

SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA DEFORMACJA I PEŁZANIE
POWŁOKI KULISTEJ

ZBIGNIEW BYCHAWSKI, HENRYK KOPECKI (KRAKÓW)

W ostatnio opublikowanych pracach [1-4] jeden z autorów podał rozwiązania dla stanu natychmiastowego (sprężysto-plastycznego) i pełzania membran kołowych oraz membran płaskich o dowolnym konturze w zakresie geometrycznie nieliniowym. Ogólne rozwiązanie problemu złożonej deformacji membrany kołowej przedstawione zostało przez autorów w pracy [5].

Metoda rozwiązania zastosowana w wymienionych pracach może znaleźć miejsce również w bardziej skomplikowanych zagadnieniach geometrycznie nieliniowych powłok w stanie membranowym o symetrii obrotowej. Tutaj podamy ogólne rozwiązanie problemu natychmiastowej deformacji nieliniowej małowyniosłej powłoki kulistej oraz koncepcję rozwiązania w przypadku deformacji złożonej (materiał sprężysto-plastyczno-pełzający). Rozwiązanie dla stanu czystego pełzania powłoki określimy opierając się na geometryczno-fizycznej analogii sformułowanej dla nieliniowych membran płaskich przez jednego z autorów w pracach [1 i 3].

1. Podstawowe związki fizyczne

Przyjmujemy, że materiał powłoki odkształca się zgodnie z prawem

$$(1.1) \quad e_{ik} = Ls_{ik},$$

gdzie L jest operatorem o postaci

$$(1.2) \quad Ls_{ik} = F_E(s_e) s_{ik} + \int_0^t F_C(s_e) s_{ik} dt.$$

Równanie (1.1) określa związek pomiędzy całkowitym tensorem odkształcenia e oraz dewiatorem naprężenia s dla nieściśliwego ośrodka sprężysto-plastyczno-pełzającego. Prawo to sformułowane przez ODQVISTA [7] dla materiałów metalowych jest szczególnym przypadkiem teorii nieliniowej lepkosprężystości podanej przez BYCHAWSKIEGO i FOXA [8].

Pierwszy wyraz operatora (1.2) zawierający nieliniową funkcję F_E (stanu naprężenia) związany jest z deformacją natychmiastową, natomiast wyraz drugi z nieliniową funkcją F_C określa deformację zależną od czasu.

Tutaj zakładamy, że nieliniowe funkcje stanu naprężenia są funkcjami potęgowymi o postaci

$$(1.3) \quad F_E = \frac{3}{2} A s_e^{m-1}, \quad F_C = \frac{3}{2} B s_e^{n-1},$$

gdzie s_e oznacza intensywność naprężenia wyrażoną przez składowe dewiatora naprężenia s_{ij} lub tensora naprężenia σ_{ij} :

$$(1.4) \quad s_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

W równaniu (1.5) δ jest symbolem Kroneckera.

Stałe występujące w równaniach (1.3) A , B , m i n określają fizyczne własności materiału. W szczególności wykładniki m i n są całkowitymi i nieparzystymi liczbami większymi od jedności.

Różniczkowanie funkcji (1.1) względem czasu daje tensor prędkości odkształcenia

$$(1.5) \quad \dot{e}_{ik} = \dot{L} s_{ik},$$

gdzie nowy operator ma postać

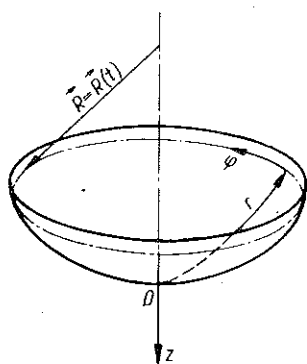
$$(1.6) \quad \dot{L} s_{ik} = \frac{d}{dt} [F(s_e) s_{ik}] + F_C(s_e) s_{ik}.$$

Ze względu na założenia nieściśliwości materiału składowe tensora prędkości odkształcenia spełniają związek

$$(1.7) \quad \dot{e}_{kk} = 0.$$

2. Związki geometryczne i warunki równowagi powłoki

Rozważamy ciekłą, małowyniosłą powłokę kulistą w stanie membranowym, która jest zamocowana przegubowo na brzegu o konturze kołowym i znajduje się pod działaniem stałego ciśnienia wewnętrznego p . W powierzchni środkowej powłoki przyjmujemy krzywoliniowy układ współrzędnych r , φ , pokrywający się z liniami krzywizn głównych, oraz oś z jako oś symetrii powłoki (rys. 1). Przemieszczenia wzdłuż założonych osi układu współrzędnych oznaczamy odpowiednio przez u , v , w , przy czym symetria obrotowa problemu narzuca warunek $v \equiv 0$.



Rys. 1

Przyjęte w pracach [1-3] geometryczne związki dla odkształceń będą obecnie zawierały dodatkowe wyrazy związane ze zmianą początkowej krzywizny powłoki $k = 1/R$, gdzie R jest promieniem kuli. Ten ostatni jest w ogólności funkcją czasu $R =$

$R(t)$, $R(0) = R_0$. W ten sposób otrzymujemy składowe odkształcenia w postaci

$$(2.1) \quad e_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{w}{R}, \quad e_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{w}{R},$$

gdzie dodatkowy wyraz w/R jest związany z deformacją wywołaną początkową krzywizną.

Prędkości odkształceń otrzymujemy na podstawie (2.1) drogą różniczkowania względem czasu

$$(2.2) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{\dot{w}}{R} - \frac{\dot{R}}{R^2} w, \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{u}}{r} + \frac{\dot{w}}{R} - \frac{\dot{R}}{R^2} w.$$

Na podstawie (2.2) znajdujemy równanie nierozdzielności odkształceń eliminując przemieszczenie u . W ten sposób mamy

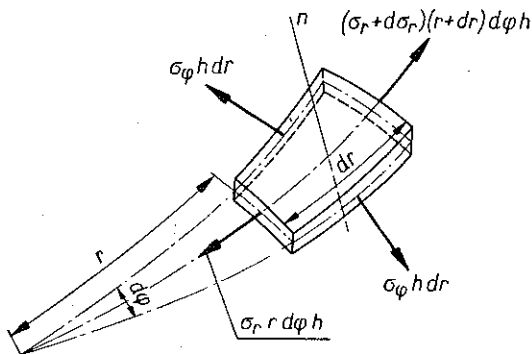
$$(2.3) \quad r \frac{d\dot{\epsilon}}{dr} + \dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r - \frac{r}{R} \frac{d\dot{w}}{dr} + \frac{d\dot{w}}{dr} \frac{dw}{dr} + r \frac{\dot{R}}{R^2} \frac{dw}{dr} = 0.$$

Rozważamy obecnie stan równowagi nieskończenie małego elementu wyciętego z powłoki w formie płata (rys. 1).

Zgodnie z założeniem o małej wyniosłości powłoki równanie równowagi naprężeń przyjmie postać

$$(2.4) \quad \frac{d}{dr} (r\sigma_r) - \sigma_\varphi = 0.$$

Drugie z kolei równanie równowagi otrzymamy rozważając element powłoki w stanie odkształconym (rys. 2).



Rys. 2

Rzutuując wszystkie działające siły wewnętrzne na kierunek normalnej do elementu otrzymamy

$$(2.5) \quad \sigma_r \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \sigma_\varphi \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = p h,$$

gdzie h jest grubością powłoki. Równanie powyższe można scałkować, przy wykorzystaniu równania (2.4) doprowadzając je do postaci

$$(2.6) \quad \frac{dw}{dr} = r \left(\frac{1}{R} - \frac{p}{2h\sigma_r} \right),$$

gdzie stała całkowania jest równa zeru.

W dalszym ciągu wprowadzimy bezwymiarową zmienną

$$(2.7) \quad \varrho = \left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

oznaczając przez l maksymalną wartość r (dla $r = l$, $\varrho = 1$) oraz bezwymiarowe funkcje naprężeń i ugięcia:

$$(2.8) \quad z = \varrho \frac{\sigma_r}{C_*}, \quad C_* = \frac{p}{4} \left(\frac{l}{h}\right)^2, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{R} = \frac{R}{h}.$$

Z równania (2.4) znajdujemy wtedy

$$(2.9) \quad \sigma_\varphi = C_* \left(2z' - \frac{z}{\varrho}\right), \quad z' = \frac{dz}{d\varrho},$$

równania zaś (2.3) i (2.6) przyjmują postać

$$(2.10) \quad 2\varrho \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\varrho} + (\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r) + 2\varrho \left\{ \frac{d\dot{w}}{d\varrho} \left[2\left(\frac{h}{l}\right)^2 \frac{d\dot{w}}{d\varrho} - \frac{1}{R} \right] + \frac{\dot{R}}{R} \frac{d\dot{w}}{d\varrho} \right\} = 0,$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\varrho} = \frac{1}{2\bar{R}} \left(\frac{l}{h}\right)^2 - \frac{\varrho}{z}.$$

3. Równanie ogólnego zagadnienia złożonej deformacji

Na podstawie równań (1.4), (2.8) i (2.9) wyrażamy składowe dewiatora naprężeń przez składowe tensora naprężenia, a następnie przez funkcję naprężeń z :

$$(3.1) \quad s_r = \frac{1}{3} (2\sigma_r - \sigma_\varphi) = \frac{1}{3} C_* \left(3\frac{z}{\varrho} - 2z'\right),$$

$$s = \frac{1}{3} (2\sigma_\varphi - \sigma_r) = \frac{1}{3} C_* \left(4z' - 3\frac{z}{\varrho}\right).$$

Wtedy intensywność naprężenia (1.4) może być przedstawiona w postaci

$$(3.2) \quad s_i^2 = C_*^2 \Omega, \quad \Omega = 4z'^2 - 6z' \frac{z}{\varrho} + 3\left(\frac{z}{\varrho}\right)^2.$$

Wprowadzając z kolei równania (3.1) do związków fizycznych (1.6) otrzymujemy składowe tensora prędkości odkształcenia

$$(3.3) \quad \dot{\varepsilon}_r = \dot{L} \left[\frac{1}{3} C_* \left(3\frac{z}{\varrho} - 2z'\right) \right], \quad \dot{\varepsilon} = \dot{L} \left[\frac{1}{3} C_* \left(4z' - 3\frac{z}{\varrho}\right) \right].$$

Wtedy równanie nierozdzielności (2.10) można zapisać w następującej formie:

$$(3.4) \quad 2\varrho \dot{L}' \left[\frac{1}{3} C_* \left(4z' - 3\frac{z}{\varrho}\right) \right] + \left\{ \dot{L} \left[\frac{1}{3} C_* \left(4z' - 3\frac{z}{\varrho}\right) \right] - \right. \\ \left. - \dot{L} \left[\frac{1}{3} C_* \left(3\frac{z}{\varrho} - 2z'\right) \right] \right\} + 2\varrho \left\{ \frac{d\dot{w}}{d\varrho} \left[2\left(\frac{h}{l}\right)^2 - \frac{d\bar{w}}{d\varrho} - \frac{1}{R} \right] + \frac{\dot{R}}{R} \frac{d\dot{w}}{d\varrho} \right\} = 0.$$

Równanie powyższe wraz z równaniem równowagi (2.10)₁ oraz odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi określają stan sprężysto-plastyczno-lepki geometrycznie nieliniowej małowyniosłej powłoki kulistej w stanie błonowym pod działaniem równomiernego ciśnienia wewnętrznego.

4. Warunki brzegowe i początkowe

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe dla powłoki dla dowolnej chwili czasu t (z rozważanego przedziału):

a) prędkość przemieszczenia lub przemieszczenie na brzegu

$$(4.1) \quad [\dot{u}(0)]_{\varrho=1} = 0, \quad [u(0)]_{\varrho=1} = 0,$$

b) prędkość ugięcia lub ugięcie na brzegu

$$(4.2) \quad [\dot{w}(0)]_{\varrho=1} = 0, \quad [w(0)]_{\varrho=1} = 0,$$

c) naprężenia w punkcie środkowym powłoki są sobie równe

$$(4.3) \quad [\sigma_r]_{\varrho=0} = [\sigma_\varphi]_{\varrho=0}, \quad \left[\left(z' - \frac{z}{\varrho} \right) \right]_{\varrho=0} = 0.$$

Warunki początkowe spełnione dla dowolnego ϱ (z rozważanego przedziału $0 \leq \varrho \leq 1$) są następujące:

d) wartości naprężeń początkowych ($t = 0$)

$$(4.4) \quad [\sigma_r]_{t=0} = \sigma_{r0}, \quad [z]_{t=0} = z_0, \\ [\sigma_\varphi]_{t=0} = \sigma_{\varphi0}, \quad \left[\left(2z' - \frac{z}{\varrho} \right) \right]_{t=0} = 2z_0 - \frac{z_0}{\varrho},$$

e) ugięcie początkowe ($t = 0$)

$$(4.5) \quad [\bar{w}]_{t=0} = \bar{w}_0.$$

Wielkości początkowe stanowią odpowiednie rozwiązania problemu natychmiastowego (sprężysto-plastycznego), określonego układem równań

$$(4.6) \quad \frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} = \frac{1}{2R_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2 - \frac{\varrho}{z_0},$$

$$(4.7) \quad 2\varrho L'_0 \left[\frac{1}{3} C_* \left(4z'_0 - 3 \frac{z_0}{\varrho} \right) \right] + \left\{ L_0 \left[\frac{1}{3} C_* \left(4z'_0 - 3 \frac{z_0}{\varrho} \right) \right] - \right. \\ \left. - L_0 \left[\frac{1}{3} C_* \left(3 \frac{z_0}{\varrho} - 2z'_0 \right) \right] \right\} + 2\varrho \frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} \left[\left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} - \frac{1}{R_0} \right] = 0,$$

gdzie operatory oznaczają

$$(4.8) \quad L_0 s = [Ls]_{t=0}, \quad L'_0 s = \frac{d}{d\varrho} L_0 s.$$

5. Szczególne przypadki problemu deformacji złożonej

Nieliniowe funkcje stanu naprężenia (1.3) możemy teraz przedstawić za pomocą równań (1.4) oraz (3.2) jak następuje:

$$(5.1) \quad F_E = \frac{3}{2} AC_*^{m-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}(m-1)}, \quad F_C = \frac{3}{2} BC_*^{n-1} \Omega_0^{\frac{1}{2}(n-1)}.$$

Wykonując naznaczone operacje w równaniu (4.7) i biorąc pod uwagę warunki (4.8) oraz (5.1) otrzymujemy

$$(5.2) \quad \Omega_0^{\frac{1}{2}(m-3)} \left[8\Omega_0 z_0'' + (m-1) \left(4z_0' - 3\frac{z_0}{\rho} \right) \Omega_0' \right] = \gamma \left[\left(\frac{2C_*}{pR_0} \right)^2 - \left(\frac{\rho}{z_0} \right)^2 \right],$$

gdzie ugięcie zostało wyeliminowane za pomocą związku (4.6) oraz gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.3) \quad \Omega_0 = [\Omega]_{l=0}, \quad \Omega_0' = \frac{d}{d\rho} \Omega_0, \quad \gamma = \frac{p}{AC_*^{m+1}}.$$

Równanie (5.2) określa stan natychmiastowy (sprężysto-plastyczny) rozważanej powłoki w stanie błonowym.

Drugim szczególnym przypadkiem jest stan czystego pełzania. Odpowiednie równanie otrzymujemy, przyjmując w formule (1.6) $F_E = 0$, tzn. pomijając deformację natychmiastową. Wtedy operator (1.6) daje

$$(5.4) \quad L_p s = [\dot{L}s]_{F_E=0} = F_C s.$$

Wprowadzając operator (5.4) do równania (3.4) uzyskujemy następujący układ równań dla problemu pełzania powłoki:

$$(5.5) \quad \frac{d\bar{w}_p}{d\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{R} - \frac{\rho}{z_p},$$

$$\Omega_p^{\frac{1}{2}(n-3)} \left[8\Omega_p z_p'' + (n-1) \left(4z_p' - 3\frac{z_p}{\rho} \right) \Omega_p' \right] = 2\gamma_p \left[\left(\frac{z_p}{\rho} \right)^2 - \left(\frac{2C_*}{pR} \right)^2 \right] \frac{\dot{R}}{R},$$

gdzie

$$(5.6) \quad z_p = [z]_{F_E=0}, \quad \bar{w}_p = [w]_{F_E=0}, \quad \Omega_p = [\Omega]_{F_E=0}, \quad \gamma_p = \frac{p}{BC_*^{n+1}}.$$

6. Metoda rozwiązania ogólnego problemu deformacji złożonej

Metoda rozwiązania dla stanu złożonej deformacji sprężysto-plastyczno-lepkiej powłoki w stanie błonowym polega na przyjęciu dla funkcji naprężeń z podwójnego szeregu potęgowego

$$(6.1) \quad z = \sum_{i,k=0}^{\infty} z_{ik} \alpha^k \rho^{i+1},$$

gdzie

$$(6.2) \quad z_{ik} = z_{ik}(\ell),$$

są zależnymi od czasu współczynnikami, α zaś jest małym parametrem fizycznym⁽¹⁾.

$$(6.3) \quad \alpha = \frac{B}{A} C_*^{n-m}.$$

Mały parametr α jako zależny od stałych fizycznych materiału A i B oraz m i n określa ten typ procesu złożonej deformacji, w którym pełzanie stanowi jego małe zaburzenie. Stała C_* w równaniu (6.3) jest związana z geometrycznymi własnościami powłoki. W każdym przypadku zakładamy, że parametr α spełnia warunek $\alpha \ll 1$.

W szczególności dla zakresu liniowej sprężystości, tzn. dla $m = 1$,

$$(6.4) \quad \alpha = \frac{B}{A} C_*^{n-1}$$

oraz dla $n = m$

$$(6.5) \quad \alpha = \frac{B}{A}.$$

Dla innego przypadku szczególnego czystej deformacji natychmiastowej $\alpha = 0$, a wtedy z równania (6.1) otrzymujemy pojedynczy szereg potęgowy

$$(6.6) \quad z_0 = \sum_{i=0}^{\infty} z_{i0} \varrho^{i+1}.$$

Rozwiązując ogólny problem korzystnie jest zastosować najpierw zamiast szeregu podwójnego (6.1) szereg pojedynczy

$$(6.7) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} z_{vi} \varrho^{v+1},$$

gdzie przyjmiemy

$$(6.8) \quad z_{vi} = \sum_{q=0}^{\infty} z_{vq}(t) \alpha^q.$$

W ten sposób unikamy konieczności potęgowania podwójnego szeregu.

Wprowadzając szereg (6.7) do równania (3.4) oraz wykonując naznaczone operacje otrzymujemy warunek wyrażony szeregiem, który musi być spełniony dla dowolnego ϱ ($0 \leq \varrho \leq 1$). Z warunku tego znajdujemy nieskończony rekurencyjny układ liniowych równań różniczkowych ze względu na szukane współczynniki szeregu (6.7) $z_k = z_k(t)$.

(1) Założenie, że parametr α jest mały, może być uzasadnione. W tym celu podamy tutaj pewne dane eksperymentalne dotyczące wartości współczynników fizycznych parametru α . Na przykład zgodnie z MARINEM [7] stała B dla rozmaitych stali w temperaturze 400–500°C jest rzędu 10^{-14} – 10^{-44} cm²/kGgodz. a współczynnik nieliniowości $n = 1,9$ – $8,6$.

Stała fizyczna A dla deformacji natychmiastowej może być określona na podstawie danych HOUDERMONTA [6] dla rozmaitych stali węglowych. Na przykład jeśli $m = 3$, to znajdujemy, że $A = 4 \cdot 10^{-13}$ (cm²/kG)³.

Można zatem wywnioskować, że dla bardzo szerokiego zakresu zmienności współczynników A i B ich stosunek jest liczbą małą. Stała C_* potęgowana do $n - m$ w równaniu (6.3) może być co do rzędu równa 10^2 .

Podstawiając z kolei szereg (6.7) do układu równań różniczkowych, znajdujemy współczynniki szeregu (6.8) $z_{vq} = z_{vq}(t)$ przez proste operacje całkowania względem czasu. W ten sposób wszystkie współczynniki z_{vq} wyrażają się przez współczynniki szeregu

$$(6.9) \quad z_0 = \sum_{q=0}^{\infty} z_{0q}(t) a^q,$$

który uzyskujemy z równania (6.7). Współczynniki ostatniego szeregu znajdujemy z warunków brzegowych, a wyrażają się one przez współczynniki szeregu (6.6), który jest rozwiązaniem problemu natychmiastowego. Tak więc ostatnie rozwiązanie

$$(6.10) \quad z_0 = \sum_{v=0}^{\infty} z_{v0} \varrho^{v+1}$$

jest rozwiązaniem podstawowym dla każdego innego problemu.

Procedura podanej tutaj metody rozwiązania rozważona została szczegółowo dla złożonej deformacji membrany płaskiej (kołowej) przez jednego z autorów w pracy [5].

7. Rozwiązanie dla problemu natychmiastowej (sprężysto-plastycznej) deformacji powłoki

W celu uzyskania rozwiązania dla stanu deformacji natychmiastowej powłoki kulistej podstawiamy szereg (6.6) w równanie (5.2). W ten sposób po wykonaniu naznaczonych operacji otrzymujemy warunek

$$(7.1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} [8a_i^0 + (m-1)b_i^0 + \gamma c_i^0 \varrho] \varrho^i + 4\gamma \frac{C_*}{p^2 R_0^2} \varrho = 0,$$

który musi być spełniony dla każdego ϱ ($0 \leq \varrho \leq 1$), gdzie współczynniki szeregu znajdujemy z następujących wzorów:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} a_k^0 &= \sum_{i=0}^k i(i+1) z_{i0} \Omega_{k-i}^1, & \Omega_0^1 &= z_{00}^{m-1}, \\ \Omega_k^1 &= \frac{1}{2kz_{00}^2} \sum_{i=1}^k [i(m+1) - 2k] \Omega_i \Omega_{k-i}^1, \\ \Omega_k^1 &= 3a_k^1 - 6a_k^2 + 4a_k^3, & a_k^1 &= \sum_{i=0}^k z_{i0} z_{k-i,0}, & a_k^2 &= \sum_{i=0}^k (i+1) z_{i0} z_{k-i,0}, \\ a_k^3 &= \sum_{i=0}^k (i+1)(k-i+1) z_{i0} z_{k-i,0}, & b_k^0 &= \sum_{i=0}^k (4i+1) z_{i0} \Omega_{k-i}^*, \\ \Omega_k^* &= \sum_{i=0}^k \Omega_i^3 \Omega'_{k-i}, & \Omega_k' &= k\Omega_k, \\ \Omega_0^3 &= z_{00}^{m-3}, & \Omega_k^3 &= \frac{1}{2kz_{00}^2} \sum_{i=1}^k [i(m-1) - 2k] \Omega_i \Omega_{k-i}^3, \end{aligned}$$

$$(7.1) \text{ c.d. } \bar{c}_k^0 = \frac{\bar{c}_k^1}{\bar{c}_2^0}, \quad \bar{c}_0^1 = 1, \quad \bar{c}_k^1 + \frac{1}{\bar{c}_0^0} \sum_{i=1}^k \bar{c}_i^0 \bar{c}_{k-i}^1 = 0,$$

$$\bar{c}_0^0 = z_{00}^2, \quad \bar{c}_k^0 = \frac{1}{kz_{00}} \sum_{i=1}^k (3i - k) z_{i0} \bar{c}_{k-i}^0.$$

Warunek (7.1) przedstawia układ rekurencyjny równań algebraicznych liniowych ze względu na szukane współczynniki szeregu (6.4). Z układu tego znajdujemy kolejno

$$(7.3) \quad z_{10} = -\gamma \frac{\xi}{2\zeta z_{00}^{m+1}},$$

$$z_{20} = -\gamma^2 \frac{[2\zeta + \xi(m-1)(4m+21)] \xi}{24(m+3) \zeta^2 z_{00}^{2m+3}},$$

$$z_{30} = -\gamma^3 \frac{\xi}{288(m+3)^2 \zeta^3 z_{00}^{3m+5}} \{ \zeta [2\zeta + 9\xi(m+3)] + \xi(m-1)(22m + 123) \zeta + [(m-1)(3m+17)(4m+21) - 3(m+3)(4m^2+25m-48)] \xi \},$$

.....

gdzie

$$(7.4) \quad \beta = \left(\frac{2C_*}{\bar{R}_0 \rho} \right)^2, \quad \xi = 1 - \beta z_{00}^2, \quad \zeta = 8 + 2(m-1).$$

Jeżeli w powyższych współczynnikach przyjmiemy $m=1$, tzn. przyjmiemy, że materiał membrany jest liniowo-sprężysty (nieściśliwy), to ze wzorów (7.3) otrzymamy

$$(7.5) \quad z_{10}^0 = -\gamma \frac{1 - \beta z_{00}^2}{2 \cdot 8 z_{00}^2},$$

$$z_{20}^0 = -\gamma^2 \frac{1 - \beta z_{00}^2}{6 \cdot 8^2 z_{00}^5},$$

$$z_{30}^0 = -\gamma^3 \frac{(1 - \beta z_{00}^2) [4 + 9(1 - \beta z_{00}^2)]}{144 \cdot 8^3 z_{00}^8},$$

.....

Inny szczególny przypadek wynika z równań (7.3) oraz (7.5), jeżeli przejdziemy do granicy przy bezwymiarowym promieniu krzywizny $\bar{R}_0 \rightarrow \infty$. W granicy zatem mamy przypadek płaskiej membrany kołowej, dla której rozwiązanie w zakresie geometrycznej nieliniowości podane zostało przez jednego z autorów w pracy [1].

Współczynniki (7.3) wyrażone są przez pierwszy współczynnik szeregu (6.6), który znajdujemy z warunku brzegowego (4.1). Na podstawie równania (4.1) mamy

$$(7.6) \quad \left[\Omega^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(4z_0' - 3 \frac{z_0}{\varrho} \right) \right]_{\varrho=1} = 0.$$

Podstawiając szereg (6 20) do równania (7.6), znajdujemy

$$(7.7) \quad \left[\sum_{i=0}^{\infty} d_i \varrho^i \right]_{\varrho=1} = 0,$$

gdzie współczynniki d_i określone są formułą

$$(7.8) \quad d_k = \sum_{i=0}^{\infty} (4i+1) z_{i0} \Omega_{k-i}^1.$$

Rozwijając warunek (7.7) mamy do rozwiązania równanie

$$(7.9) \quad 2(z_{00} + 5z_{10} + 9z_{20} + \dots) z_{00}^{m-1} + (m-1) [6z_{10} z_{00}^{m-1} + (9m+10) z_{10}^2 z_{00}^{m-2} + \\ + 6z_{20} z_{00}^{m-1} + 18(m+3) z_{10} z_{00}^{m-2} + (9m^2 - 6m - 28) z_{10}^3 z_{00}^{m-3} + \dots] = 0,$$

z którego można wyznaczyć współczynnik z_{00} z dowolną dokładnością.

Dla szczególnego przypadku liniowej sprężystości równanie (7.9) sprowadza się do postaci

$$(7.10) \quad z_{00} + 5z_{10} + 9z_{20} + \dots = 0.$$

Ograniczając się w przybliżonym rozwiązaniu do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia (7.9), znajdujemy dla z_{00} równanie algebraiczne

$$(7.11) \quad z_{00}^{m+2} + H\eta z_{00}^2 - \gamma H = 0,$$

gdzie

$$(7.12) \quad H = \frac{5+2(m-1)}{2[8+2(m-1)]}, \quad \eta = \gamma \left(\frac{2C_0}{pR_0} \right)^2 = \frac{(2h)^{2m}}{Ap^m R_0^2 l^{2(m-1)}}.$$

W równaniu tym η jest małym parametrem (2).

Dla szczególnego przypadku liniowej sprężystości materiału powłoki ($m=1$) z równania (7.11) otrzymujemy równanie algebraiczne trzeciego stopnia

$$(7.13) \quad z_{00}^3 + \frac{5}{16} \eta z_{00}^2 - \frac{5}{16} \gamma = 0,$$

które posiada jeden pierwiastek rzeczywisty

$$(7.14) \quad z_{00}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \gamma \right)^{1/3} [(P_1 + P_2^{1/2})^{1/3} + (P_1 - P_2^{1/2})^{1/3}] - \frac{5}{48} \eta,$$

gdzie

$$(7.15) \quad P_1 = \gamma - \frac{25}{3456} \eta^3, \quad P_2 = \gamma^2 - \frac{25}{1728} \gamma \eta^3.$$

(2) Można łatwo sprawdzić, że wartość parametru η jest mała. Dla $R_0 \rightarrow \infty$, tzn. dla płaskiej membrany $\eta = 0$. Tak więc parametr wyraża małą perturbację spowodowaną początkową krzywizną małowyniosłej powłoki kulistej.

W granicy dla $\bar{R}_0 \rightarrow \infty$ znajdujemy z równania (7.11) wartość

$$(7.16) \quad z_{00}^{(0)} = (\gamma H)^{\frac{1}{m+2}},$$

dla płaskiej membrany kołowej [1].

8. Natychmiastowy stan naprężenia i natychmiastowy stan przemieszczenia

Naprężenia w powłoce mogą być obliczone na podstawie związków (2.8) po podstawieniu do nich szeregu (6.9). W ten sposób otrzymujemy

$$(8.1) \quad \sigma_r = C_* \sum_{i=0}^{\infty} z_{i0} \varrho^i, \quad \sigma_\varphi = C_* \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) z_{i0} \varrho^i.$$

Warunek (4.3) daje wartości naprężeń w punkcie środkowym powłoki równe sobie:

$$(8.2) \quad \sigma_r^0 = \sigma_\varphi^0 = C_* z_{00}.$$

Natychmiastowe ugięcie powłoki obliczamy na podstawie równania (4.6), podstawiając do niego szereg (6.8). Mamy w ten sposób

$$(8.3) \quad \frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} = \frac{1}{2\bar{R}_0} \left(\frac{l}{h^2} \right)^2 - \frac{1}{z_{00}} \sum_{i=0}^{\infty} N_i \varrho^i,$$

gdzie

$$(8.4) \quad N_0 = 1, \quad N_k + \frac{1}{z_{00}} \sum_{i=1}^k z_{i0} N_{k-i} = 0.$$

Całkując równanie (8.3) otrzymujemy

$$(8.5) \quad \bar{w}_0 = \frac{1}{2\bar{R}_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2 \varrho - \frac{1}{z_{00}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_i}{i+1} \varrho^{i+1} + F.$$

Tutaj stałą F wyznacza się z warunku brzegowego (4.2):

$$(8.6) \quad F = \frac{1}{z_{00}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_i}{i+1} - \frac{1}{2\bar{R}_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

Uwzględniając znaczenie stałej (8.6) możemy ostatecznie napisać funkcję ugięcia (8.5) w postaci

$$(8.7) \quad \bar{w}_0 = \frac{1}{2\bar{R}_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2 (\varrho - 1) + \frac{1}{z_{00}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N_i}{i+1} (1 - \varrho^{i+1}).$$

Przyjmując w równaniu (8.7) $\varrho = 0$, znajdujemy ugięcie w punkcie środkowym powłoki. Wartość tego ugięcia przedstawia stała F określona wzorem (8.6).

9. Określenie wpływu nieliniowości fizykalnej na stan naprężenia i na stan przemieszczenia

Określenie wpływu nieliniowości fizykalnej zależy od stopnia dokładności obliczenia współczynnika z_{00} oraz od ilości uwzględnionych wyrazów rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji naprężeń z .

W celu znalezienia przybliżonej wartości współczynnika z_{00} rozwiążemy równanie (7.11) stosując metodę perturbacji. Jako mały parametr przyjmijmy wielkość η (por. uwaga na str. 236). Wtedy rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$(9.1) \quad z_{00} = \sum_{i=0}^{\infty} z_{00}^{(i)} \eta^i.$$

Podstawiając szereg (9.1) do równania (7.11) mamy do spełnienia warunek

$$(9.2) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (T_i + \eta S_i H) \eta^i - \gamma H = 0,$$

gdzie

$$(9.3) \quad T_0 = (z_{00}^{(0)})^{m+2}, \quad T_k = \frac{1}{k z_{00}^{(0)}} \sum_{i=1}^k [i(m+2) - k + i] z_{00}^{(i)} T_{k-i},$$

$$S_0 = (z_{00}^{(0)})^2, \quad S_k = \frac{1}{k z_{00}^{(0)}} \sum_{i=1}^k (3i - k) z_{00}^{(i)} S_{k-i}.$$

Z warunku tego znajdujemy kolejno współczynniki rozwinięcia

$$(9.4) \quad z_{00}^{(0)} = -(\gamma H)^{\frac{1}{m+2}},$$

$$z_{00}^{(1)} = -\frac{H}{(m+2)(z_{00}^{(0)})^{m-1}},$$

$$z_{00}^{(2)} = -\frac{H^2(m-3)}{2(m+2)^2(z_{00}^{(0)})^{2m-1}},$$

$$z_{00}^{(3)} = -\frac{H^3[3(m-3)(m-1) - m(m-1)]}{6(m+2)^3(z_{00}^{(0)})^{3m-1}},$$

.....

W ten sposób szereg

$$(9.5) \quad z_{00} = z_{00}^{(0)} + \eta z_{00}^{(1)} + \eta^2 z_{00}^{(2)} + \eta^3 z_{00}^{(3)} + \dots$$

określa pierwszy współczynnik szeregu (6.8), przy czym $z_{00}^{(0)}$ przedstawia nieliniowe rozwiązanie natychmiastowego problemu dla funkcji naprężeń płaskiej membrany kołowej ($\bar{R}_0 = \infty$, $\eta = 0$).

Podstawiając szereg (9.5) do równania (8.7) możemy obliczyć ugięcie punktu środkowego powłoki z dowolną dokładnością. Tak więc po rozwinięciu równania (8.7) znajdujemy najpierw

$$(9.6) \quad F = \bar{w}(0) = \frac{1}{z_{00}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z_{10}}{z_{00}} + \frac{1}{3} \frac{z_{10}^2}{z_{00}^2} - \frac{1}{3} \frac{z_{20}}{z_{00}} - \frac{1}{4} \frac{z_{10}^3}{z_{00}^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{z_{10}}{z_{00}^2} z_{20} + \dots \right) - \frac{1}{2R_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2,$$

a następnie przez eliminację współczynników z_{i0} ($i = 1, 2, \dots$) za pomocą równań (7.3) otrzymujemy

$$(9.7) \quad \bar{w}(0) = [72(m+3)\zeta^2 z_{00}^{2m+5}]^{(-1)} \{72(m+3)\zeta^2 z_{00}^{2(m+2)} + \gamma\xi\{18(m+3)\zeta z_{00}^{m+2} + \\ + [6(m+3) + (m-1)(4m+21)]\gamma\xi + 2\gamma\xi\zeta\} - \frac{1}{2R_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2\}.$$

W ostatnim wyrażeniu dla ugięcia $\bar{w}(0)$ uwzględnione zostały wszystkie wyrazy występujące w rozwinięciu (9.6).

W szczególnym przypadku liniowej sprężystości ($m = 1$) wyrażenie (9.7) daje

$$(9.8) \quad \bar{w}^0(0) = \frac{1}{2304z_{00}^7} \{2304z_{00}^6 + \xi[72z_{00}^3 + \gamma^2(3\xi + 2)]\} - \frac{1}{2R_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2.$$

Po wprowadzeniu rozwinięcia (9.5) do związku (9.7) i uporządkowaniu otrzymanych wyrazów według potęg małego parametru η otrzymujemy ostatecznie

$$(9.9) \quad F = \bar{w}(0) = \omega_1^{\frac{m}{m+2}} \omega_2^{\frac{2m+1}{m+2}} \varkappa_0(m) + \omega_1^{-\frac{m}{m+2}} \omega_2^{\frac{2m+3}{m+2}} \omega_3^2 \varkappa_1(m) + \\ + \omega_1^{-3\frac{m}{m+2}} \omega_2^{\frac{2m+5}{m+2}} \omega_3^4 \varkappa_2(m) + \omega_1^{-5\frac{m}{m+2}} \omega_2^{\frac{2m+7}{m+2}} \omega_3^6 \varkappa_3(m) + \\ + \omega_1^{-7\frac{m}{m+2}} \omega_2^{\frac{2m+4}{m+2}} \omega_3^8 \varkappa_4(m) - \frac{l^2}{2hR_0},$$

gdzie

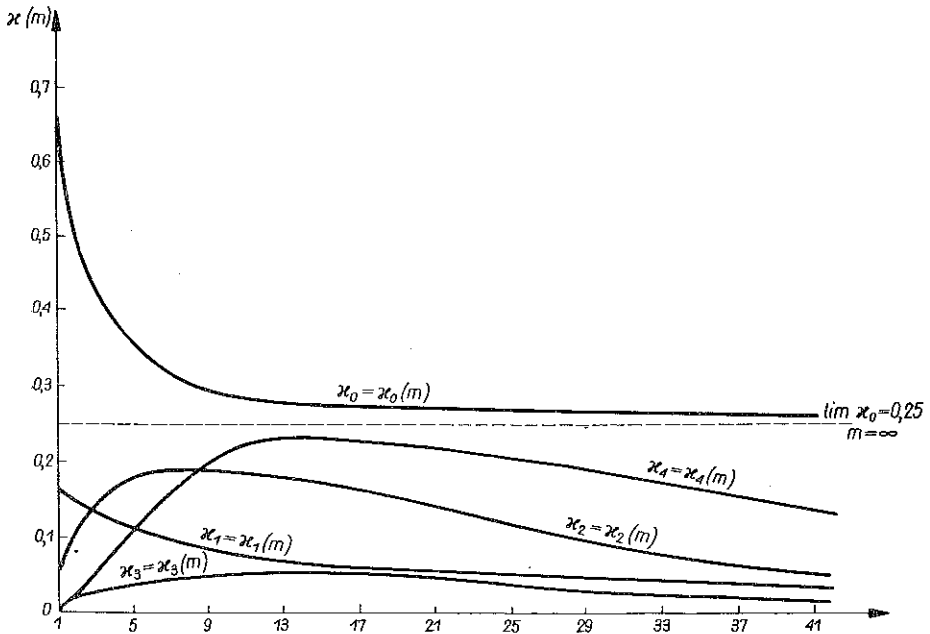
$$\omega_1 = \frac{p}{D}, \quad \omega_2 = \frac{l}{h}, \quad \omega_3 = \frac{h}{R_0}, \quad D = A^{-\frac{1}{m}},$$

$$\varkappa_0 = 2^{-2\frac{m+1}{m+2}} H^{-\frac{2m+5}{m+2}} \left[H^2 + \frac{H}{4\xi} + \frac{2(3m+17) + (m-1)(4m+25)}{72(m+3)\zeta^2} \right],$$

$$\varkappa_1 = 2^{-\frac{1}{m+2}} H^{-\frac{2m+5}{m+2}} \left\{ H^{\frac{m+4}{m+2}} \left(\frac{H}{m+2} - \frac{1}{4\xi} \right) + \right. \\ \left. + H^{\frac{2}{m+2}} \left[\frac{H(m+3)}{4(m+2)\zeta} - \frac{4(3m+13) + (m-1)(4m+23)}{72(m+3)\zeta^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(2m+5)[2(3m+17) + (m-1)(4m+25)]}{72(m+2)(m+3)\zeta^2} \right\},$$

$$\begin{aligned}
 (9.10) \quad \kappa_2 &= 2^{-2\frac{1-m}{m+2}} H^{-\frac{2m+5}{m+2}} \left\{ H^{\frac{m+6}{m+2}} \left[H \frac{m-1}{2(m+2)^2} + \frac{m+1}{4(m+2)\zeta} \right] + \right. \\
 &\quad + H^{\frac{4}{m+2}} \left[\frac{H(2m^2+7m+3)}{8(m+2)^2\zeta} - \frac{(2m+3)(m-1)(4m+23)}{72(m+2)(m+3)\zeta^2} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3(2m+5)(m+1)[2(3m+17)+(m-1)(4m+25)]}{144(m+2)^2(m+3)\zeta^2} \right] \right\}, \\
 \kappa_3 &= 2^{-2\frac{1-2m}{m+2}} H^{-\frac{2m-1}{m+2}} \left\{ \frac{(2m+1)[6(m+3)+(m-1)(4m+21)]}{72(m+3)(m+2)\zeta^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H(2m^2+m-13)}{8(m+2)^3\zeta} - \frac{(6m^2+11m+3)[(m-1)(4m+23)+4(3m+13)]}{288(m+2)^4(m+3)\zeta^2} \right\}, \\
 \kappa_4 &= 2^{-2\frac{1-3m}{m+2}} H^{-\frac{2m-3}{m+2}} \frac{(6m^2+m-1)[6(m+3)+(m-1)(4m+21)]}{144(m+2)^2(m+3)\zeta^2},
 \end{aligned}$$

oraz H określone jest wzorem (7.12).



Rys. 3

Na rysunku 3 pokazane są krzywe $\kappa_i = \kappa_i(m)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), uzyskane przez połączenie punktów dla nieparzystych wartości współczynnika nieliniowości m (3).

(3) Rozwinięcia w szeregi w tej pracy słuszne są przy założeniu, że wykładnik nieliniowości m jest całkowitą liczbą nieparzystą. Dla dowolnych wykładników nieliniowości należałoby stosować teorię szeregów potęgowych uogólnionych, co jednakże prowadzi do znacznych komplikacji rachunkowych.

Jak widać z rys. 3 wszystkie krzywe z wyjątkiem pierwszej zbiegają do zera dla wzrastających m , przy czym pierwsza krzywa posiada asymptotę poziomą 0,25. Wykażemy w p. 10, że asymptota ta odpowiada rozwiązaniu dla sztywno-plastycznej powłoki w stanie membranowym i ogranicza otrzymane rozwiązania dla nieliniowości fizycznej określonej wykładnikiem m od dołu (rys. 3).

10. Natychmiastowy stan plastyczny (model ciała sztywno-plastycznego)

Dla przypadku granicznego $m = \infty$ materiał powłoki jest sztywno-plastyczny. Wówczas intensywność naprężenia jest równa wprost granicy plastyczności Q :

$$(10.1) \quad s_0 = Q,$$

a warunek równowagi (2.4) daje

$$(10.2) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = Q.$$

Zgodnie ze związkami (2.8) mamy

$$(10.3) \quad z_q = \varrho \frac{Q}{C_q}, \quad C_q = \frac{p_q}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2,$$

a drugi warunek równowagi (2.6) ma postać

$$(10.4) \quad \frac{d\bar{w}_q}{dr} = \frac{1}{2R} \left(\frac{l}{h} \right)^2 - \frac{C_q}{Q}.$$

Całkując powyższe równanie oraz biorąc pod uwagę warunek brzegowy $w_q(1) = 0$ znajdujemy

$$(10.5) \quad \bar{w}_q = \frac{l^2}{2Rh} \left(1 - \frac{p_q}{2Q} \frac{R}{h} \right) (1 - \varrho).$$

Dla $\varrho = 0$ otrzymujemy z powyższego związku ugięcie punktu środkowego powłoki

$$(10.6) \quad F_q = \bar{w}_q(0) = \frac{l^2}{2Rh} \left(\frac{p_q}{2Q} \frac{R}{h} - 1 \right).$$

Z ostatniego rezultatu wynika liniowa zależność ugięcia punktu środkowego powłoki od obciążenia p_q . Można wykazać przez przejście graniczne, że funkcja $\kappa_0(m)$ [por. wzór (9.9)] dla $m \rightarrow \infty$ zbiega do poziomej asymptoty

$$(10.7) \quad \kappa_0(\infty) = 1/4,$$

przy czym F jest graniczną wartością ugięcia F daną równaniem (9.9) dla $m \rightarrow 0$. W tym ostatnim przypadku wszystkie współczynniki κ_i równania (9.9) z wyjątkiem κ_0 spełniają następujące warunki (rys. 3):

$$(10.8) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \kappa_i(m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

11. Fizykalno-geometryczna analogia rozwiązania dla stanu pełzania powłoki

Wykażemy obecnie, że rozwiązanie dla stanu czystego pełzania kulistej powłoki w stanie membranowym może być łatwo uzyskane przez zastosowanie analogii podanej przez jednego z autorów w pracy [1]. Analogia ta ma miejsce dla zagadnień geometrycznie nieliniowych.

Jeżeli przyjmiemy rozwiązanie równania (5.5) dla pełzającej powłoki w formie, w której zmienne są rozdzielone,

$$(11.1) \quad z_p(\varrho, t) = z_p^0(\varrho) \varphi(t),$$

oraz założymy, że promień krzywizny zmienia się w czasie,

$$(11.2) \quad \bar{R}(t) = \bar{R}_0 \varphi(t),$$

to wspomniane równanie daje związek

$$(11.3) \quad \frac{1}{\gamma_p} \left[\left(\frac{2C_p}{p\bar{R}_0} \right)^2 - \left(\frac{\varrho}{z_p^0} \right)^{2\gamma_p(-1)} \Omega_p^0 \right]^{1/2(n-3)} \left[8\Omega_p^0 z_p^{0''} + (n-1) \left(4z_p^{0'} - 3 \frac{z_p^0}{\varrho} \right) \Omega_p^{0'} \right] = \\ = -2 \frac{\dot{\varphi}(t)}{[\varphi(t)]^{n+3}} = \lambda, \quad \Omega_p^0 = \Omega_p(z_p^0).$$

Tutaj λ jest stałą, którą należy wyznaczyć z warunków brzegowych, a problem sprowadza się do zagadnienia wartości własnych.

Z drugiej strony równanie dla stanu natychmiastowego powłoki (5.2) można przedstawić w postaci analogicznej do formy (11.3):

$$(11.4) \quad \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{2C_*}{p\bar{R}_0} \right)^2 - \left(\frac{\varrho}{z_0} \right)^{2\gamma(-1)} \Omega_0 \right]^{1/2(m-3)} \left[8\Omega_0 z_0'' + (m-1) \left(4z_0' - 3 \frac{z_0}{\varrho} \right) \Omega_0' \right] = 1.$$

Porównując równania (11.3) i (11.4) łatwo stwierdzić, że są one formalnie analogiczne.

Z równania (11.3) możemy wydzielić związek dla funkcji czasu

$$(11.5) \quad \dot{\varphi}(t) + \frac{1}{2} \lambda [\varphi(t)]^{n+3} = 0,$$

z którego po scałkowaniu otrzymujemy

$$(11.6) \quad \varphi(t) = \varphi_0 \left[1 + \frac{1}{2} \lambda \varphi_0^{n+2} (n+2) t \right]^{-\frac{1}{n+2}}, \quad \varphi_0 = \varphi(0).$$

Biorąc pod uwagę formę równania (11.3) oraz postać (11.4) możemy stwierdzić, że jeżeli pierwsze równanie ma rozwiązanie (dla części niezależnej od czasu)

$$(11.7) \quad z_p^0 = z_p^0(\lambda \gamma_p, n, \varrho),$$

to rozwiązaniem drugiego równania (dla stanu natychmiastowego) będzie

$$(11.8) \quad z_0 = z_0(\gamma, m, \varrho).$$

W dalszym ciągu założymy, że stan początkowy powłoki (w chwili $t = 0$) określony jest przez stan natychmiastowy. W ten sposób rozwiązanie (11.7) musi spełniać w chwili $t = 0$ równanie (11.4) przy podstawieniu $\lambda\gamma_p = \gamma$ oraz $n = m$. Dla $t > 0$ rozwiązanie (11.7) musi spełnić równocześnie oba równania (11.3) i (11.4). Oznaczając ich lewe strony odpowiednio przez M_p i M_0 oraz dzieląc je stronami znajdujemy

$$(11.9) \quad \lambda = \frac{M_p}{M_0} = \text{const.}$$

Z drugiej strony porównując rozwiązanie (11.1) z zależnością (11.8) znajdujemy (dla $t = 0$) stałą $\varphi_0 = 1$.

W ten sposób rozwiązanie dla stanu pełzania można napisać w postaci

$$(11.10) \quad z_p = \left[1 + \frac{1}{2} \lambda (n+2) t \right]^{-\frac{1}{n+2}} z_p^0(\varrho),$$

gdzie z_p jest bezwymiarową funkcją naprężeń. Tutaj dla $t = 0$ należy zgodnie z założeniem o stanie początkowym podstawić $\lambda\gamma_p = \gamma$ oraz $n = m$. Oznacza to, że stan naprężenia w dowolnej chwili procesu pełzania jest proporcjonalny do stanu początkowego, a współczynnikiem proporcjonalności jest wartość funkcji dla tej chwili, gdzie λ zgodnie z (11.9) przyjmuje wartość równą B/A . Tak więc równanie (11.10) daje

$$(11.11) \quad z_p = \left[1 + \frac{1}{2} (n+2) \frac{B}{A} t \right]^{-\frac{1}{n+2}} z_0.$$

Jak wynika z rozwiązania (11.11) funkcja naprężeń z_p do spada zera z prędkością określoną przez współczynnik $1/2 \frac{B}{A} (n+2)$ dla t zmierzającego do nieskończoności

$$(11.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_p = 0.$$

Jeżeli stan początkowy określony jest stanem deformacji pełzania do chwili początkowej, np. $t = t_0$, to zagadnienie rozwiązania układu równań (11.3) sprowadza się do określenia wartości własnych λ dla określonych wartości wykładnika nieliniowości n . Wartości własne wyznaczamy na podstawie warunku brzegowego.

W celu znalezienia ugięcia \bar{w} przyjmujemy rozwiązanie w postaci

$$(11.13) \quad \bar{w}_p(\varrho, t) = \bar{w}_p^0(\varrho) \psi(t).$$

Podstawiając powyższe rozwiązanie w równanie (5.5) otrzymujemy po rozdzieleniu zmiennych:

$$(11.14) \quad \left[\frac{1}{2R_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2 - \frac{\varrho}{z_p^0} \right]^{(-1)} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\varrho} = \frac{1}{\varphi(t) \psi(t)}.$$

Z drugiej strony równanie (4.6) dla stanu natychmiastowego można napisać w formie analogicznej do (11.14)

$$(11.15) \quad \left[\frac{1}{2R_0} \left(\frac{l}{h} \right)^2 - \frac{\varrho}{z_0} \right]^{-1} \frac{d\bar{w}_0}{d\varrho} = 1.$$

Z równań (11.14) oraz (11.15) przy założeniu stanu natychmiastowego jako warunku początkowego (w chwili $t = 0$) znajdujemy

$$(11.16) \quad \psi(t) = [\varphi(t)]^{(-1)} = \left[1 + \frac{1}{2}(n+2) \frac{B}{A} t \right]^{\frac{1}{n+2}}$$

oraz $\psi(0) = 1$. Jak wynika z rozwiązania (11.13) oraz (11.16), ugięcie rośnie nieograniczenie dla t zmierzającego do nieskończoności:

$$(11.17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{w}_p = \infty,$$

a krzywizna $1/\bar{R}$ zgodnie z zależnością (11.2) staje się również nieograniczona.

12. Wnioski

W poprzednich punktach przedstawiliśmy kilka rozwiązań dla geometrycznie nieliniowej powłoki kulistej w stanie membranowym pod ciśnieniem wewnętrznym. Podaliśmy ogólną zasadę szukania rozwiązania w przypadku deformacji złożonej (sprężysto-plastycznej i pełzania). Tak więc metoda podwójnych szeregów potęgowych zawierających fizyczny mały parametr pozwoliła na sprowadzenie problemu do rozwiązania rekurencyjnego układu liniowego równań różniczkowych (ze względu na czas t), który całkuje się w prosty sposób. Pełne rozwiązanie przybliżone podane zostało dla stanu deformacji natychmiastowej. To ostatnie jest rozwiązaniem podstawowym dla wszystkich innych rozwiązań, a więc zarówno dla stanu deformacji złożonej jak i czystego pełzania. Rozwiązanie podstawowe zostało uzyskane za pomocą metody pojedynczych szeregów potęgowych. Współczynniki rozwinięcia dla funkcji naprężeń zostały tutaj wyznaczone z rekurencyjnego układu równań algebraicznych, przy czym pierwszy współczynnik określono metodą perturbacji. W ten sposób można było przedstawić rozwinięcie dla funkcji ugięcia oraz wartość ugięcia w punkcie środkowym powłoki w zależności od ciśnienia i wykładnika nieliniowości.

Określając wpływ fizycznej nieliniowości na rozwiązanie dla ugięcia możemy stwierdzić co następuje:

1. Jak widać z równania (9.9) dla szczególnego przypadku membrany płaskiej ($\bar{R}_0 = \infty$) ugięcie \bar{w}_0 zależy od ciśnienia spotęgowanego do $m/m+2$. W innym przypadku szczególnym liniowo-sprężystej membrany płaskiej ($m = 1$) \bar{w}_0 jest proporcjonalne do $p^{1/3}$, co zgodne jest z wynikami innych autorów (HENCKY, ODQVIST).

2. Dla membrany kulistej w stanie sztywno-plastycznym (por. p. 10), tzn. dla $m = \infty$, zależność ugięcia od ciśnienia jest liniowa. Wartość ugięcia w środku membrany kulistej jest przy tym zmniejszona w stosunku do ugięcia membrany płaskiej o wielkość współczynnika geometrycznego $l^2/2hR_0$.

W ogólności można stwierdzić, że ugięcie membrany kulistej rośnie w miarę wzrostu wykładnika nieliniowości m osiągając ekstremalną wartość dla $m \rightarrow \infty$. Wynika stąd wniosek, że wysoka nieliniowość fizyczna potęguje stan przemieszczenia geometrycznie nieliniowej membrany kulistej.

3. W ogólnym przypadku, tzn. dla $1 < m < \infty$, postać równania (9.9) wskazuje, że wyrazy z wyjątkiem pierwszego i ostatniego wpływają na ugięcie w ten sposób, iż wzrastające ciśnienie wywołuje zmniejszanie się wpływu tych wyrazów na całkowite ugięcie. W zależności od wykładnika nieliniowości m wpływ wyrazów równania (9.9) zmniejsza się dla rosnących m , a w granicy przy $m \rightarrow \infty$ zanika (rys. 3).

4. Pierwszy wyraz równania (9.9) zmierza przy m rosnącym nieograniczenie do poziomej asymptoty. Rzędna tej asymptoty wynosi 0,25, co odpowiada wartości uzyskanej z rozwiązania dla powłoki sztywno-plastycznej [por. równanie (10.6)].

Określając wpływ geometrycznej nieliniowości na stan naprężenia w powłoce znajdujemy z równania (7.3), że współczynniki rozwinięcia dla nieliniowo-sprężystej powłoki redukują się do współczynników dla płaskiej membrany kołowej, jeżeli przyjmiemy $\beta = 0$ (tzn. $R_0 = \infty$, por. równanie (7.3)]. Tak więc z postaci równań (7.3) oraz (9.4) można wnioskować, że początkowa krzywizna zmniejsza wartości naprężeń. Z formy równań (8.1) i (7.3) znajdujemy, że jednorodny stan naprężenia w punkcie środkowym membrany (dla $\varrho = 0$) jest zaburzony na skutek geometrycznej nieliniowości dla $\varrho \rightarrow 1$ (na brzegu). Tak więc dla $\varrho = 1$ mamy z równania (8.1) związki

$$(12.1) \quad \sigma_r^1 = C_* \sum_{i=0}^{\infty} z_{i0}, \quad \sigma_p^1 = C_* \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) z_{i0},$$

które określają wartości naprężeń na brzegu membrany. Z formy rozwinięcia (12.1) oraz z równania (7.3) widać, że naprężenia zmniejszają się z wzrastającym ϱ , przy czym ich maksymalne wartości dane wzorem (8.2) są sobie równe.

Zgodnie z wynikami otrzymanymi dla powłoki sztywno-plastycznej można stwierdzić, że dla wzrastającej fizycznej nieliniowości rozkład naprężeń w membranie zmierza do stanu jednorodnego (dla $m = \infty$).

Rozwiązanie dla stanu czystego pełzania uzyskane zostało na podstawie fizyczno-geometrycznej analogii, która pozwoliła na przedstawienie procesu pełzania powłoki w oparciu o rozwiązanie dla stanu natychmiastowego. W ten sposób rozwiązanie dla pełzania mogło być w sposób prosty znalezione i przyjęte jako rozwiązanie fizycznie uzasadnione. Z tego ostatniego wynika, że ugięcie oraz krzywizna wzrastają nieograniczenie dla $t \rightarrow \infty$, naprężenia zaś spadają do zera. Fakt spadku naprężeń wskazuje na to, że przy założeniu geometrycznie nieliniowej teorii pełzających membran stan pełzania jest zawsze nieustalony. Stwierdzenie tego faktu, podane już poprzednio przez ODQVISTA, wskazuje na konieczność stosowania w przypadku zagadnień geometrycznie nieliniowych membran teorii pełzania nieustalonego.

Elementarne rozwiązanie dla stanu sztywno-plastycznego można uważać jako graniczny przypadek rozwiązania natychmiastowego przy wykładniku nieliniowości rosnącym nieograniczenie. W tym ostatnim przypadku zależność ugięcia od ciśnienia jest liniowa, a stan naprężenia jest jednorodny.

Autorzy przypuszczają, że bardziej adekwatny obraz rozważanego problemu może być uzyskany na gruncie teorii skończonych ugięć oraz przez zastosowanie teorii dużych odkształceń.

13. Przykład liczbowy

Aby wykazać efektywność podanej metody rozwiązania dla zagadnienia natchmiastowego membrany kulistej, rozważymy przykład liczbowy. Dotyczy on określenia ugięcia punktu środkowego powłoki oraz rozkładu naprężeń.

Przyjmujemy następujące wartości liczbowe: stałe ciśnienie $p = 40 \text{ kG/cm}^2$, $l/h = 60$, $h = 1 \text{ cm}$, $R = 2 \cdot 10^2 \text{ cm}$, współczynnik nieliniowości $m = 3$, stała fizyczna nieliniowego prawa (1.3) określona z danych według HOUDERMONTA [6] dla stali węglowych $A = 0,4 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{kG}^3$.

Zgodnie z równaniami (2.8), (5.3), (7.3) i (7.11) znajdujemy

$$H = 0,375, \quad C_* = 3,6 \cdot 10^4 \text{ kG/cm}^2, \quad \beta = 81, \quad \gamma = 0,5954 \cdot 10^{-4},$$

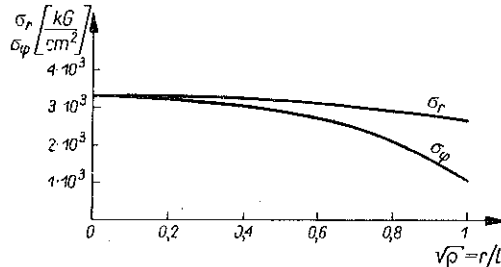
$$\eta = 4,822 \cdot 10^{-3}.$$

W ten sposób znajdujemy również wartości współczynników rozwinięcia (9.5)

$$z_{00}^{(0)} = 0,1170, \quad z_{00}^{(1)} = -5,4784, \quad z_{00}^{(2)} = 0, \quad z_{00}^{(3)} = 1,2015 \cdot 10^4,$$

a ograniczając się do pierwszych czterech wyrazów otrzymujemy

$$z_{00} = z_{00}^{(0)} + \eta z_{00}^{(1)} + \eta^2 z_{00}^{(2)} + \eta^3 z_{00}^{(3)} = 0,117 - 0,026417 + 0,00135 = 0,09195.$$



Rys. 4

Na podstawie uzyskanego wyniku określamy współczynniki $z_{10}, z_{20}, z_{30}, \dots$ szeregu (6.10). W ten sposób znajdujemy

$$z_{10} = -1,0965 \cdot 10^{-2}, \quad z_{20} = -0,51366 \cdot 10^{-2}, \quad z_{30} = -0,0479 \cdot 10^{-2},$$

a funkcja naprężeń z_0 przyjmuje postać

$$z_0 = 10^{-2} (9,1950 - 1,0965\rho - 0,51366\rho^2 - 0,0479\rho^3).$$

Wykorzystując formuły dla naprężeń (8.1) oraz wyrażenie dla funkcji naprężeń otrzymane powyżej mamy

$$\sigma_r = 3,6 \cdot 10^6 (9,195 - 1,0965\rho - 0,51366\rho^2 - 0,0479\rho^3) \text{ kG/cm}^2,$$

$$\sigma_\phi = 3,6 \cdot 10^6 (9,195 - 3,2895\rho - 2,5683\rho^2 - 0,3353\rho^3) \text{ kG/cm}^2.$$

статруется, что аналогия приведенная одним из авторов находит, также, в случае состояния чистой ползучести, применение к оболочкам вращения в безмоментном состоянии. Основываясь на этой аналогии найдено без труда физически обоснованное и допускаемое решение задачи. В качестве особого случая рассматривается оболочка из идеально пластического материала, для которой решение получено элементарным путем.

Доказывается, что особые случаи линейно-упругой оболочки и плоской мембраны вытекают из приведения авторами решений и совпадают с решениями полученными в работах [1-5].

Summary

A SPHERICAL SHELL UNDER ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION AND CREEP

In a few recent papers [1] to [4] one of the present authors has obtained some solutions for a plane membrane circular and plane membrane of any contour. These solutions concerned elastic-plastic instantaneous and creep deformation in the geometrically nonlinear range. The solutions for creep were obtained on the grounds of the physical-geometrical analogy given by the author. General solution of the composite problem of instantaneous deformation and creep of plane circular membranes was found by the present authors in [5].

The solution methods applied in the works just mentioned can also be applied in cases of composite deformation of geometrically nonlinear shells of revolution in a membrane state.

The general idea of solution is described for a composite state of an elastic-plastic and creep deformation of a spherical shell of small rise in the range of large deflections. The fundamental solution for all the particular cases of instantaneous deformation is analysed in detail. It is found that the analogy formulated by one of the present authors finds application to shells of revolution in the membrane state for pure creep also. On the basis of this analogy a physically justified and admissible solution of the problem is found in a simple manner. As a particular case is considered a shell of a perfectly plastic material, for which solution is obtained by elementary methods.

It is shown that the special cases of a linearly-elastic shell and a plane membrane can be obtained from the solutions given by the authors and coincide with the results obtained in [1-5].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 września 1966