

ZAGADNIENIA KOŁOWO-SYMETRYCZNE
PŁASKICH SIATEK O SYMETRII ŚRODKOWEJ

STANISŁAW ZIELIŃSKI (ŁÓDŹ)

Wstęp

W pracy przedstawiono niektóre rozwiązania statyczne dotyczące gęstych, płaskich siatek prętowych, składających się z dwóch lub trzech rodzin prętów prosto- lub krzywoliniowych połączonych z sobą w sposób sztywny. Przyjęto przy tym, że główne osie bezwładności prętów pokrywają się z kierunkiem normalnym i stycznym do płaszczyzny siatki.

Modelem ciągłym takiej siatki jest ośrodek włóknisty o sztywnych mikrostrukturach [1] (bazy lokalne poszczególnych włókien w rozpatrywanym punkcie mają jednakowe przesunięcia i obroty), składający się odpowiednio z dwóch lub trzech rodzin włókien. Zgodnie z podanymi w [1] uwagami dotyczącymi odpowiedniości siatki prętowej i modelującego ją ośrodka włóknistego przyjmujemy, że włókna pokrywają się z odpowiednimi osiami prętów, a przemieszczenia i obroty węzłów siatki prętowej są identyczne z przemieszczeniami i obrotami mikrostruktur ośrodka włóknistego.

Zagadnienie rozważamy w ramach teorii fizykalnie i geometrycznie liniowej (małe gradienty odkształcenia, materiał liniowo sprężysty).

Ośrodek włóknisty parametryzujemy krzywoliniowym układem współrzędnych $\{x^\alpha\}$ (1) o bazach wektorowych \mathbf{g}_α i \mathbf{g}^α oraz składowych tensora metrycznego $g_{\alpha\beta}$ i $g^{\alpha\beta}$ zdefiniowanych związkami $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta$ oraz $g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = \delta_\nu^\alpha$, przy czym $\mathbf{g}^\alpha = = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\beta$. Każdemu punktowi każdego włókna Δ siatki ($\Delta = \text{I, II, III}$) przyporządkujemy ortonormalną bazę wektorową ${}_\Delta \mathbf{d}_a$ (rys. 1). Wektory bazy ${}_\Delta \mathbf{d}_a$ wyrażmy w bazie \mathbf{g}_α . Otrzymamy wtedy

$$(0.1) \quad {}_\Delta \mathbf{d}_a = {}_\Delta d_a^\alpha \mathbf{g}_\alpha.$$

Związek odwrotny do powyższego ma postać $\mathbf{g}_\alpha = {}_\Delta d_\alpha^a {}_\Delta \mathbf{d}_a$. Iloczyn skalarny wektorów obu baz wynosi ${}_\Delta \mathbf{d}_a \cdot \mathbf{g}^\nu = \sqrt{g^{\nu\nu}} \cos({}_\Delta \mathbf{d}_a, \mathbf{g}^\nu)$, a jednocześnie na podstawie (0.1) zachodzi ${}_\Delta \mathbf{d}_a \cdot \mathbf{g}^\nu = {}_\Delta d_a^\nu$. Porównując oba związki otrzymujemy

$$(0.2) \quad {}_\Delta d_a^\nu = \sqrt{g^{\nu\nu}} \cos({}_\Delta \mathbf{d}_a, \mathbf{g}^\nu) = \sqrt{g^{\nu\nu}} \cos {}_\Delta \theta_a^\nu.$$

(1) Wskaźniki oznaczone małymi literami greckimi przebiegają ciąg 1, 2. Wprowadzona została konwencja sumacyjna.

Macierze utworzone ze współczynników Δd_a^ν przyjmują postać (rys. 1)

$$(0.3) \quad [|\Delta d_a^\nu|] = [|\sqrt{g^{\nu\nu}} \cos \Delta \vartheta_a^\nu|] = \begin{bmatrix} \left| \sqrt{g^{11}} \cos I \vartheta_a^1 \right| & \left| \sqrt{g^{22}} \cos I \vartheta_a^2 \right| \\ \left| \sqrt{g^{11}} \cos II \vartheta_a^1 \right| & \left| \sqrt{g^{22}} \cos II \vartheta_a^2 \right| \\ \left| \sqrt{g^{11}} \cos III \vartheta_a^1 \right| & \left| \sqrt{g^{22}} \cos III \vartheta_a^2 \right| \end{bmatrix}.$$

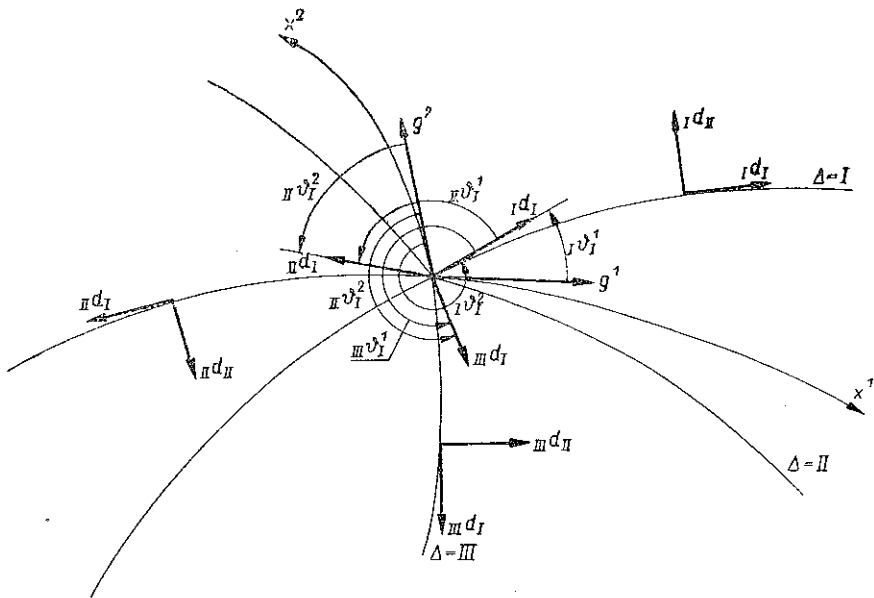
Średnikiem oznaczono pochodną kowariantną, a przecinkiem pochodną cząstkową. Przejścia od pochodnej kowariantnej do pochodnej cząstkowej dla tensora dowolnej walencji dokonujemy według znanej reguły:

$$(0.4) \quad T^{\alpha\beta\dots\mu; \nu} = T^{\alpha\beta\dots\mu, \nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha T^{\gamma\beta\dots\mu} + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta T^{\alpha\gamma\dots\mu} + \dots - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma T^{\alpha\beta\dots\gamma},$$

w której $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ są symbolami Christoffela drugiego rodzaju:

$$(0.5) \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{df}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\nu\beta, \mu} + g_{\beta\mu, \nu} - g_{\mu\nu, \beta}),$$

a $g_{\alpha\beta}$ i $g^{\alpha\beta}$ są ko- i kontrawariantnymi składowymi tensora metrycznego.



Rys. 1

Poniżej zestawimy podstawowe równania płaskiego ośrodka włóknistego. Równania równowagi dla ośrodka włóknistego są analogiczne jak dla kontinuum typu Cosseratów i w zagadnieniach statycznych przyjmują postać

$$(0.6) \quad \begin{aligned} p^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + f^\beta &= 0, \\ m^{\alpha 3}{}_{;\alpha} + \epsilon_{\alpha\nu}{}^3 p^{\alpha\nu} + h^3 &= 0, \quad \alpha, \beta, \nu = 1, 2, \end{aligned}$$

w których $p^{\alpha\beta}$ i $m^{\alpha 3}$ są kontrawariantnymi składowymi tensora napięcia siłowego i momentowego, f^β i h^3 są gęstościami powierzchniowego obciążenia siłowego oraz momentowego; $\epsilon_{\alpha\nu}^3$ są trójwektorami Ricciego.

Związki fizyczne spełniają zależności [1]:

$$(0.7) \quad \begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\mu\nu} (w_{\nu;\mu} + \epsilon_{\nu\mu}^3 v_3), \\ m^{\alpha 3} &= C^{\alpha 3\beta 3} v_{3;\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \end{aligned}$$

w których w_ν i v_3 są składowymi kowariantnymi wektora przemieszczenia w oraz wektora niezależnego obrotu v , a $A^{\alpha\beta\mu\nu}$ i $C^{\alpha 3\beta 3}$ są składowymi afinorów sztywności. Dla ośrodka włóknistego o sztywnych mikrostrukturach stanowiącego model ciągly siatki prętowej, składowe tych afinorów mają postać [1]

$$(0.8) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\beta\mu\nu} &= \sum_{\Delta} \Delta d_I^\alpha \Delta d_I^\mu (\Delta d_I^\beta \Delta d_I^\nu \Delta R^I + \Delta d_{II}^\beta \Delta d_{II}^\nu \Delta R^{II}), \\ A^{\alpha 3\beta 3} &= \sum_{\Delta} \Delta d_I^\alpha \Delta d_I^\beta \Delta R^{III}, \\ C^{\alpha 3\beta 3} &= \sum_{\Delta} \Delta d_I^\alpha \Delta d_I^\beta \Delta S^{III}. \end{aligned}$$

Przez ΔR^I , ΔS^{II} i ΔS^{III} oznaczamy kolejno podłużną oraz główne sztywności giętkie pręta podzielone przez odległość między sąsiednimi prętami tej samej rodziny, a $\Delta R^{II} \stackrel{\text{df}}{=} 12 \Delta S^{III} / l_\Delta^2$ oraz $\Delta R^{III} \stackrel{\text{df}}{=} 12 \Delta S^{II} / l_\Delta^2$ (l_Δ oznacza odległość między sąsiednimi węzłami pręta Δ).

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem osiowo-symetrycznym, tj. takim, w którym zarówno siatka ośrodka jak i jej sposób obciążenia charakteryzują się symetrią biegunową. Przyjmując układ $\{x^\alpha\}$ jako układ biegunowy ($x^1 = r$, $x^2 = \varphi$) otrzymamy $v_3 \equiv 0$ oraz $w_2 \equiv 0$. Jediną nieznaną wielkością geometryczną jest składowa wektora przemieszczenia $w_1 \neq 0$.

Z powyższego wynika, że $m^{\alpha 3} = C^{\alpha 3\beta 3} v_{3;\beta} \equiv 0$, tzn. w przypadku osiowo-symetrycznym nie występują naprężenia momentowe.

Równania równowagi przy braku obciążeń powierzchniowych ($f^\beta = w^3 = 0$) uproszczą się:

$$(0.9) \quad \begin{aligned} p^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta}^3 p^{\alpha\beta} &= 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

Ze wzoru (0.9)₂ wynika, że $p^{[\alpha\beta]} = 0$, tj. osiowo-symetryczny stan napięcia w rozpatrywanych tu siatkach jest symetryczny.

Dokonując w (0.9) zamiany pochodnej kowariantnej na pochodną cząstkową według (0.4) otrzymujemy

$$(0.10) \quad p^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = p^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha p^{\nu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta p^{\alpha\nu} = 0,$$

a związek fizyczny (0.7)₁ w rozważanym przypadku sprowadzi się do

$$(0.11) \quad p^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\mu\nu} w_{\nu;\mu}.$$

W układzie współrzędnych biegunowych r, φ ($x^1 \rightarrow r, x^2 \rightarrow \varphi$) zgodnie z (0.4) równania równowagi (0.10) przyjmą postać

$$(0.12) \quad p^{rr}, r + \frac{1}{r} p^{rr} - r^2 p^{\varphi\varphi} = 0$$

lub inaczej $p^{\varphi\varphi} = r^{-2} (rp^{rr})_{,r}$. Drugie równanie równowagi w stanie osiowo-symetrycznym jest spełnione tożsamościowo.

Związki fizyczne (0.11) w biegunowym układzie współrzędnych wyrażają się zależnościami

$$(0.13) \quad \begin{aligned} p^{rr} &= A^{rrrr} w_{r,r} + A^{rr\varphi\varphi} r w_r, & p^{\varphi\varphi} &= A^{\varphi\varphi rr} w_{r,r} + A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} r w_r, \\ p^{r\varphi} &= A^{r\varphi rr} w_{r,r} + A^{r\varphi\varphi\varphi} r w_r, & p^{\varphi r} &= A^{\varphi rrr} w_{r,r} + A^{\varphi r\varphi\varphi} r w_r. \end{aligned}$$

Równania (0.12) i (0.13) opisują zagadnienie kołowo-symetryczne płaskich siatek o symetrii środkowej.

1. Afinory sztywności sprężystej ośrodka włóknistego jako modelu siatek prętowych o symetrii środkowej

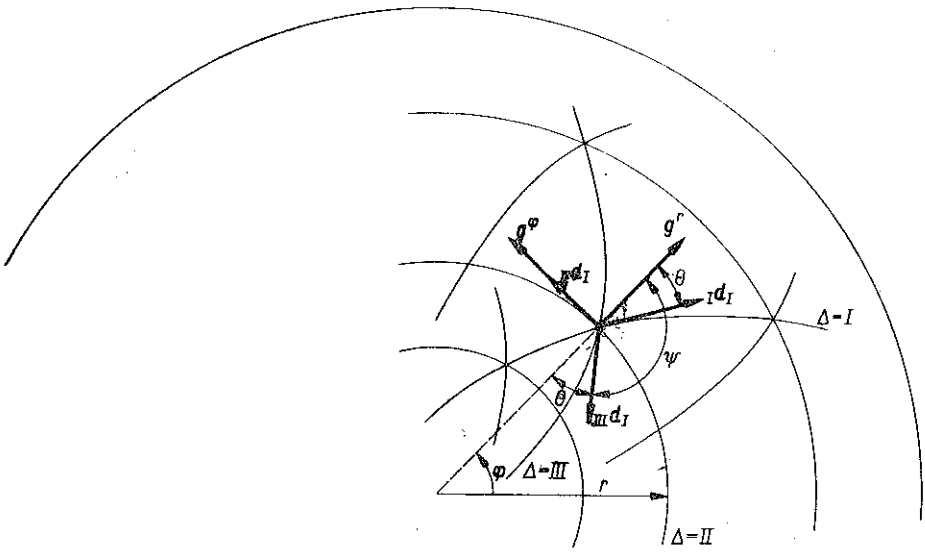
W punkcie tym podamy wzory na składowe afinorów sztywności sprężystej występujących we wzorach (0.13) w przypadku różnych rodzajów siatek o symetrii środkowej. Podstawą będzie wzór (0.8)₁. W biegunowym układzie współrzędnych r, φ dla siatek, w których linia parametryczna φ pokrywa się z włóknem $\Delta = \Pi$ (rys. 2) macierze (0.3) mają postać

$$(1.1) \quad \|\|_{\Delta} d_{\mathbf{I}}^{\prime}\|\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ 0 & \frac{1}{r} \\ -\cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \end{array} \right\|, \quad \|\|_{\Delta} d_{\mathbf{II}}^{\prime}\|\| = \left\| \begin{array}{cc} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \\ -1 & 0 \\ \sin \theta & -\frac{1}{r} \cos \theta \end{array} \right\|,$$

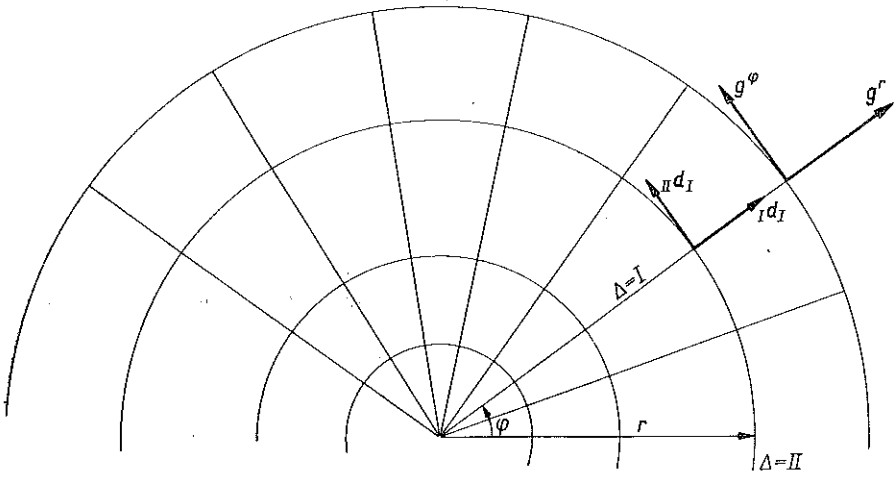
przy czym ze względu na biegunową symetrię siatki $\varphi = \pi - \theta$.

Dla trzech rodzin krzywoliniowych prętów, korzystając z macierzy (1.1), wzory (0.8)₁ możemy napisać w postaci następującej:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A^{rrrr} &= 2 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta R^{\mathbf{I}} + \sin^2 \theta R^{\mathbf{II}}), \\ A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= \frac{2}{r^4} \sin^2 \theta (\sin^2 \theta R^{\mathbf{I}} + \cos^2 \theta R^{\mathbf{II}}) + \frac{1}{r^4} \Pi R^{\mathbf{I}}, \\ A^{r\varphi r\varphi} &= \frac{2}{r^2} \cos^2 \theta (\sin^2 \theta R^{\mathbf{I}} + \cos^2 \theta R^{\mathbf{II}}) + \frac{1}{r^2} \Pi R^{\mathbf{II}}, \\ A^{\varphi r \varphi r} &= \frac{2}{r^2} \sin^2 \theta (\cos^2 \theta R^{\mathbf{I}} + \sin^2 \theta R^{\mathbf{II}}), \\ A^{r\varphi\varphi r} &= A^{\varphi r r \varphi} = A^{rr\varphi\varphi} = A^{\varphi\varphi rr} = \frac{2}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (R^{\mathbf{I}} - R^{\mathbf{II}}). \end{aligned}$$



Rys. 2



Rys. 3

Ze względu na biegunową symetrię siatki ${}_I R^a = {}_{III} R^a = R^a$. Pozostałe składowe a finora sztywności \dot{A} równe są zeru.

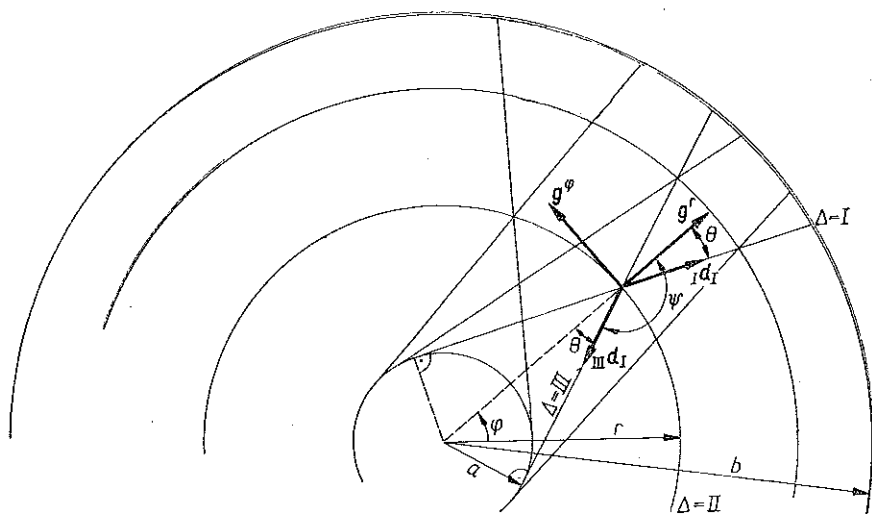
Dla siatki biegunowej (rys. 3) $\alpha = \theta \equiv 0$, ${}_1 R^a = \frac{1}{2} R^a$, ${}_2 R^a = {}_{II} R^a$. Skąd następnie

$$\begin{aligned}
 \dot{A}^{rrrr} &= {}_1 R^I, & \dot{A}^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^4} 2R^I, \\
 \dot{A}^{r\varphi r\varphi} &= \frac{1}{r^2} {}_1 R^{II}, & \dot{A}^{\varphi r\varphi r} &= \frac{1}{r^4} 2R^I, \\
 \dot{A}^{rr\varphi\varphi} &= \dot{A}^{\varphi\varphi rr} = \dot{A}^{r\varphi\varphi r} = \dot{A}^{\varphi r r\varphi} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Dla siatki przedstawionej na rys. 4 $\theta = \text{const}$, $\sin \theta = a/r$. Ze wzoru (1.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 A^{rrrr} &= \frac{2}{r^4} (r^2 - a^2) [(r^2 - a^2) R^I + a^2 R^{II}], \\
 A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= \frac{2a^2}{r^8} [a^2 R^I + (r^2 - a^2) R^{II}] + \frac{1}{r^4} {}_{II}R^I, \\
 A^{r\varphi r\varphi} &= \frac{2}{r^6} (r^2 - a^2) [a^2 R^I + (r^2 - a^2) R^{II}], \\
 A^{\varphi r \varphi r} &= \frac{2a^2}{r^6} [(r^2 - a^2) R^I + a^2 R^{II}] + \frac{1}{r^2} {}_{II}R^{II}, \\
 A^{rr\varphi\varphi} &= A^{\varphi\varphi rr} = A^{\varphi r r \varphi} = A^{r \varphi \varphi r} = 2 \frac{a^2}{r^6} (r^2 - a^2) (R^I - R^{II}).
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Siatki przedstawione na rys. 3 i 4 i określone wzorami (1.3) i (1.4) są szczególnymi przypadkami siatki przedstawionej na rys. 2.



Rys. 4

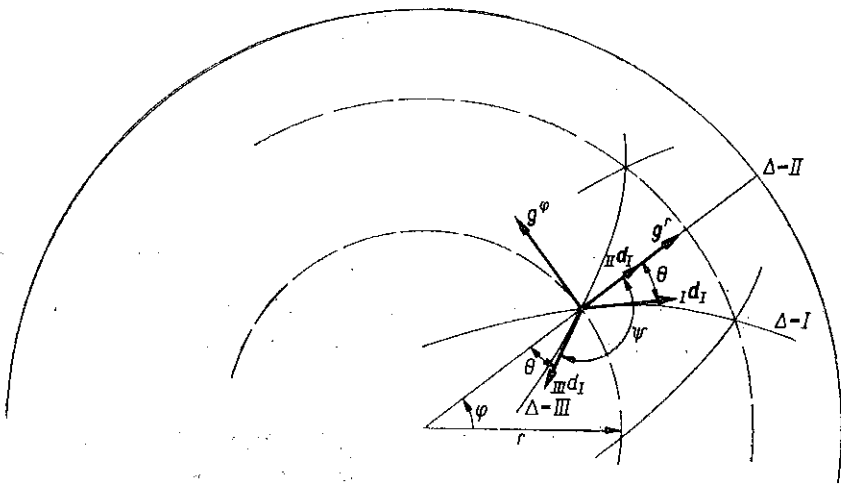
Dla siatki pokazanej na rys. 5 ze wzoru (0.2) obliczamy macierze:

$$\begin{aligned}
 [{}_I d_I^r] &= \begin{bmatrix} \cos \theta, & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ 1, & 0 \\ \cos \theta, & \frac{1}{r} \sin \theta \end{bmatrix}, & [{}_I d_{II}^r] &= \begin{bmatrix} \sin \theta, & \frac{1}{r} \cos \theta \\ 0, & \frac{1}{r} \\ -\sin \theta, & \frac{1}{r} \cos \theta \end{bmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

co z uwagi na (0.8)₁ prowadzi do wyrażeń na składowe afinorów sztywności sprężystej:

$$\begin{aligned}
 A^{rrrr} &= 2 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta R^I + \sin^2 \theta R^{II}) + \Pi R^I, \\
 A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= \frac{2}{r^4} \sin^2 \theta (\sin^2 \theta R^I + \cos^2 \theta R^{II}), \\
 A^{r\varphi r\varphi} &= \frac{2}{r^2} \cos^2 \theta (\sin^2 \theta R^I + \cos^2 \theta R^{II}) + \frac{1}{r^2} \Pi R^{II}, \\
 A^{\varphi r \varphi r} &= \frac{2}{r^2} \sin^2 \theta (\cos^2 \theta R^I + \sin^2 \theta R^{II}), \\
 A^{r\varphi\varphi r} &= A^{\varphi r r \varphi} = A^{rr\varphi\varphi} = A^{\varphi\varphi r r} = \frac{2}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (R^I - R^{II});
 \end{aligned}$$

pozostałe składowe afinora A są równe zeru.

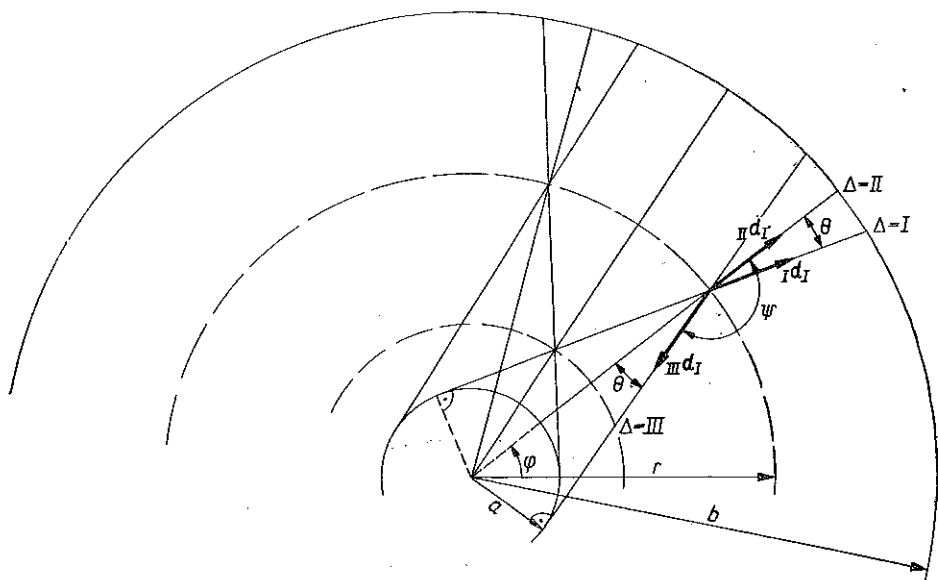


Rys. 5

Dla siatki składającej się z trzech prostoliniowych rodzin prętów (rys. 6) zachodzi \$\sin \theta = a/r\$, skąd następnie z (1.6) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 A^{rrrr} &= \frac{2}{r^4} (r^2 - a^2) [(r^2 - a^2) R^I + a^2 R^{II}] + \Pi R^I, \\
 A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= 2 \frac{a^2}{r^8} [a^2 R^I + (r^2 - a^2) R^{II}], \\
 A^{r\varphi r\varphi} &= \frac{2}{r^6} (r^2 - a^2) [a^2 R^I + (r^2 - a^2) R^{II}] + \frac{1}{r^2} \Pi R^{II}, \\
 A^{\varphi r \varphi r} &= 2 \frac{a^2}{r^6} [(r^2 - a^2) R^I + a^2 R^{II}], \\
 A^{r\varphi\varphi r} &= A^{\varphi r r \varphi} = A^{rr\varphi\varphi} = A^{\varphi\varphi r r} = 2 \frac{a^2}{r^6} (r^2 - a^2) (R^I - R^{II}).
 \end{aligned}$$

Jeżeli siatka składa się nie z trzech lecz z dwu rodzin włókien, to we wzorze (1.4) lub (1.7) należy przyjąć \$\Pi R^a \equiv 0\$ (\$a = I, II\$).



Rys. 6

2. Niektóre rozwiązania dla kołowo-symetrycznego stanu obciążenia

Napiszmy równanie równowagi (0.12) w przemieszczeniach. W tym celu wprowadźmy do niego związki (0.13). W wyniku otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci

$$(2.1) \quad A^{rrrr} w_{r,rr} + \frac{1}{r} (A^{rrrr} + r A_{,r}^{rrrr} + r^2 A^{rr\varphi\varphi} - r^2 A^{\varphi\varphi rr}) w_{r,r} + \\ + (2A^{rr\varphi\varphi} + r A_{,r}^{rr\varphi\varphi} - r^2 A^{\varphi\varphi\varphi\varphi}) w_r = 0.$$

Dla wszystkich rozważanych przez nas typów siatek mamy $A^{rr\varphi\varphi} \equiv A^{\varphi\varphi rr}$. Stąd równanie różniczkowe siatki (2.1) możemy napisać w postaci

$$(2.2) \quad A^{rrrr} w_{r,rr} + \frac{1}{r} (A^{rrrr} + r A_{,r}^{rrrr}) w_{r,r} + (2A^{rr\varphi\varphi} + r A_{,r}^{rr\varphi\varphi} - r^2 A^{\varphi\varphi\varphi\varphi}) w_r = 0.$$

Poniżej podamy rozwiązania dla poszczególnych typów siatek przy osiowo-symetrycznym obciążeniu brzegu zewnętrznego i założeniu że brzeg wewnętrzny jest wolny od obciążeń.

Rozwiązania równania (2.2) poszukiwać będziemy metodą odwrotną. Określając postać funkcji przemieszczenia w_r z równania różniczkowego (2.2) otrzymujemy warunek dla składowych afinora sztywności sprężystej, co określa strukturę siatki.

Dla siatki przedstawionej na rys. 4, którą nazwijmy dla uproszczenia siatką typu I, równanie różniczkowe (2.2) zgodnie z (1.4) po przekształceniach sprowadzi się do postaci

$$(2.3) \quad f_1(r) w_{r,rr} + g_1(r) w_{r,r} + h_1(r) w_r = 0,$$

w której przyjęto oznaczenia

$$f_1(r) = (r^2 - a^2) [(r^2 - a^2) R^I + a^2 R^{II}],$$

$$g_1(r) = (r^2 - a^2) R_{,r}^I + \frac{1}{r} (r^4 + 2a^2 r^2 - 4a^4) R^I + (r^2 - a^2) \left(R_{,r}^{II} - \frac{1}{r} R^{II} \right),$$

$$h_1(r) = \frac{a^2}{r} \left[(r^2 - a^2) R_{,r}^I - \frac{1}{r} (2r^2 - a^2) R^I - (r^2 - a^2) R_{,r}^{II} + \frac{2}{r} (r^2 - a^2) R^{II} - \frac{1}{a^2 r} {}_{II}R^I \right].$$

Zgodnie z podanym powyżej schematem metody odwrotnej należy ustalić w (2.3) postać funkcji w_r . W dalszym ciągu ograniczymy się do przyjęcia $w_r = \text{const}$; stąd $w_{r,r} = 0$, $w_{r,rr} = 0$.

Równanie różniczkowe (2.3) sprowadzi się do postaci $h_1(r) = 0$, tj.

$$(2.4) \quad (r^2 - a^2) R_{,r}^I - \frac{1}{r} (2r^2 - 3a^2) R^I - (r^2 - a^2) R_{,r}^{II} + \frac{2}{r} (r^2 - a^2) R^{II} - \frac{1}{a^2 r} {}_{II}R^I = 0.$$

Jest to warunek dla sztywności R^I i R^{II} . Warunek ten napiszmy w postaci

$$(2.5) \quad R_{,r}^{II} + p_1(r) R^{II} = q_1(r),$$

gdzie

$$p_1(r) = -\frac{2}{r} \frac{(r^2 - 2a^2)}{r^2 - a^2},$$

$$q_1(r) = R_{,r}^I - \frac{2r^2 - 3a^2}{r(r^2 - a^2)} R^I - \frac{1}{a^2 r(r^2 - a^2)} {}_{II}R^I.$$

Warunek (2.5) potraktujemy jako niejednorodne równanie różniczkowe względem funkcji $R^{II}(r)$. Równanie to rozwiązujemy znanymi metodami [2]. W wyniku otrzymujemy

$$(2.6) \quad R^{II} = e^{-\int p_1 dr} \left[C^{II} + \int q_1 e^{\int p_1 dr} dr \right]$$

lub po przekształceniach

$$(2.7) \quad R^{II} = \frac{r^2 - a^2}{r^4} \left\{ C^{II} + \int \left[R_{,r}^I - \frac{2r^2 - 3a^2}{r(r^2 - a^2)} R^I - \frac{1}{a^2 r(r^2 - a^2)} {}_{II}R^I \right] \times \frac{r^4}{(r^2 - a^2)^2} dr \right\}.$$

Z powyższego rozwiązania możemy wyspecyfikować szereg przypadków szczególnych. Tak np. dla $R^I = C^I = \text{const}$ oraz ${}_{II}R^I = {}_{II}C^I = \text{const}$ otrzymamy

$$R^{II} = \frac{r^2 - a^2}{r^4} \left[C^{II} - C^I \int \frac{2r^2 - 3a^2}{(r^2 - a^2)^2} r^3 dr - \frac{1}{a^2} {}_{II}C^I \int \frac{r^3}{(r^2 - a^2)^2} dr \right].$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(2.8) \quad R^{\text{II}} = \frac{r^2 - a^2}{r^4} \left\{ C^{\text{II}} - \frac{1}{2} C^{\text{I}} \left[\frac{2r^2 - 4a^2 r^2 + 3a^4}{r^2 - a^2} + a^2 \ln(r^2 - a^2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2a^2} {}_{\text{II}}C^{\text{I}} \left[\ln(r^2 - a^2) - \frac{a^2}{r^2 - a^2} \right] \right\}$$

W analogiczny sposób możemy wyznaczyć sztywność R^{I} jako funkcję R^{II} oraz ${}_{\text{II}}R^{\text{I}}$.

W przypadku gdy sztywność R^{I} oraz R^{II} przybierają wartości stałe $R^{\text{I}} = C^{\text{I}} = \text{const}$ oraz $R^{\text{II}} = C^{\text{II}} = \text{const}$, to z warunku (2.4) wynika związek

$$(2.9) \quad {}_{\text{II}}R^{\text{I}} = a^2 [2(r^2 - a^2) C^{\text{II}} - (2r^2 - 3a^2) C^{\text{I}}].$$

Jak wynika z (2.4) sztywności R^{II} , R^{I} i ${}_{\text{II}}R^{\text{I}}$ nie mogą jednocześnie przyjmować wartości stałych.

Dla założonego przemieszczenia $w_r = \text{const}$ związku (0.13) określające stan naprężenia uproszczą się:

$$(2.10) \quad p^{rr} = A^{rr\varphi\varphi} r w_r, \quad p^{\varphi\varphi} = A^{\varphi\varphi\varphi\varphi}, \\ p^{r\varphi} = p^{\varphi r} = 0.$$

Założmy, że $R^{\text{I}} = C^{\text{I}} = \text{const}$ oraz $R^{\text{II}} = C^{\text{II}} = \text{const}$; ze wzoru (1.4)₁ otrzymujemy $A^{rrrr} = 2/r^4 (r^2 - a^2) [(r^2 - a^2) C^{\text{I}} + a^2 C^{\text{II}}]$, a po podstawieniu do (2.10)₁

$$(2.11) \quad p^{rr} = \frac{2}{r^3} (r^2 - a^2) [(r^2 - a^2) C^{\text{I}} + a^2 C^{\text{II}}] w_r.$$

Ze wzoru (2.11) wynika, że $[p^{rr}]_{r=a} = 0$, tj. brzeg jest wolny od obciążeń oraz że

$$[p^{rr}]_{r=b} = \frac{2}{b^3} (b^2 - a^2) [(b^2 - a^2) C^{\text{I}} + a^2 C^{\text{II}}] w_r = \hat{p}^r,$$

gdzie \hat{p}^r jest obciążeniem radialnym zewnętrznego brzegu. Z równania powyższego możemy wyznaczyć stałą w_r . Analogiczna sytuacja zachodzi dla innych przypadków rozpatrywanych siatek.

3. Rozwiązania dla siatek biegunowych

Ze względu na zastosowanie bezpośredniej metody rozwiązania siatki biegunowe rozpatrujemy oddzielnie.

Jak wynika z (1.3) dla siatki takiej zachodzi $A^{rr\varphi\varphi} = A^{\varphi\varphi rr} \equiv 0$. Równanie różniczkowe (2.1) w przypadku siatki biegunowej przyjmie postać

$$(3.1) \quad w_{r,rr} + \frac{1}{r} \left(1 + r \frac{A^{rrrr}}{A^{rrrr}} \right) w_{r,r} - r^2 \frac{A^{\varphi\varphi\varphi\varphi}}{A^{rrrr}} w_r = 0.$$

Założmy, że ${}_{\text{I}}R^{\text{I}} = R^{\text{I}} = A^1 \varrho^\alpha$ i ${}_{\text{II}}R^{\text{I}} = A^2 \varrho^\beta$, gdzie $\varrho = r/b$ jest współrzędną bezwymiarową ($0 \leq \varrho \leq 1$) oraz α i β dowolnymi stałymi. Na podstawie (1.3)

$A^{rrrr} = {}_I R^I = A^1 \varrho^\alpha$, $A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} = r^{-4} {}_{II} R^I = A^2 b^{-4} \varrho^{\beta-4}$. Równaniu (3.1) we współrzędnych bezwymiarowych nadamy postać

$$(3.2) \quad u_{,ee} + \frac{1+a}{\varrho} u_{,e} - \frac{k_1}{\varrho^2} \varrho^\nu u = 0,$$

w której $u = w_r$, $k_1 = A^2/A^1$ oraz $\nu = \beta - a$.

Rozwiązań równania (3.2) poszukujemy w postaci szeregu potęgowego:

$$(3.3) \quad u(\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(i)} \varrho^{n\nu+\varepsilon}, \quad i = 1, 2.$$

Obliczając kolejne pochodne i podstawiając wraz z funkcją $u(\varrho)$ do (3.2) otrzymujemy

$$(3.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{C_n^{(i)}[(n\nu+\varepsilon)(n\nu+\varepsilon-1)+(1+a)(n\nu+\varepsilon)] \varrho^{n\nu+\varepsilon-2} - C_n^{(i)} k_1 \varrho^{(n+1)\nu+\varepsilon-2}\} = 0.$$

Przyrównując do zera (dla $n=0$) współczynniki przy najniższej potędze ϱ otrzymamy związek $\varepsilon(\varepsilon+a) = 0$, z którego wynika $\varepsilon_1 = 0$ oraz $\varepsilon_2 = -a$. Zakładamy, że $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = a \neq n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Przez porównanie w (3.4) dla dowolnego n współczynników przy jednakowych potęgach ϱ otrzymujemy dla $\varepsilon = \varepsilon_i$ ($i = 1, 2$) następujący wzór rekurencyjny:

$$(3.5) \quad C_n^{(i)} = C_{n-1}^{(i)} \frac{k_1}{(n\nu+\varepsilon_i)(n\nu+a+\varepsilon_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Stąd dla $i = 1$

$$(3.6) \quad C_n^{(1)} = C_{n-1}^{(1)} \frac{k_1}{n\nu(n\nu+a)}$$

oraz dla $i = 2$

$$(3.7) \quad C_n^{(2)} = C_{n-1}^{(2)} \frac{k_1}{(n\nu-a)n\nu}.$$

W oparciu o wzory rekurencyjne (3.6) i (3.7) przyjmując $C_0^{(i)} \equiv 1$ możemy współczynniki $C_n^{(i)}$ wyrazić w postaci następujących wzorów:

$$(3.8) \quad C_n^{(1)} = \left(\frac{k_1}{\nu^2}\right)^n \frac{\Gamma[(a/\nu)+1]}{n! \Gamma[(a/\nu)+n+1]},$$

$$C_n^{(2)} = \left(\frac{k_1}{\nu^2}\right)^n \frac{\Gamma[1-(a/\nu)]}{n! \Gamma[n+1-(a/\nu)]},$$

gdzie wprowadzono funkcję

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną}$$

oraz

$$\Gamma(\lambda+n) = \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+n-1) \Gamma(\lambda) \quad \text{dla } \lambda \neq n.$$

Rozwiązanie równania (3.2) ma postać

$$(3.9) \quad u(\varrho) = A \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \varrho^{n\nu} + B \varrho^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \varrho^{n\nu},$$

przy czym współczynniki $C_n^{(i)}$ wyznaczamy ze wzorów rekurencyjnych (3.6) i (3.7) lub ze wzoru (3.8).

Jeżeli $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \alpha = n$ jest liczbą całkowitą, to rozwiązanie ma charakter logarytmiczny, mianowicie

$$(3.10) \quad u(\varrho) = \varrho^{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \varrho^{n\nu} + C \varrho^{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \varrho^{n\nu} \ln \varrho + \varrho^{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \varrho^{n\nu}.$$

Na brzegu wewnętrznym $r = a$, tj. $\varrho = \varrho_1 = a/b$

$$(3.11) \quad \hat{p}^r = -p_a = p^{rr}(a)$$

oraz na brzegu zewnętrznym $r = b$, tj. $\varrho = 1$,

$$(3.12) \quad \hat{p}^r = p_b = p^{rr}(1).$$

Ponieważ związek (0.13)₁ ze względu na $A^{rr\varphi\varphi} = 0$ uprości się,

$$(3.13) \quad p^{rr} = A^{rrrr} w_{r,r} = A^1/b \varrho^\alpha u_\varrho,$$

przeto po podstawieniu do (3.13) rozwiązania (3.9) i wykonaniu różniczkowania dla $\varrho = \varrho_1$ otrzymamy

$$(3.14) \quad p^{rr}(\varrho_1) = \frac{A^1}{a} \nu \varrho_1^\alpha [AS_a^1 + BS_a^2],$$

a dla $\varrho = 1$

$$(3.15) \quad p^{rr}(1) = \frac{A^1}{b} \nu [AS_b^1 + BS_b^2].$$

We wzorach tych wprowadzono następujące oznaczenia:

$$S_a^1 = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^{(1)} \varrho^{n\nu}, \quad S_a^2 = \sum_{n=0}^{\infty} [n - (\alpha/\nu)] C_n^{(2)} \varrho_1^{n\nu - \alpha},$$

$$S_b^1 = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^{(1)}, \quad S_b^2 = \sum_{n=0}^{\infty} [n - (\alpha/\nu)] C_n^{(2)}.$$

Z warunków brzegowych (3.11) i (3.12) wynika poniższy układ równań dla stałych A i B :

$$(3.16) \quad \frac{A^1}{a} \nu \varrho_1^\alpha [AS_a^1 + BS_a^2] = -p_a,$$

$$\frac{A^1}{b} \nu [AS_b^1 + BS_b^2] = p_b.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$(3.17) \quad A = \frac{1}{A^1 \nu M} [p_b b S_a^2 + p_a a \varrho_1^{-\alpha} S_b^2],$$

$$B = -\frac{1}{A^1 \nu M} \left[p_b b S_a^1 + p_a a \varrho_1^{-\alpha} \frac{M + S_a^2 S_b^2}{S_a^2} \right],$$

gdzie $M = S_b^1 S_a^2 - S_a^1 S_b^2$.

Na podstawie (0.13) wyznaczmy składowe tensora napięcia siłowego. Zgodnie z postacią funkcji $u(\varrho)$ oraz budową afinora sztywności sprężystej otrzymamy

$$(3.18) \quad p^{rr}(\varrho) = A^{rrrr} w_{r,r} = \frac{A^1}{b} \varrho^\alpha u_{,\varrho} = \frac{A^1 \nu}{b} \varrho^\alpha \left[A \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^{(1)} \varrho^{n\nu-1} + \right.$$

$$\left. + B \sum_{n=0}^{\infty} [n - (a/\nu)] C_n^{(2)} \varrho^{n\nu-1-\alpha} \right],$$

$$p^{\varphi\varphi}(\varrho) = A^{\varphi\varphi\varphi\varphi} r w_r = \frac{A^2}{b^3} \varrho^{\beta-3} u =$$

$$= \frac{A^2}{b^3} \varrho^{\beta-3} \left[A \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \varrho^{n\nu} + B \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \varrho^{n\nu-\alpha} \right],$$

$$p^{r\varphi} = p^{\varphi r} = 0,$$

przy czym stałe A i B określone są związkami (3.17).

Dla siatki prętowej, w której $a = 0$, $B \equiv 0$, a funkcja przemieszczeń $u(\varrho)$ upraszcza się:

$$(3.19) \quad u(\varrho) = A \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \varrho^{n\nu}$$

i można ją przedstawić za pomocą zmodyfikowanej funkcji Bessela.

Wzór (3.15) dla $\varrho = 1$ sprowadza się do wzoru

$$(3.20) \quad p^{rr}(1) = A \frac{A^1}{b} \nu S_b^1.$$

Na podstawie jedynego w tym przypadku warunku brzegowego $p^{rr}(1) = p_b$ wyznaczamy wartość stałej A :

$$(3.21) \quad A = p_b \frac{b}{A^1 \nu S_b^1}.$$

Składowe tensora stanu napięcia wyznaczamy analogicznie jak poprzednio. Przyjmują one wartości

$$(3.22) \quad p^{rr}(\varrho) = \frac{p_b}{\nu S_b^1} \varrho^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^{(1)} \varrho^{n\nu},$$

$$p^{\varphi\varphi}(\varrho) = p_b \frac{k_1}{b^2 \nu S_b^1} \varrho^{\beta-3} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \varrho^{n\nu},$$

$$p^{r\varphi} = p^{\varphi r} = 0.$$

W szczególnym przypadku gdy $\alpha = \beta$ ($\nu = 0$) (tj. gdy $R^I = A^1 \varrho^\alpha$, $\Pi R^I = A^2 \varrho^\alpha$) równanie różniczkowe (3.2) przyjmie postać

$$(3.23) \quad u_{,\varrho\varrho} + \frac{1+\alpha}{\varrho} u_{,\varrho} - \frac{k_1}{\varrho^2} u = 0.$$

Możliwe jest przedstawienie tego równania w formie

$$(3.24) \quad \varrho^{-(1+\gamma+\mu)} \frac{d}{d\varrho} \left[\varrho^{1+2\gamma} \frac{d}{d\varrho} (\varrho^{\mu-\gamma} u) \right] = 0,$$

przy czym $\mu = \alpha/2$, $\gamma = \sqrt{\mu^2 + k_1}$.

Z (3.24) natychmiast otrzymujemy jako rozwiązanie funkcję

$$(3.25) \quad u(\varrho) = A\varrho^{-(\gamma+\mu)} + B\varrho^{\gamma-\mu}.$$

Stałe A i B wyznaczmy podobnie jak poprzednio z warunków brzegowych $p^{rr}(\varrho_1) = -p_a$, $p^{rr}(1) = p_b$:

$$(3.26) \quad A = -\frac{b}{A^1(\gamma+\mu)(A-\varrho_1^{2\gamma})} (p_b + p_a \varrho_1^{\gamma-\mu+1}),$$

$$B = \frac{b}{A^1(\gamma-\mu)(A-\varrho_1^{2\gamma})} (p_b + p_a \varrho_1^{\gamma-\mu+1}).$$

Składowe tensora naprężenia posiadają teraz postać

$$(3.27) \quad p^{rr}(\varrho) = \frac{A^1}{b} [-A(\gamma+\mu)\varrho^{-(\gamma-\mu+1)} + B(\gamma-\mu)\varrho^{r+\mu-1}],$$

$$p^{\varphi\varphi}(\varrho) = \frac{A^2}{b^3} (A\varrho^{-\gamma+\mu+3} + B\varrho^{\gamma+\mu-3}),$$

$$p^{r\varphi} = p^{\varphi r} = 0,$$

przy czym A i B określone są przez (3.26).

W przypadku siatki, w której $a = 0$, zachodzi $A \equiv 0$, a ze wzoru (3.25) otrzymamy

$$(3.28) \quad u(\varrho) = B\varrho^{\gamma-\mu}.$$

Stałą B wyznaczamy z jednego warunku brzegowego $p^{rr}(1) = p_b$:

$$(3.29) \quad B = p_b \frac{b}{A^1(\gamma-\mu)}.$$

Składowe tensora napięcia wynoszą

$$(3.30) \quad p^{rr}(\varrho) = p_b \varrho^{\gamma+\mu-1},$$

$$p^{\varphi\varphi}(\varrho) = p_b \frac{k_1}{b^2(\gamma-\mu)} \varrho^{\gamma+\mu-3},$$

$$p^{r\varphi} = p^{\varphi r} = 0.$$

Przypadek stałych sztywności ($R^I = \text{const}$ oraz $\Pi R^I = \text{const}$) otrzymamy z (3.23)–(3.30) przyjmując $\alpha = \beta = 0$; stąd $\mu = 0$, $\gamma = \sqrt{k_1}$.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Theory of Fibrous Media* (I) and (II), Arch. Mech. Stos., 5 i 6, 17 (1965).
2. Н. М. Матвеев, *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва 1963.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА,
КАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКИХ СЕТОК С СЕРЕДИННОЙ СИММЕТРИЕЙ

В работе представлены некоторые решения для стержневых сеток с серединной симметрией (в особом случае — полярной сетки). Обсуждения проводятся в полярной системе координат.

Для случая осесимметрической нагрузки, единственной неизвестной геометрической величиной является перемещение в радиальном направлении w_r . Доказывается, что для осесимметрической нагрузки не существуют моментные напряжения $m^{\alpha\beta} \equiv 0$, не только для полярной сетки, но также для рассматриваемых сеток с серединной симметрией.

Для ряда типов сеток определяются составляющие аффинора упругой жесткости A , а затем обратным методом, принимая априори форму функции перемещения w_r , получаются условия, которым должна удовлетворять структура сетки.

Решения для обсуждаемых типов полярных сеток получаются в виде степенных рядов.

Summary

THE CIRCULARLY SYMMETRIC PROBLEM OF PLANE SYMMETRIC LATTICES

The present paper gives some solutions for centrally symmetric bar lattices (a polar lattice, in particular). The considerations are done in polar coordinates.

In the case of an axially symmetric load the only unknown geometrical quantity is the radial displacement w_r . It is shown that for an axially symmetric load there are no moment stresses $m^{\alpha\beta} \equiv 0$, not only for polar lattices but also for centrally symmetric lattices under consideration. The components of the affine tensor of elastic rigidity A are calculated for a number of lattice-types. The inverse method, by imposing the form of the displacement function w_r , is used to obtain the conditions to be satisfied by the lattice structure.

The solutions for the lattice types under consideration are obtained in the form of power series

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 sierpnia 1966 r.