURE MADE OF A QUASI-HOMOGENEOUS DUCTILE MATERIAL

The expected value and the variance of the limit load of a single bar or a simple bar system made of a ductile material, microscopically nonhomogeneous is analysed depending on the size of the structure that is the scale on which it has been made. The probability calculus and the kinematic method of limit analysis are used, the body being assumed to be a perfect rigid-plastic body.

Detailed analysis is first considered for a single prismatic bar loaded in pure tension or bending. The microscopic yield limit q_k is considered to be a random independent variable for micro-elements of the bar δ_k , where $k = 1, 2, \dots, l$. Assuming that the load-carrying capacity of the bar is equal to that of the weakest of its "material" sections, the phenomenological yield limit Q is related with the macroscopic yield limit Q_i by Eq. (2.8) where $i = 1, 2, \dots$ is the number of the material section of microscopic thickness δL and macroscopic area A . With some relatively weak assumptions on the distribution of the microscopic yield limit the equation for probability distribution $F(Q)$, (2.14) is derived. The function is known as Weibull distribution. Next, the mean value of the phenomenological yield limit \bar{Q} is determined by Eq. (2.15) and the variability coefficient v — by Eq. (2.17). By means of Eqs. (2.25) and (2.26) \bar{Q} and v are related with the statistical basis composed of two series of samples with known dimensions, the yield limits and variability coefficients being determined experimentally. With small values of the variability coefficient ($v \ll 1$) the approximate linear formula (2.27) is used. From an analysis of Eqs. (2.23), (2.25) and (2.26) it follows that the longitudinal and transversal dimensions (in relation to the line of action of the force) have a different influence on the parameters of distribution of the phenomenological yield limit.

The results obtained for a bar in a macroscopically homogeneous state of stress are generalized to bars with variable internal force by means of the correction coefficient γ which is calculated, in general, from the formula (3.8) and in particular cases, from ready equations (Table 1) or a

diagram (Fig. 13). The mean value of the phenomenological yield limit \bar{Q} is expressed in this case by Eq. (3.9) and the variability coefficient v remains unchanged (2.17).

Next is considered a bar with variable section in a macroscopically homogeneous state of stress. In the case of a jump-like variation the mean value can be approximated by calculating the median or the mode from Eqs. (4.4) or (4.5). For bars with cross-sections varying in a continuous manner the computation of the mean value of \bar{Q} is still more tedious, therefore it is recommended to use the linear approximation (4.8) for the solution of the integral (4.12) by means of the recurrence formula and to calculate the median \bar{Q} from Eq. (4.17).

The results of the consideration of single bars are made use of for the computation of the distribution parameters of the limit load of simple, statically determinated bar systems, using the generalized concept of the weakest link of a chain, which means that the failure of a single section is equivalent to that of the entire system.

In the case of a continuous articulated bar (subject to transversal bending) with constant cross-section the model of a prismatic bar is used, loaded by a variable longitudinal force in a continuous manner. Equation (5.1) is obtained for the mean value of the phenomenological yield limit coinciding with Eq. (3.9) for a generalized correction coefficient.

The model consisting of a bar with a jump-like variability of the cross-section under uniform load is applied to a statically determinate truss, for the dimensions of which full use has been made of the admissible stress. If the latter condition is not satisfied, Eqs. (5.5), (5.6) and (5.7) are applied.

In conclusion general remarks are given on the procedure for computing the mean phenomenological yield limit, taking into consideration the size effect, of statically indeterminate systems.

It is concluded that the traditional notion of the yield limit should as a rule be corrected to account for the particular "anisotropic" size effect of elastic-plastic bodies.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 listopada 1966 r.