

STATECZNOŚĆ PRĘTÓW O SKOKOWO ZMIENNYM PRZEKROJU ŚCISKANYCH SIŁĄ ŚLEDZĄCĄ

ANDRZEJ KOWALSKI (MIELEC)

1. Uwagi wstępne

Problem stateczności pręta obciążonego siłą śledzącą był już wielokrotnie rozważany w literaturze światowej, począwszy od prac W. J. REUTA i B. L. NIKOLAJ, przy czym ten drugi uzasadnił konieczność wprowadzenia kryterium kinetycznego. Ostatnie lata przyniosły szereg opracowań dotyczących stateczności elementów znajdujących się w strumieniu płynu, gdzie opór czołowy pręta traktowany był jako siła śledząca.

Bibliografia do tych zagadnień obejmuje liczne prace, w większości radzieckie i niemieckie, wśród których na specjalne wyróżnienie zasługuje monografia W. W. BOLOTINA [1], natomiast w kraju tematowi temu poświęcili szereg artykułów Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI [2-5]; w ich też pracach można znaleźć szczegółowe omówienie literatury światowej dotyczącej wymienionej problematyki.

Dotychczas wszystkie opracowania odnosiły się do prętów o stałej sztywności (przekroju), jedynie praca A. GAJEWSKIEGO [6] porusza zagadnienie prętów niepryzmatycznych. W niniejszym opracowaniu zostanie zanalizowana stateczność prętów o skokowo zmiennym przekroju przy obciążeniu śledzącą siłą ściskającą.

Wyznaczenie sił krytycznych przeprowadzimy za pomocą przybliżonej metody energetycznej, bowiem metoda ścisła natrafia na trudności już przy uwzględnieniu warunków brzegowych (osiem równań o ośmiu niewiadomych, które należy rozwiązać w postaci ogólnej). Będziemy więc badali stateczność drgań pręta jako układu o skończonej liczbie stopni swobody.

2. Wyznaczenie równań osi drgającego pręta

Korzystamy z równań Lagrange'a drugiego rodzaju

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i,$$

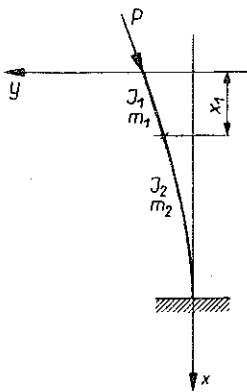
gdzie

$$W = E_k - L_p + A_p$$

jest potencjałem kinematycznym, E_k energią kinetyczną pręta, L_p energią potencjalną odkształcenia układu, A_p pracą sił posiadających potencjał oraz gdzie Q_i są siłami uogólnionymi nie posiadającymi potencjału.

Dla rozwiązania równań przyjmujemy postać linii odkształconego pręta, która składać się będzie z dwu odcinków spełniających osiem warunków (rys. 1):

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y_1''(0) &= 0, & y_2(1) &= 0, \\ y_1'''(0) &= 0, & y_2'(1) &= 0, \\ \varphi y_1''(x_1) &= y_2''(x_1), & y_1(x_1) &= y_2(x_1), \\ \varphi y_1'''(x_1) &= y_2'''(x_1), & y_1'(x_1) &= y_2'(x_1), \end{aligned}$$



Rys. 1

gdzie φ oznacza bezwymiarowy parametr, $\varphi = J_1/J_2$, $E = \text{const}$ oraz $x = X/l$, $y = Y/l$ oznaczają zmienne bezwymiarowe; l jest długością pręta, a x_1 bezwymiarową współrzędną graniczną (rys. 1).

Zgodnie z wynikami analizy przeprowadzonej w pracy [2] przyjmujemy układ linii ugięcia w postaci wielomianów typu

$$(2.3) \quad y = Ax^n + Bx + C,$$

mianowicie dla górnej części pręta wielomian

$$(2.4) \quad y_1 = A_1 x^n + B_1 x + C_1,$$

a dla dolnej części pręta wielomian

$$(2.5) \quad y_2 = A_2 x^n + B_2 x + C_2.$$

Wykorzystując warunki (2.2) wyrazimy wszystkie stałe przez A_2 :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\varphi} A_2, & B_1 &= -n A_2 \left[1 - x_1^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], \\ C_1 &= (n-1) A_2 \left[1 - x_1^n \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], & A_2, & B_2 = -n A_2, \\ C_2 &= (n-1) A_2. \end{aligned}$$

Zgodnie ze wspomnianą analizą przeprowadzoną w artykule [2] przyjmujemy układ dwuparametrowy, przy czym spełnienie warunków brzegowych możliwe jest dla warunku $n \geq 4$.

Tak więc dla $n = 4$, będziemy mieli

$$(2.7) \quad y_1 = A_1 x^4 + B_1 x + C_1, \quad y_2 = A_2 x^4 + B_2 x + C_2,$$

a podstawiając do (2.6) otrzymamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\varphi} A_2, & B_1 &= -4 A_2 \left[1 - x_1^3 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], \\ C_1 &= 3 A_2 \left[1 - x_1^4 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], & B_2 &= -4 A_2, & C_2 &= 3 A_2 \end{aligned}$$

oraz dla $n = 5$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{A}_1 x^5 + \bar{B}_1 x + \bar{C}_1, & \bar{y}_2 &= \bar{A}_2 x^5 + \bar{B}_2 x + \bar{C}_2, \\ \bar{A}_1 &= \frac{1}{\varphi} \bar{A}_2, & \bar{B}_1 &= -5\bar{A}_2 \left[1 - x_1^4 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], \\ \bar{C}_1 &= 4\bar{A}_2 \left[1 - x_1^5 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], & \bar{B}_2 &= -5\bar{A}_2, & \bar{C}_2 &= 4\bar{A}_2. \end{aligned}$$

W rezultacie ugięcia pręta w trakcie drgań $\bar{y}(x, t)$ określimy następującymi wzorami:

$$(2.10) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_1 \quad \bar{y}_1 = q_1(t) y_1 + q_2(t) \bar{y}_1;$$

$$(2.11) \quad \text{dla } x_1 \leq x \leq 1 \quad \bar{y}_2 = q_1(t) y_2 + q_2(t) \bar{y}_2.$$

3. Dane dla równań Lagrange'a

Obliczając energię kinetyczną pręta korzystamy ze znanego wzoru

$$(3.1) \quad \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_0^l m (\dot{Y})^2 dX = \frac{1}{2} l^3 \left[m_1 \int_0^{x_1} (\dot{\bar{y}}_1)^2 dx + m_2 \int_{x_1}^1 (\dot{\bar{y}}_2)^2 dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} l^3 \left[m_1 \int_0^{x_1} (\dot{q}_1^2 y_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 y_1 \bar{y}_1 + \dot{q}_2^2 \bar{y}_1^2) dx + \right. \\ &\quad \left. + m_2 \int_{x_1}^1 (\dot{q}_1^2 y_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 y_2 \bar{y}_2 + \dot{q}_2^2 \bar{y}_2^2) dx \right], \\ E_k &= \frac{1}{2} m_2 l^3 (\bar{D} \dot{q}_1^2 + 2\bar{E} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \bar{F} \dot{q}_2^2), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{D} &= \mu \int_0^{x_1} y_1^2 dx + \int_{x_1}^1 y_2^2 dx = \mu D_\mu + (\bar{D}_1 - D_\xi), \\ \bar{E} &= \mu \int_0^{x_1} y_1 \bar{y}_1 dx + \int_{x_1}^1 y_2 \bar{y}_2 dx = \mu E_\mu + (\bar{E}_1 - E_\xi), \\ \bar{F} &= \mu \int_0^{x_1} \bar{y}_1^2 dx + \int_{x_1}^1 \bar{y}_2^2 dx = \mu F_\mu + (\bar{F}_1 - F_\xi), \end{aligned}$$

przy czym przez μ oznaczono bezwymiarowy parametr $\mu = m_1/m_2 = F_1/F_2$, a ta ostatnia równość wynika z założenia, że pręt jest jednorodny, bowiem stosunek mas jednostkowych m jest równy wprost stosunkowi pól powierzchni przekrojów F .

Wskaźnikiem μ oznaczono składniki zależne od parametru μ , natomiast wskaźnikami 1 i ξ oznaczono wartości odpowiedniej funkcji w punktach 1 i x_1 .

Obliczanie poszczególnych całek daje następujące rezultaty:

$$D_\mu = \int_0^{x_1} (A_1 x^4 + B_1 x + C_1)^2 dx = \frac{A_1^2}{9} x_1^9 + \frac{A_1 B_1}{3} x_1^6 + \frac{2}{5} A_1 C_1 x_1^5 + \\ + \frac{B_1^2}{3} x_1^3 + B_1 C_1 x_1^2 + C_1^2 x_1,$$

$$\bar{D}_1 - D_\xi = \int_{x_1}^1 (A_2 x^4 + B_2 x + C_2)^2 dx,$$

$$\bar{D}_1 = \frac{A_2^2}{9} + \frac{A_2 B_2}{3} + \frac{2}{5} A_2 C_2 + \frac{B_2^2}{3} + B_2 C_2 + C_2^2,$$

$$D_\xi = \frac{A_2^2}{9} x_1^9 + \frac{A_2 B_2}{3} x_1^6 + \frac{2}{5} A_2 C_2 x_1^5 + \frac{B_2^2}{3} x_1^3 + B_2 C_2 x_1^2 + C_2^2 x_1,$$

$$E_\mu = \int_0^{x_1} (A_1 x^4 + B_1 x + C_1) (\bar{A}_1 x^5 + \bar{B}_1 x + \bar{C}_1) dx =$$

$$= \frac{A_1 \bar{A}_1}{10} x_1^{10} + \frac{\bar{A}_1 B_1}{7} x_1^7 + \frac{A_1 \bar{B}_1 + \bar{A}_1 C_1}{6} x_1^6 + \frac{A_1 \bar{C}_1}{5} x_1^5 + \\ + \frac{B_1 \bar{B}_1}{3} x_1^3 + \frac{B_1 \bar{C}_1 + \bar{B}_1 C_1}{2} x_1^2 + C_1 \bar{C}_1 x_1,$$

$$(3.3) \quad \bar{E}_1 - E_\xi = \int_{x_1}^1 (A_2 x^4 + B_2 x + C_2) (\bar{A}_2 x^5 + \bar{B}_2 x + \bar{C}_2) dx,$$

$$\bar{E}_1 = \frac{A_2 \bar{A}_2}{10} + \frac{\bar{A}_2 B_2}{7} + \frac{A_2 \bar{B}_2 + \bar{A}_2 C_2}{6} + \frac{A_2 \bar{C}_2}{5} + \frac{B_2 \bar{B}_2}{3} + \\ + \frac{B_2 \bar{C}_2 + \bar{B}_2 C_2}{2} + C_2 \bar{C}_2,$$

$$\bar{E}_\xi = \frac{A_2 \bar{A}_2}{10} x_1^{10} + \frac{\bar{A}_2 B_2}{7} x_1^7 + \frac{A_2 \bar{B}_2 + \bar{A}_2 C_2}{6} x_1^6 + \frac{A_2 \bar{C}_2}{5} x_1^5 + \\ + \frac{B_2 \bar{B}_2}{3} x_1^3 + \frac{B_2 \bar{C}_2 + \bar{B}_2 C_2}{2} x_1^2 + C_2 \bar{C}_2 x_1,$$

$$\bar{F}_\mu = \int_0^{x_1} (\bar{A}_1 x^5 + \bar{B}_1 x + \bar{C}_1)^2 dx =$$

$$= \frac{\bar{A}_1^2}{11} x_1^{11} + \frac{2\bar{A}_1 \bar{B}_1}{7} x_1^7 + \frac{\bar{A}_1 \bar{C}_1}{3} x_1^3 + \bar{B}_1 \bar{C}_1 x_1^2 + \bar{C}_1^2 x_1,$$

$$\bar{F}_1 - F_\xi = \int_{x_1}^1 (\bar{A}_2 x^5 + \bar{B}_2 x + \bar{C}_2)^2 dx,$$

$$\bar{F}_1 = \frac{\bar{A}_2^2}{11} + \frac{2\bar{A}_2\bar{B}_2}{7} + \frac{\bar{A}_2\bar{C}_2}{3} + \bar{B}_2\bar{C}_2 + \bar{C}_2^2,$$

$$F_\xi = \frac{\bar{A}_2^2}{11} x_1^{11} + \frac{2\bar{A}_2\bar{B}_2}{7} x_1^7 + \frac{\bar{A}_2\bar{C}_2}{3} x_1^3 + \bar{B}_2\bar{C}_2 x_1^2 + \bar{C}_2^2 x_1.$$

Dla obliczenia energii potencjalnej odkształconego pręta stosujemy wzór

$$(3.4) \quad L_p = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(Y'')^2 dX = \frac{E}{2l} \left[J_1 \int_0^{x_1} (\bar{y}_1'')^2 dx + J_2 \int_{x_1}^1 (\bar{y}_2'')^2 dx \right].$$

Podstawiając

$$(3.5) \quad \bar{y}_1'' = 12A_1 x^2 q_1 + 20\bar{A}_1 x^3 q_2, \quad \bar{y}_2'' = 12A_2 x^2 q_1 + 20\bar{A}_2 x^3 q_2$$

otrzymujemy

$$(3.6) \quad L_p = \frac{EJ_2}{2l} (Gq_1^2 + Hq_1q_2 + Kq_2^2),$$

gdzie

$$G = \frac{144}{5} [\varphi A_1^2 x_1^5 + A_2^2 (1 - x_1^5)],$$

$$(3.7) \quad H = 80 [\varphi A_1 \bar{A}_1 x_1^6 + A_2 \bar{A}_2 (1 - x_1^6)],$$

$$K = \frac{400}{7} [\varphi \bar{A}_1^2 x_1^7 + \bar{A}_2^2 (1 - x_1^7)].$$

Praca pionowej składowej siły obciążającej wynosi

$$(3.8) \quad A_p = \frac{1}{2} P \int_0^l (Y')^2 dX = \frac{Pl}{2} \left[\int_0^{x_1} (\bar{y}_1')^2 dx + \int_{x_1}^1 (\bar{y}_2')^2 dx \right].$$

Podstawiając

$$(3.9) \quad \bar{y}_1' = (4A_1 x^3 + B_1) q_1 + (5\bar{A}_1 x^4 + \bar{B}_1) q_2,$$

$$\bar{y}_2' = (4A_2 x^3 + B_2) q_1 + (5\bar{A}_2 x^4 + \bar{B}_2) q_2,$$

otrzymujemy

$$(3.10) \quad A_p = \frac{Pl}{2} (Lq_1^2 + Mq_1q_2 + Nq_2^2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{x_1} (16A_1^2 x^6 + 8A_1 B_1 x^3 + B_1^2) dx + \int_{x_1}^1 (16A_2^2 x^6 + 8A_2 B_2 x^3 + B_2^2) dx = \\ &= \frac{16}{7} [(A_1^2 - A_2^2) x_1^7 + A_2^2] + 2[(A_1 B_1 - A_2 B_2) x_1^4 + A_2 B_2] + \\ &\quad + [(B_1^2 - B_2^2) x_1 + B_2^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad M &= 2 \left[\int_0^{x_1} (20A_1 \bar{A}_1 x^7 + 5\bar{A}_1 B_1 x^4 + 4A_1 \bar{B}_1 x^3 + B_1 \bar{B}_1) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{x_1}^1 (20A_2 \bar{A}_2 x^7 + 5\bar{A}_2 B_2 x^4 + 4A_2 \bar{B}_2 x^3 + B_2 \bar{B}_2) dx \right] = \\
 &= 5 [(A_1 \bar{A}_1 - A_2 \bar{A}_2) x_1^8 + A_2 \bar{A}_2] + 2 [(\bar{A}_1 B_1 - \bar{A}_2 B_2) x_1^5 + \\
 &+ (A_1 \bar{B}_1 - A_2 \bar{B}_2) x_1^4 + \bar{A}_2 B_2 + A_2 \bar{B}_2] + 2 [(B_1 \bar{B}_1 - B_2 \bar{B}_2) x_1 + B_2 \bar{B}_2], \\
 N &= \int_0^{x_1} (25\bar{A}_1 x^8 + 10\bar{A}_1 \bar{B}_1 x^4 + \bar{B}_1^2) dx + \int_{x_1}^1 (25\bar{A}_2^2 x^8 + 10\bar{A}_2 \bar{B}_2 x^4 + \bar{B}_2^2) dx = \\
 &= \frac{25}{9} [(\bar{A}_1^2 - \bar{A}_2^2) x_1^9 + \bar{A}_2^2] + 2 [\bar{A}_1 \bar{B}_1 - \bar{A}_2 \bar{B}_2] x_1^5 + \bar{A}_2 \bar{B}_2 + \\
 &\quad + [(\bar{B}_1^2 - \bar{B}_2^2) x_1 + \bar{B}_2^2].
 \end{aligned}$$

Praca składowej poziomej siły obciążeniowej ma wartość

$$(3.12) \quad d(A_{z0}) = Pl \bar{y}'_1(0, t) \left(\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial q_i} \right) dq_i;$$

stąd

$$(3.13) \quad Q_1 = Pl \bar{y}'_1(0, t) \left(\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial q_1} \right)_0, \quad Q_2 = Pl \bar{y}'_1(0, t) \left(\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial q_2} \right)_0.$$

Ponieważ

$$(3.14) \quad \bar{y}_1 = y_1 q_1 + \bar{y}_1 q_2, \quad \bar{y}'_1 = (4A_1 x^3 + B_1) q_1 + (5\bar{A}_1 x^4 + \bar{B}_1) q_2$$

oraz

$$(3.15) \quad \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial q_1} = y_1, \quad \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial q_2} = \bar{y}_1,$$

$$\bar{y}'_1(0, t) = B_1 q_1 + \bar{B}_1 q_2, \quad y_1(0) = C_1, \quad \bar{y}_1(0) = \bar{C}_1,$$

więc ostatecznie

$$(3.16) \quad Q_1 = Pl [C_1(B_1 q_1 + \bar{B}_1 q_2)], \quad Q_2 = Pl [\bar{C}_1(B_1 q_1 + \bar{B}_1 q_2)].$$

4. Rozwiązanie równań

Wprowadzając otrzymane dane do równań Lagrange'a drugiego rodzaju otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad m_2 l^3 \bar{D} \ddot{q}_1 + m_2 l^3 \bar{E} \ddot{q}_2 + S_1 q_1 + T_1 q_2 &= 0, \\
 m_2 l^3 \bar{E} \ddot{q}_1 + m_2 l^3 \bar{F} \ddot{q}_2 + S_2 q_1 + T_2 q_2 &= 0,
 \end{aligned}$$

gdzie w celu uproszczenia zapisu i ostatecznych przeliczeń wprowadzono podstawienia

$$(4.2) \quad S_1 = 2G - \alpha, \quad T_1 = H - \beta, \quad S_2 = H - \gamma, \quad T_2 = 2K - \delta$$

oraz

$$(4.3) \quad \alpha = L + B_1 C_1, \quad \beta = \frac{1}{2} M + \bar{B}_1 C_1, \\ \gamma = \frac{1}{2} M + B_1 \bar{C}_1, \quad \delta = N + \bar{B}_1 \bar{C}_1.$$

Metodą eliminowania zmiennych sprowadzamy dany układ do jednego równania różniczkowego czwartego rzędu, opisującego ruch drgający pręta, a następnie podstawiając $q = C_0 e^{kt}$, otrzymujemy równanie charakterystyczne.

Analiza parametrów równania charakterystycznego prowadzi do sformułowania kryterium kinetycznego w postaci

$$(4.4) \quad \bar{X}^2 - 4\bar{Y}\bar{Z} = 0,$$

gdzie

$$(4.5) \quad \bar{X} = (T_1 + S_2) \bar{E} - \bar{D}T_2 - \bar{F}S_1,$$

$$(4.6) \quad \bar{Y} = T_1 S_2 - S_1 T_2,$$

$$(4.7) \quad \bar{Z} = \bar{E}^2 - \bar{D}\bar{F}.$$

Podstawiając do (4.5) wyrażenia (4.2) otrzymujemy

$$(4.8) \quad \bar{X} = 2\bar{X}_1 + P\bar{X}_2,$$

gdzie

$$(4.9) \quad \bar{X}_1 = H\bar{E} - K\bar{D} - G\bar{F}, \quad \bar{X}_2 = (\beta + \gamma) \bar{E} - \delta\bar{D} - \alpha\bar{F};$$

po podstawieniu do (4.6) wyrażeń (4.2) i po przekształceniu (4.4) otrzymujemy równanie określające parametr siły krytycznej w postaci

$$(4.10) \quad A^* \left(\frac{P l^2}{E J_2} \right)^2 - 2B^* \left(\frac{P l^2}{E J_2} \right) + C^* = 0,$$

gdzie

$$(4.11) \quad A^* = \bar{X}_2^2 - 4\bar{Z}(\beta\gamma - \alpha\delta), \\ B^* = \bar{X}_1 \bar{X}_2 - \bar{Z} [H(\beta + \gamma) - 2(G\delta + K\alpha)], \\ C^* = \bar{X}_1^2 - \bar{Z}(H^2 - 4GK).$$

5. Związki między stosunkami mas a stosunkami momentów bezwładności

W najogólniejszym przypadku dla przekrojów (górnego i dolnego) pręta nie muszą istnieć proste związki analityczne pomiędzy stosunkami mas jednostkowych μ a stosunkami momentów bezwładności φ , jednak dla pewnych rodzajów przekrojów związki takie można sformułować.

5.1. Przekroje rurowe cienkościennie o stałej grubości ścianki $\bar{\delta}$. Dla takich przekrojów mamy następujące zależności:

$$\mu = \frac{\varrho \pi D_1 \bar{\delta}}{\varrho \pi D_2 \bar{\delta}} = \frac{D_1}{D_2}, \quad \varphi = \frac{J_1}{J_2} = \frac{8\pi D_1^3 \bar{\delta}}{8\pi D_2^3 \bar{\delta}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3, \quad \mu = \sqrt[3]{\varphi}.$$

5.2. Przekroje podobne. Dla przekrojów podobnych, tzn. takich, których wymiary zmieniają się w jednakowej proporcji, istnieje związek $\mu = \sqrt{\varphi}$; np. dla pełnych przekrojów kołowych

$$\mu = \frac{4\pi \varrho D_1^2}{4\pi \varrho D_2^2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2, \quad \varphi = \frac{J_1}{J_2} = \frac{64\pi D_1^4}{64\pi D_2^4} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4, \quad \mu = \sqrt{\varphi},$$

a dla przekrojów prostokątnych

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{H_1}{H_2} = \bar{k}, \quad \mu = \frac{b_1 H_1 \varrho}{b_2 H_2 \varrho} = \bar{k}^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{b_1 H_1^3}{b_2 H_2^3} = \bar{k}^4, \quad \mu_1 = \sqrt{\varphi_1},$$

$$\varphi_2 = \frac{b_1^3 H_1}{b_2^3 H_2} = \bar{k}^4, \quad \mu_2 = \sqrt{\varphi_2}.$$

5.3. Przekroje prostokątne o jednym wspólnym wymiarze. W tym przypadku

$$\mu = \frac{b H_1}{b H_2} = \frac{H_1}{H_2}.$$

Odpowiednie wartości φ są następujące:

przy zginaniu w płaszczyźnie wspólnego wymiaru

$$\varphi = \frac{b H_1^3}{b H_2^3} = \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3, \quad \mu = \sqrt[3]{\varphi}$$

(tj. tak jak w p. 5.1);

przy zginaniu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wspólnego wymiaru

$$\varphi = \frac{b^3 H_1}{b^3 H_2} = \frac{H_1}{H_2}, \quad \mu = \varphi.$$

Tak więc w dalszym ciągu będziemy zakładali

$$\mu = \varphi^\nu,$$

gdzie dla najważniejszych przypadków $\nu = 1, 1/2, 1/3$.

6. Sporządzenie wykresu

Przyjmując $A_2 = 1$ oraz $\bar{A}_2 = 1$ otrzymujemy dla każdego poszczególnego x_1 zespół określonych wyrażeń. Tak np. dla $x_1 = 0,5$ mamy

$$A_1 = \frac{1}{\varphi}, \quad B_1 = -4 \left[1 - 0,125 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], \quad C_1 = 3 \left[1 - 0,0625 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right],$$

$$A_2 = 1, \quad B_2 = -4, \quad C_2 = 3,$$

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{\varphi}, \quad \bar{B}_1 = -5 \left[1 - 0,0625 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right], \quad \bar{C}_1 = 4 \left[1 - 0,03125 \left(1 - \frac{1}{\varphi} \right) \right],$$

$$\bar{A}_2 = 1, \quad \bar{B}_2 = -5, \quad \bar{C}_2 = 4,$$

$$D_\mu = \frac{0,000217}{\varphi^2} + \frac{0,00521B_1 + 0,0125C_1}{\varphi} + 0,04167B_1^2 + 0,25B_1C_1 + 0,5C_1^2,$$

$$\bar{D}_1 = 2,31111, \quad D_\xi = 2,18355, \quad \bar{D}_1 - D_\xi = 0,12756,$$

$$E_\mu = \frac{0,000098}{\varphi^2} + \frac{0,001116B_1 + 0,0026(\bar{B}_1 + C_1) + 0,00625\bar{C}_1}{\varphi} +$$

$$+ 0,04167B_1\bar{B}_1 + 0,125(B_1\bar{C}_1 + \bar{B}_1C_1) + 0,5C_1\bar{C}_1,$$

$$\bar{E}_1 = 3,16190, \quad E_\xi = 2,97376, \quad \bar{E}_1 - E_\xi = 0,18815,$$

$$F_\mu = \frac{0,00004}{\varphi^2} + \frac{0,00223\bar{B}_1 + 0,00521\bar{C}_1}{\varphi} + 0,04167\bar{B}_1^2 + 0,25\bar{B}_1\bar{C}_1 + 0,5\bar{C}_1^2,$$

$$\bar{F}_1 = 4,32900, \quad F_\xi = 4,05138, \quad \bar{F}_1 - F_\xi = 0,27762,$$

$$G = 28,8 \left(\frac{0,03125}{\varphi} + 0,96875 \right),$$

$$H = 80 \left(\frac{0,015625}{\varphi} + 0,98438 \right),$$

$$K = 57,14285 \left(\frac{0,007813}{\varphi} + 0,992187 \right),$$

$$L = \frac{0,01786}{\varphi^2} + \frac{0,125B_1}{\varphi} + 0,5B_1^2 + 2,76786,$$

$$M = \frac{0,01953}{\varphi^2} + \frac{0,0625B_1 + 0,125\bar{B}_1}{\varphi} + B_1\bar{B}_1 + 7,85547,$$

$$N = \frac{0,00543}{\varphi^2} + \frac{0,0625\bar{B}_1}{\varphi} + 0,5\bar{B}_1^2 + 5,58485.$$

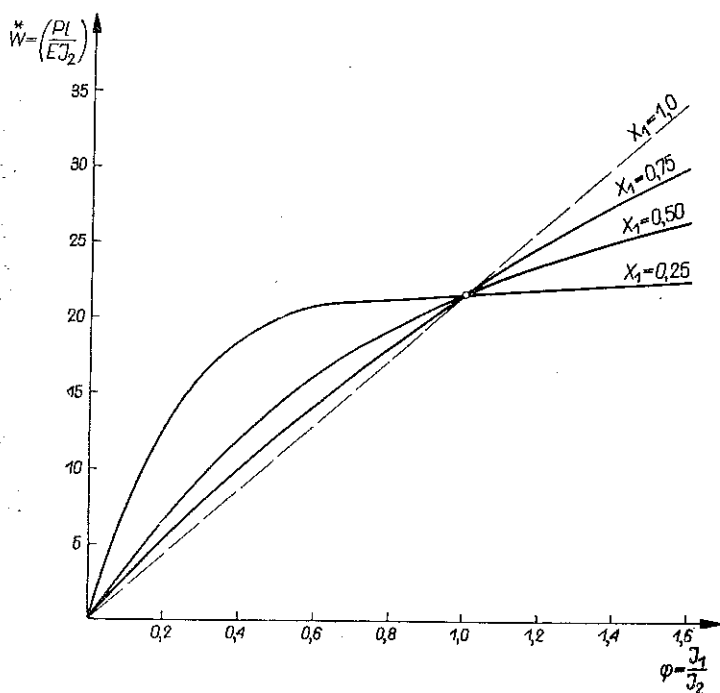
Podstawiając powyższe wartości dla danego φ do równania (4.10) otrzymamy w wyniku wielkość bezwymiarowej siły krytycznej:

$$\left(\frac{Pl^2}{EJ_2}\right) = \overset{*}{W}.$$

W ten sposób sporządzono wykres funkcji

$$\overset{*}{W} = \left(\frac{Pl^2}{EJ_2}\right) = f(\varphi, x_1)$$

podany na rys. 2.



Rys. 2

Okazuje się, że zależność $\mu = f(\varphi)$ przy obliczeniach przeprowadzonych z dokładnością do kilku znaków dziesiętnych ma zupełnie znikomy wpływ na otrzymane wielkości, szczególnie w obszarze $0 < \varphi < 1$ nie zależnie od tego, czy ta funkcja ma postać sześcienną, kwadratową, czy też liniową. Tak więc wykres 2 można uznać za odnoszący się do wszystkich trzech przypadków rozważanych w p. 5.

7. Optymalizacja ciężaru pręta

Jednym z celów stosowania prętów niepryzmatycznych, narażonych na wyboczenie, jest uzyskanie oszczędności na ciężarze i materiale pręta.

Przeprowadzimy optymalizację ciężaru pręta porównując pręt zastępczy o stałym przekroju z prętem jednorodnym złożonym z dwu odcinków o przekrojach

różnych, ale o tym samym charakterze, tzn. np. pręt o przekroju pełnym kołowym będziemy zastępowali prętem złożonym z dwu odcinków, z których każdy ma przekrój pełny kołowy, itp.

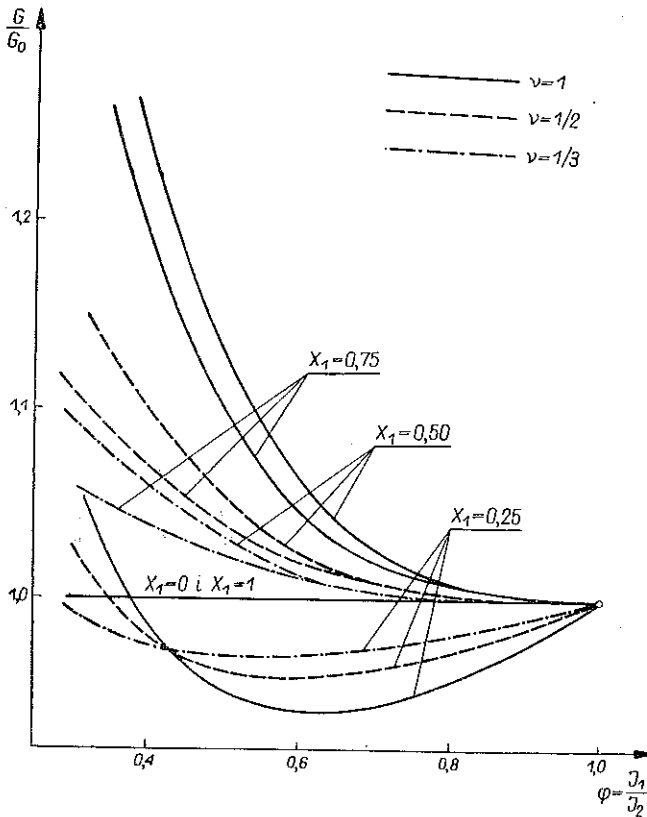
Analizę przeprowadzimy dla wszystkich trzech podstawowych zależności:

$$\mu = \varphi^\nu, \quad \nu = 1, 1/2, 1/3.$$

Ciężar pręta zastępczego o stałym przekroju wynosi

$$(7.1) \quad G_0 = \bar{\gamma} F_0 l,$$

gdzie $\bar{\gamma}$ oznacza ciężar właściwy materiału pręta.



Rys. 3

Ciężar pręta porównywanego o przekroju skokowo zmiennym wynosi

$$(7.2) \quad G = \bar{\gamma} (F_1 l_1 + F_2 l_2) = \bar{\gamma} l F_2 (\mu x_1 + 1 - x_1).$$

Stosunek obu ciężarów jest równy

$$(7.3) \quad \frac{G}{G_0} = \mu_0 (\mu x_1 + 1 - x_1),$$

gdzie $\mu_0 = F_2/F_0$.

Понieważ oba pręty muszą przenosić taką samą siłę, to

$$(7.4) \quad P = \dot{W}^* \frac{EJ_2}{l^2} = \dot{W}_0^* \frac{EJ_0}{l^2}, \quad \frac{J_2}{J_0} = \frac{\dot{W}_0^*}{\dot{W}^*} = \frac{21,65}{\dot{W}^*}$$

(dla konsekwencji przyjmujemy tu nie ścisłą, lecz przybliżoną wartość \dot{W}_0^* wynikającą z metody energetycznej).

Po podstawieniu (7.4)₂ do (7.3) i wykorzystaniu założonego związku między φ a μ otrzymujemy

$$(7.5) \quad \frac{G}{G_0} = \left[\frac{21,65}{\dot{W}^*(\varphi, x_1)} \right]^r (x_1 \varphi^r + 1 - x_1).$$

Korzystając z wykresów (rys. 2) oraz ze związków (5.1), (5.2) i (5.3) sporządzono wykresy optymalizacyjne (rys. 3). Wynika z nich, że oszczędności ciężaru mogą sięgać około 6%, a najkorzystniejsza współrzędna graniczna x_1 wynosi około 0,25.

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории устойчивости*, Физматгиз, Москва 1961.
2. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czasop. Techn., 9, 65, (1959), 1-8.
3. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963), 7-31.
4. Z. KORDAS, *Stateczność sprężyste utwierdzonego pręta w ogólnym przypadku zachowania się obciążenia*, Rozpr. Inżyn., 3, 11 (1963), 435-448.
5. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływającego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inżyn., 1, 13 (1965), 19-41.
6. A. GAJEWSKI, *Stateczność pewnych niepryzmatycznych i niejednorodnych prętów ściskanych siłą śledzącą*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ СКАЧКООБРАЗНО ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, ПОДВЕРГАЕМЫХ СЖАТИЮ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

Рассматривается устойчивость односторонне закрепленного стержня, со скачкообразно изменяющимся сечением (жесткостью) под влиянием следящей силы. Рассуждения проводятся вводя в уравнения Лагранжа двухпараметрную систему линии прогиба; эти уравнения состоят из двух отрезков, связанных и ограниченных восьмью условиями. После решения сформулированного кинетического критерия, в результате, получено параметр критической следящей силы, в зависимости от положения места изменения сечения и отношения моментов инерции. Принятое во внимание в анализе, влияние зависимости между отношениями масс и отношениями моментов инерции обеих частей стержня, на величину параметра критической силы оказалось ничтожно, особенно в области $J_1/J_2 < 1,0$.

Проведенный оптимизационный анализ показал возможность сэкономить ок. 6% веса, при замене стержня постоянного сечения, стержнем со скачкообразным сечением.

S u m m a r y

STABILITY OF A BAR OF SECTIONALLY CONSTANT CROSS SECTION,
COMPRESSED BY A TANGENTIAL FORCE

The stability analysis for the above bar (which is a cantilever bar) is done by introducing in the Lagrange equations a two-parameter family of elastic lines composed of two joined segments, the total number of boundary conditions being eight. After formulating the kinetic criterion, the tangential force is obtained in function of the location of the section jump and the ratio of moments of inertia.

The influence of the ratio of masses and moments of inertia of both parts of the bar on the magnitude of the critical force proves to be insignificant especially for $J_1/J_2 < 1,0$.

An optimization analysis proves the possibility of saving about 6 per cent of the weight if a constant section bar is replaced by a sectionally constant section.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 sierpnia 1966 r.
