

SKOŃCZONE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE UGIĘCIA
PŁYT KOŁOWO-SYMETRYCZNYCH

ZENON WASZCZYSZYN (KRAKÓW)

1. Wstęp

Obliczanie skończonych ugięć płyt cienkich napotyka znaczne trudności. Nawet w zakresie prawa Hooke'a i przy wprowadzeniu uproszczeń wynikających z teorii Kármána otrzymujemy skomplikowany układ nieliniowych równań różniczkowych, który możemy efektywnie rozwiązywać tylko metodami przybliżonymi. Wprowadzenie nieliniowości fizycznej jeszcze bardziej komplikuje zagadnienie. Dalsze komplikacje są związane z analitycznym ujęciem zjawiska odciążenia i wzmocnienia — zjawisk związanych z materiałami sprężysto-plastycznymi.

Wzrastające potrzeby techniki spowodowały w ostatnich czterdziestu latach silny rozwój teorii skończonych ugięć płyt i powłok. Zajęto się przede wszystkim płytami wykonanymi z materiału liniowo-sprężystego; bogatą bibliografią z tego zakresu można znaleźć w monografii A. S. WOLMIRA [16].

Literatura związana ze skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami płyt przedstawia się znacznie skromniej. Z ważniejszych należy wymienić prace P. M. NAGHDIEGO [9], GU GUO-JI i GU QIU-LINA [3], J. R. LEPIKA [5 i 6], P. A. ŁUKASZA [8], Y. OHASHI i S. MURAKAMI [10]. Bardziej szczegółową bibliografią do roku 1963 można znaleźć w pracy przeglądowej J. R. LEPIKA [7].

Wymienione prace opierają się na różnych związkach fizycznych, opartych na teorii odkształceniowej. Otrzymane równania były rozwiązywane w większości przypadków metodami wariacyjnymi. P. M. NAGHDI w pracy [9] podaje algorytm do numerycznego rozwiązywania, natomiast GU GUO-JI i GU QIU-LIN zastosowali w [3] metodę małego parametru. Większość prac zakłada ponadto materiał nieściśliwy. Wpływ ściśliwości materiału, znacznie komplikujący równania, został uwzględniony w pracach [9 i 3].

Wspomniane na wstępie trudności skłoniły badaczy do rozwiązywania poszczególnych zadań. Z tych względów na podkreślenie zasługują prace J. R. LEPIKA [5 i 6] próbujące ująć skończone sprężysto-plastyczne ugięcia płyt w ramy jednolitej, ogólnej teorii.

Obecna praca jest próbą podania ogólnego, numerycznego sposobu obliczania skończonych, sprężysto-plastycznych ugięć płyt kołowo-symetrycznych. Podstawowe równania będą wyprowadzone przy założeniu współrzędnej typu Lagrange'a jako zmiennej niezależnej zarówno w związkach geometrycznych, jak też w równaniach równowagi. Wprowadzenie takiej zmiennej obok zmiennych typu Eulera

pozwole na łatwe uwzględnienie rozciągłości powierzchni środkowej. Związki fizyczne zostały przyjęte w postaci równań wyprowadzonych przez J. R. LEPIKA w [6] na podstawie teorii odkształceniowej Hencky'ego-Iliuszyna. Tak więc stosowana przez nas teoria będzie teorią małych odkształceń przy skończonych ugięciach.

W pracy oprzemy się na następujących założeniach:

- 1) zarówno płyta jak też obciążenie są kołowo-symetryczne;
- 2) materiał płyty jest nieściśliwy, sprężysto-plastyczny z jednokrotnym liniowym wzmocnieniem;
- 3) płyta jest cienka (tzn. że jej grubość jest mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami) i o stałej grubości;
- 4) przyjmuje się hipotezę Kirchhoffa odcinka prostoliniowego, prostopadłego do powierzchni środkowej;
- 5) pominięto wpływ naprężeń stycznych oraz normalnych do powierzchni środkowej na ugięcia i uplastycznienie się płyty;
- 6) rozważać będziemy aktywny proces obciążenia, tzn. że nie wystąpi zewnętrzne bądź też wewnętrzne odciążenie.

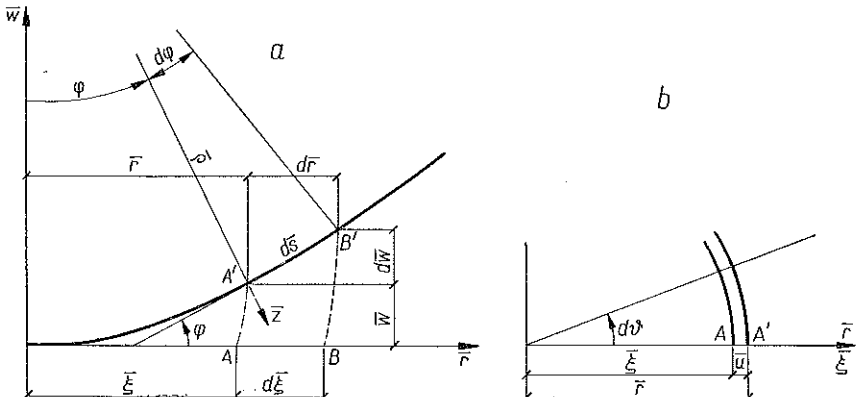
W pracy podamy gotowy schemat postępowania. Algorytm taki, prostszy niż w [9], będzie w postaci nadającej się do obliczeń numerycznych na maszynach cyfrowych.

2. Podstawowe równania

Przyjęcie kołowej symetrii pozwala wprowadzić jedną zmienną niezależną. Jako tę zmienną przyjmiemy cechę identyczności punktu $\bar{\xi}$ (podobnie uczyniliśmy w pracy [14]) odmierzaną od środka, wzdłuż promienia nieodkształconej płyty.

Wszystkie równania będą pisane w postaci bezwymiarowej. Wielkości bezwymiarowe będą oznaczane przez małe litery łacińskie oraz litery greckie. Wielkości fizyczne będą miały nadkreślenia bądź też będą pisane przez duże litery łacińskie.

2.1. Związki geometryczne. Składowe przemieszczenia \bar{u} , \bar{w} dowolnego punktu powierzchni środkowej płyty będziemy odmierzali w układzie \bar{r} , \bar{w} , przyłożonym w środku odkształconej płyty (rys. 1). Będą to współrzędne typu Eulera.



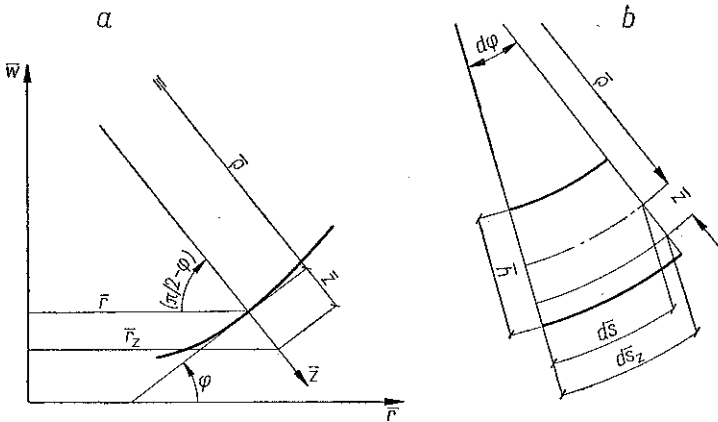
Rys. 1

Natomiast współrzędne $\bar{\xi}$ i \bar{z} będą związane z ustalonym punktem powierzchni środkowej oraz warstwą płyty i ich wartości nie ulegną zmianie w trakcie deformacji płyty. Tak więc będą to współrzędne typu Lagrange'a.

Zajmiemy się najpierw obliczeniem odkształceń promieniowych. Odcinek \overline{AB} o początkowej długości $d\bar{\xi}$ po przyłożeniu obciążenia zajmie położenie $\overline{A'B'}$ i będzie miał długość

$$(2.1) \quad d\bar{s} = \bar{\rho} d\varphi,$$

natomiast dla warstwy płyty w odległości \bar{z} (rys. 2b)



Rys. 2

$$(2.2) \quad d\bar{s}_z = (\bar{\rho} + \bar{z}) d\varphi.$$

Dla obliczenia odkształcenia promieniowego ε_r posłużymy się miarą Cauchy'ego

$$(2.3) \quad \varepsilon_r = \frac{d\bar{s}_z - d\bar{\xi}}{d\bar{\xi}} = (\bar{\rho} + \bar{z}) \frac{d\varphi}{d\bar{\xi}} - 1.$$

W dalszym ciągu wprowadzimy wielkości bezwymiarowe odnoszone do grubości płyty \bar{h} :

$$(2.4) \quad \xi = \frac{\bar{\xi}}{\bar{h}}, \quad s = \frac{\bar{s}}{\bar{h}}, \quad r = \frac{\bar{r}}{\bar{h}} \text{ itd.}$$

Tylko dla odległości \bar{z} przyjęto

$$(2.5) \quad \zeta = \frac{\bar{z}}{\bar{h}/2}$$

tak, aby $-1 \leq \zeta \leq 1$.

Związek (2.3) możemy teraz napisać w postaci bezwymiarowej:

$$(2.6) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \zeta,$$

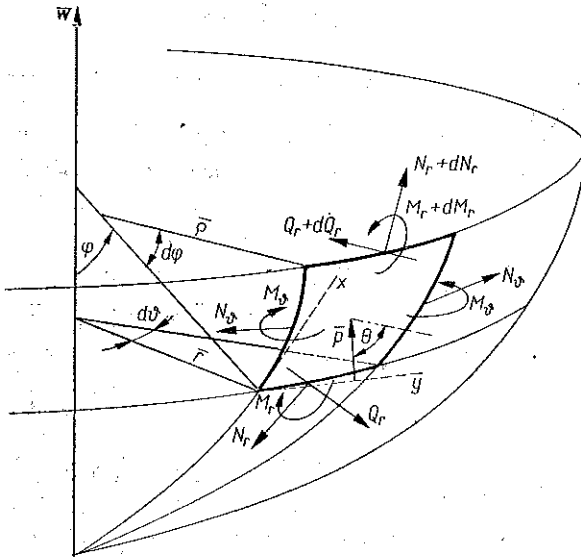
$\cos \varphi \approx 1 - (\varphi^2/2)$, $\xi = r$, $s' = ds/dr = 1$ i otrzymane równania upraszczają się do dobrze znanej następującej (por. np. [16]) postaci:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \varphi &= w' \equiv \frac{dw}{dr}, \\ \varepsilon_1 &\approx u' + \frac{1}{2} w'^2, & \kappa_1 &= \frac{\varphi'}{2} = \frac{1}{2} w'', \\ \varepsilon_2 &= \frac{u}{r}, & \kappa_2 &= \frac{\varphi}{2r} = \frac{w'}{2r}. \end{aligned}$$

W powszechnie używanych równaniach występuje ponadto znak minus przy κ_2 odpowiadający zgodnemu zwrotowi osi z i w na rys. 1a. Będziemy przyjmowali przeciwnie zwroty tych osi i wtedy wszędzie wystąpią dodatnie znaki.

Równania (2.14) są często używane do obliczania dużych ugięć. Jednak będziemy posługiwali się wzorami ścisłymi, podanymi powyżej, unikając w ten sposób błędów wynikających z koniecznych we wzorach (2.14) uproszczeń. Wzory dokładniejsze w postaci podobnej do wyprowadzonych przez nas można znaleźć w pracy P. M. NAGHDIEGO [9], jednak są one błędnie napisane za pomocą tensora krzywizny.

2.2. Równania równowagi. Po odkształceniu płyta przyjmie kształt powłoki obrotowo-symetrycznej. Rozważymy teraz równowagę odkształconego elementu płyty, pokazanego na rys. 3. Jeśli chodzi o obciążenie płyty to przyjmiemy, że jest



Rys. 3

ono o intensywności \bar{p} i działające na odkształcony element pod kątem θ odmierzonym od płaszczyzny równoleżnikowej; jedynym założeniem będzie kołowa symetria obciążenia. Na rysunku 3 narysowano wypadkowe siły wewnętrzne w wymiarze: siła na jednostkę szerokości płyty.

Najpierw rozpatrzmy równowagę sił równoległych do stycznej x . Rzutując wszystkie siły na kierunek x otrzymamy

$$(2.15) \quad (N_r + dN_r)(\bar{r} + d\bar{r}) d\vartheta - N_r \bar{r} d\vartheta - (Q_r + dQ_r)(\bar{r} + d\bar{r}) d\vartheta d\varphi + \\ + \bar{p} \cos(\theta + \varphi) d\bar{s} \left(\bar{r} + \frac{d\bar{r}}{2} \right) d\vartheta - N_\vartheta \cos \varphi d\bar{s} d\vartheta = 0.$$

Po uporządkowaniu i pominięciu wielkości małych wyższego rzędu otrzymamy następujące równanie:

$$(2.16) \quad \bar{r} dN_r + N_r d\bar{r} - N_\vartheta d\bar{r} - \bar{r} Q_r d\varphi + \bar{p} \cos(\theta + \varphi) \bar{r} d\bar{s} = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy posługiwali się wielkościami bezwymiarowymi

$$(2.17) \quad n_r = \frac{N_r}{Eh}, \quad q_r = \frac{Q_r}{Eh}, \quad m_r = \frac{6M_r}{Eh^2}, \quad p = \frac{\bar{p}}{E} \text{ itp.}$$

Równanie (2.16) podzielimy przez $\bar{r} E h d\bar{s}$ i w ten sposób otrzymamy pierwsze równanie równowagi w postaci bezwymiarowej

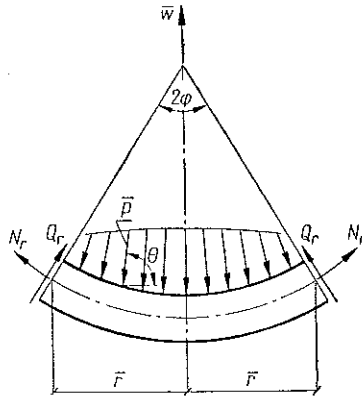
$$(2.18) \quad n_r' + (n_r - n_\vartheta) \cos \varphi \frac{s'}{r} - [q_r \varphi' - p \cos(\theta + \varphi) s'] = 0.$$

Drugie równanie równowagi otrzymamy z warunku równowagi momentów równoległych do osi y (rys. 3). Po działaniach jak przy równaniu (2.15) otrzymamy drugie równanie równowagi momentów w następującej postaci bezwymiarowej:

$$(2.19) \quad m_r' + (m_r - m_\vartheta) \cos \varphi \frac{s'}{r} + 6q_r s' = 0.$$

Trzecie równanie otrzymamy z warunku równowagi sił równoległych do osi \bar{w} i działających na część płyty wyciętą stożkiem o promieniu \bar{r} i kącie wierzchołkowym 2φ (rys. 4). Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(2.20) \quad Q_r 2\pi \bar{r} \cos \varphi + N_r 2\pi \bar{r} \sin \varphi = \\ = \int_0^{\bar{r}} \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin \theta \frac{\bar{r} d\vartheta d\bar{r}}{\cos \tilde{\varphi}}.$$



Rys. 4

W równaniu tym pod całką iterowaną będzie $0 \leq \tilde{r} \leq \bar{r}$, a $0 \leq \tilde{\varphi} \leq \varphi$ w związku z ustaloną górną granicą \bar{r} . Ze względu na kołową symetrię można wykonać całkowanie ze względu na zmienną ϑ . Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(2.21) \quad Q_r \cos \varphi + N_r \sin \varphi = G,$$

w którym G nazwano funkcją obciążenia (ten termin wprowadza A. S. WOLMIR [16]) równą

$$(2.22) \quad G = \frac{1}{r} \int_0^{\bar{r}} \bar{p} \sin \theta \frac{\bar{r} d\bar{r}}{\cos \tilde{\varphi}}.$$

Równanie (2.21) napiszemy w postaci bezwymiarowej

$$(2.23) \quad q_r \cos \varphi + n_r \sin \varphi = g,$$

w której również funkcja obciążenia występuje w postaci bezwymiarowej:

$$(2.24) \quad g \equiv \frac{G}{Eh} = \frac{1}{r} \int_0^s \tilde{r} \sin \theta \tilde{d}s = \frac{1}{r} \int_0^{\xi} \tilde{r} \sin \theta \tilde{d}\xi.$$

Oczywiście, aby obliczyć funkcję g należy wszystkie wielkości występujące pod całką przedstawić w postaci funkcji cechy identyczności punktu ξ .

Podamy teraz wartość funkcji obciążenia dla kilku szczególnych przypadków.

Dla obciążenia ciężarem własnym obciążenie p_0 przypadające na jednostkę powierzchni liczonej przed odkształceniem będzie równe $p_0 = ps'$ (uwzględnimy w ten sposób rozciągliwość powierzchni środkowej), kąt $\theta = \pi/2$. Pod całką w (2.24) zamiast \tilde{r} należy podstawić $\tilde{\xi}$ (obciążenie z koła o promieniu $\tilde{\xi}$ będzie równe obciążeniu na odkształconej powierzchni środkowej o promieniu \tilde{r}) i w ten sposób otrzymamy prostą funkcję obciążenia

$$(2.25) \quad g = \frac{p_0 \xi^2}{2r}.$$

Jeśli obciążenie p_0 będzie stale prostopadłe do powierzchni środkowej, to funkcja obciążenia będzie równa:

$$(2.26) \quad g = \frac{p_0}{r} \int_0^{\xi} \tilde{r} \cos \tilde{\varphi} \tilde{d}\xi.$$

Przy działaniu obciążenia stale równoległego do osi \bar{w} , liniowego o intensywności p_1 i przyłożonego wzdłuż koła o promieniu ξ_1 funkcja obciążenia będzie wynosiła

$$(2.27) \quad g = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } r < r_1; \\ \frac{p_1}{r} \frac{\xi_1}{r_1}, & \text{jeśli } r > r_1. \end{cases}$$

Wzór (2.27) odnosi się do obciążenia nie zmieniającego swego położenia w czasie deformacji płyty; intensywność obciążenia zmienia się wtedy do wartości $p_1 \xi_1 / r_1$. Jeśli w środku płyty działa bezwymiarowa siła skupiona P_0 , to

$$(2.28) \quad g = \frac{P_0}{2\pi r}.$$

W dalszym ciągu obliczymy siłę poprzeczną q_r z równania (2.23) i podstawimy ją do równań (2.18) i (2.19). Otrzymamy w ten sposób dwa równania równowagi w takiej postaci, jaką będziemy się posługiwali przy wykonywaniu obliczeń; otrzymamy mianowicie

$$(2.29) \quad \begin{aligned} n'_r &= (n_\theta - n_r) \cos \varphi \frac{s'}{r} - p \cos(\theta + \varphi) s' - \left(n_r \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{\cos \varphi} \right) \varphi', \\ m'_r &= (m_\theta - m_r) \cos \varphi \frac{s'}{r} + 6 \left(n_r \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{\cos \varphi} \right) s'. \end{aligned}$$

W ten sposób w obliczeniach będziemy posługiwali się tylko czterema wypadkowymi siłami wewnętrznymi, mianowicie: siłami podłużnymi n_r i n_θ oraz momentami gnącymi m_r i m_θ . Siłę poprzeczną będziemy mogli obliczyć z (2.21) na podstawie znajomości obciążenia i promieniowej siły podłużnej n_r .

Otrzymane równania równowagi można otrzymać wprost z klasycznej teorii powłok obrotowo-symetrycznych (por. [13]); przechodzą one w znane równania teorii małych ugięć płyt przez zachowanie tylko pierwszych wyrazów po prawej stronie (2.29) i przyjęcie $\cos \varphi \approx 1$; w równaniu (2.29)₂ pozostanie oprócz tego wyraz $6g$.

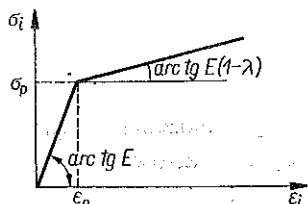
W teorii Kármána, powszechnie stosowanej przy obliczaniu dużych ugięć, odstępujemy od zasady zeszytnienia tylko przy wyprowadzaniu równania (2.23). Otrzymujemy w ten sposób układ równań równowagi (por. np. [16])

$$(2.30) \quad q_r = g - n_r \varphi, \quad n'_r = \frac{1}{r} (n_\theta - n_r), \quad m'_r = \frac{1}{r} (m_\theta - m_r) - 6q_r.$$

W obliczeniach stosuje się je razem ze związkami geometrycznymi (2.14).

2.3. Równania fizyczne. W pracy niniejszej oparto się na teorii deformacyjnej Hencky'ego-Iliuszyna. Uczyniono tak ze względu na dalsze obliczenia, przede wszystkim na konieczność efektywnego całkowania równań. W dalszym ciągu będziemy się posługiwali równaniami podanymi przez J. R. LEPIKA w pracy [6], które są doprowadzone do postaci nadającej się lepiej do praktycznego zastosowania od znanych równań A. A. ILIUSZYŃA [4]. Równania te nieco przekształcimy i napiszemy w postaci bezwymiarowej.

Zajmiemy się płytami wykonanymi z materiału jednorodnego, nieściśliwego, sprężysto-plastycznego z jednokrotnym wzmocnieniem o współczynniku wzmocnienia λ . Charakterystykę materiału pokazano na rys. 5. Sieczny moduł



Rys. 5

$$(2.31) \quad E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = E(1 - \omega),$$

gdzie funkcja $\omega(\varepsilon_i)$ będzie wynosiła

$$(2.32) \quad \omega = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \varepsilon_i \leq \varepsilon_p; \\ \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_i} \right), & \text{jeśli } \varepsilon_i \geq \varepsilon_p. \end{cases}$$

Odkształcenia ε_r i ε_θ w postaci (2.6) i (2.10) podstawiono do wzoru na intensywność ε_i ; otrzymano ten wzór w postaci

$$(2.33) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon + 2\zeta P_{\varepsilon\kappa} + \zeta^2 P_\kappa}$$

napisanej za pomocą form kwadratowych

$$(2.34) \quad \begin{aligned} P_\varepsilon &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2, \\ P_\kappa &= \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2, \\ P_{\varepsilon\kappa} &= \varepsilon_1 \kappa_1 + \varepsilon_2 \kappa_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \kappa_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \kappa_1. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu będziemy posługiwali się nieco inną, wprowadzoną przez J. R. LEPIKA, postacią wzoru (2.33) mianowicie

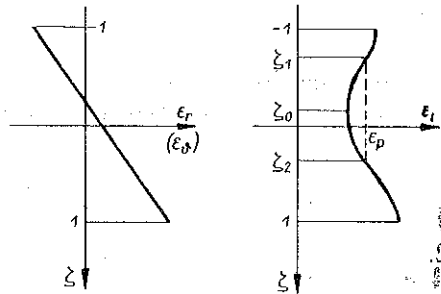
$$(2.35) \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_p}{\zeta_p} \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta_0 \zeta + \zeta_e^2},$$

gdzie występują wielkości bezwymiarowe powstałe z form kwadratowych:

$$(2.36) \quad \zeta_0 = -\frac{P_{\varepsilon\kappa}}{P_\kappa}, \quad \zeta_e = \sqrt{\frac{P_\varepsilon}{P_\kappa}}, \quad \zeta_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{P_\kappa}}.$$

Z tych wielkości ζ_0 odpowiada współrzędnej warstwy płyty, w której występuje minimum ε_i (rys. 6). Za pomocą (2.36) można wyliczyć współrzędne ζ_j ograniczające obszar sprężysty zgodnie z rys. 6:

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_0 - \sqrt{\zeta_p^2 + \zeta_0^2 - \zeta_e^2}, \\ \zeta_2 &= \zeta_0 + \sqrt{\zeta_p^2 + \zeta_0^2 - \zeta_e^2}, \end{aligned}$$



Rys. 6

W przypadku występowania tylko obszaru sprężystego $\zeta_1 = -\zeta_2 = -1$, natomiast przy nierozciągłej powierzchni środkowej (taką powierzchnię, a właściwie płaszczyznę środkową, zakłada się w teorii małych ugięć) mamy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, skąd $\zeta_0 = \zeta_e = 0$ i stąd otrzymujemy $\zeta_1 = -\zeta_2 = -\zeta_p$. Tak więc w ten sposób możemy zinterpretować ζ_p jako długość połowy przedziału sprężystego rozkładu naprężeń przy działaniu tylko momentów zginających.

Korzystając z równań A. A. ILIUSZYNA oraz warunku nieściśliwości można naprężenia w kierunku promieniowym i obwodowym napisać w postaci związków

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{3} E'(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{2}{3} E'(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r). \end{aligned}$$

Siłę podłużną i moment gnący obliczono ze wzorów (1)

$$(2.39) \quad N_r = \frac{\bar{h}}{2} \int_{-1}^1 \sigma_r d\zeta, \quad M_r = \frac{\bar{h}^2}{4} \int_{-1}^1 \sigma_r \zeta d\zeta,$$

(1) Wzory te odnoszą się do dużych promieni krzywizny i odpowiadają teorii powłok cienkich, dla których $h/\rho_{\min} \ll 1$.

oraz odpowiednio dla N_θ i M_θ , a po wprowadzeniu bezwymiarowych oznaczeń (2.17) otrzymamy równania fizyczne w ostatecznej postaci

$$\begin{aligned}
 n_r &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Omega_1 \right) (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{3} \Omega_2 (2\kappa_1 + \kappa_2), \\
 n_\theta &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \Omega_1 \right) (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) - \frac{1}{3} \Omega_2 (2\kappa_2 + \kappa_1), \\
 m_r &= -\Omega_2 (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \left(\frac{2}{3} - \Omega_3 \right) (2\kappa_1 + \kappa_2), \\
 m_\theta &= -\Omega_2 (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + \left(\frac{2}{3} - \Omega_3 \right) (2\kappa_2 + \kappa_1).
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

W równaniach tych występują funkcje Ω_j :

$$\Omega_j = \int_{-1}^1 \omega \zeta^{j-1} d\zeta, \quad j = 1, 2, 3,
 \tag{2.41}$$

wprowadzone przez J. R. LEPIKA w pracy [6] [równania (2.40) w pracach J. R. LEPIKA są napisane w nieco innej postaci]. Będą one wynosiły kolejno (por. [6])

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} \Omega_1 &= 2 + \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_p \Phi, \\
 \frac{1}{\lambda} \Omega_2 &= \frac{1}{2} (\zeta_1^2 - \zeta_2^2) - \zeta_p [f(\zeta_1) - f(\zeta_2) + f(1) - f(-1) + \zeta_0 \Phi], \\
 \frac{1}{\lambda} \Omega_3 &= \frac{1}{3} (2 + \zeta_1^3 - \zeta_2^3) - \frac{\zeta_p}{2} [(\zeta_1 + 3\zeta_0)f(\zeta_1) - (\zeta_2 + 3\zeta_0)f(\zeta_2) + \\
 &\quad + (1 + 3\zeta_0)f(1) + (1 - 3\zeta_0)f(-1) + (3\zeta_0^2 - \zeta_0^2) \Phi],
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

gdzie dla skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 f(\zeta) &= \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta_0\zeta + \zeta_0^2}, \\
 \Phi &= \begin{cases} \ln \frac{[f(1) + 1 - \zeta_0][f(\zeta_1) + \zeta_1 - \zeta_0]}{[f(-1) - 1 - \zeta_0][f(\zeta_2) + \zeta_2 - \zeta_0]} & \text{dla } |\zeta_0| \neq |\zeta_\varepsilon|, \\ \ln \frac{1 - \zeta_0^2}{(\zeta_2 - \zeta_0)(\zeta_0 - \zeta_1)} & \text{dla } |\zeta_0| = |\zeta_\varepsilon|. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Równania (2.40) można częściowo odwrócić. Można mianowicie wyliczyć z nich odkształcenia ε_1 i ε_2 oraz parametry κ_1 i κ_2 ; otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= A_1 (2m_r - m_\theta) + A_2 (2n_r - n_\theta), \\
 \varepsilon_2 &= A_1 (2m_\theta - m_r) + A_2 (2n_\theta - n_r), \\
 \kappa_1 &= 3A_1 (2n_r - n_\theta) + A_3 (2m_r - m_\theta), \\
 \kappa_2 &= 3A_1 (2n_\theta - n_r) + A_3 (2m_\theta - m_r),
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

gdzie dla skrócenia zapisu przyjęto następujące oznaczenia:

$$(2.45) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{\Omega_2}{3 \left[(2 - \Omega_1) \left(\frac{2}{3} - \Omega_3 \right) - \Omega_2^2 \right]}, \\ A_2 &= \frac{2 - 3\Omega_3}{3 \left[(2 - \Omega_1) \left(\frac{2}{3} - \Omega_3 \right) - \Omega_2^2 \right]}, \\ A_3 &= \frac{2 - \Omega_1}{3 \left[(2 - \Omega_1) \left(\frac{2}{3} - \Omega_3 \right) - \Omega_2^2 \right]}. \end{aligned}$$

Odwroćenie takie jest możliwe, jeśli jest spełniony warunek $(2 - \Omega_1)(2/3 - \Omega_3) \neq \Omega_2^2$. Odwroćenie jest częściowe, gdyż interesujące nas parametry ε_j i κ_j występują pod funkcjami A . Może być ono jednak przydatne, na przykład przy wyznaczaniu wartości na brzegu, jeśli warunki brzegowe są podane w siłach. Wtedy ε_j i κ_j można obliczyć na drodze iteracyjnej.

3. Numeryczny sposób rozwiązania

Otrzymany układ równań złożony ze związków geometrycznych (2.6) i (2.10), równań równowagi wewnętrznej (2.29) i równań fizycznych (2.40) można sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, nieliniowych o niewiadomych funkcjach u i φ . Można tak uczynić dzięki otrzymanym związkom (2.7), (2.11) i (2.13) przez kolejne podstawienie wielkości do równań równowagi wewnętrznej. Po dołączeniu odpowiednich warunków brzegowych można przystąpić do rozwiązania zadania.

Jednak otrzymany w ten sposób układ równań okazuje się silnie nieliniowy; występują w nim funkcje algebraiczne i przestępne. Nie można otrzymać rozwiązania w postaci zamkniętej. Skłoniło to szereg autorów do stosowania metod przybliżonych, opartych przede wszystkim na rachunku wariacyjnym. Takie postępowanie wymaga założenia z góry postaci odkształconej płyty określonej przez funkcje spełniające warunki brzegowe (przeważnie funkcje trygonometryczne lub wielomiany). Zawęża to jednak znacznie analizę i może spowodować znaczne błędy związane z niewłaściwym doбором funkcji przede wszystkim przy nietypowym obciążeniu.

Z tego powodu zajęliśmy się opracowaniem możliwie ogólnego numerycznego rozwiązywania przy zachowaniu wyprowadzonych, ścisłych równań. Otrzymamy w ten sposób wyniki zbliżone do ścisłych, mogące stanowić podstawę do opracowania nowych i porównania istniejących metod przybliżonych. Oczywiście należy przy tym zachować dużą ostrożność w obszarach występowania osobliwości (np. w otoczeniu punktów przyłożenia obciążeń skupionych).

Oprzemy się na wprowadzonej przez S. P. TIMOSHENKĘ [13], do obliczania dużych ugięć, a ostatnio coraz częściej stosowanej (por. np. [2 i 11]) metodzie półodwrotnej, polegającej na numerycznym całkowaniu równań. W tym celu na jednym

brzegu (będzie to przeważnie środek płyty okrągłej lub wewnętrzny brzeg płyty pierścieniowej) przyjmujemy potrzebną liczbę wartości początkowych poszukiwanych funkcji, a z warunków brzegowych określimy pozostałe wartości. Na podstawie wzorów numerycznego całkowania możemy kolejno przejść do następnych punktów; sygnałem zakończenia całkowania jest osiągnięcie przez którąś z wielkości wartości zgodnej z warunkiem brzegowym, np. $m_r = 0$ przy przegubowym podparciu brzegu.

Spełnienie wszystkich warunków brzegowych jest uzależnione od właściwego doboru wartości początkowych i w tym tkwi główna trudność metody. Z drugiej strony jest ona stosunkowo przejrzysta i bardzo wygodna do wykonywania obliczeń na maszynach cyfrowych, umożliwiającą wobec dużej szybkości wykonywania obliczeń dobranie poprawnych warunków początkowych na drodze kolejnych przybliżeń.

Podamy teraz szczegółowy algorytm rozwiązania. Kolejno przyjmujemy następujący tok postępowania:

1) ustalamy charakterystykę materiału przez dobranie modułu Younga E , współczynnika wzmocnienia λ , odkształcenia plastycznego ε_p oraz grubości \bar{h} i obciążenia \bar{p} płyty; określamy warunki brzegowe w siłach bądź przemieszczeniach;

2) przyjmujemy krok całkowania w wielokrotnościach grubości płyty $\Delta\xi = \Delta\bar{\xi} \cdot \bar{h}$ (jest to konieczne tylko ze względu na wzory numerycznego całkowania wymagające stałego kroku $\Delta\xi$);

3) ustalamy punkt wyjściowy na brzegu o współrzędnej bezwymiarowej ξ_0 i w nim przyjmujemy wartości początkowe np. u_0 i φ_0 (przy płytach pierścieniowych) lub u'_0 i φ'_0 (przy płytach okrągłych);

4) na podstawie warunków brzegowych i przyjętych wartości początkowych obliczamy parametry ε_1 , ε_2 , \varkappa_1 i \varkappa_2 w punkcie ξ_0 ;

5) ze związków fizykalnych (2.40) obliczamy n_r , n_θ , m_r i m_θ oraz funkcję obciążenia g według (2.24);

6) ze związków (2.7), (2.12), (2.13) i z równań równowagi (2.29) obliczamy kolejno pochodne s' , φ' , w' , u' , n'_r i m'_r w punkcie ξ_0 ;

7) przechodzimy do następnego punktu $\xi_1 = \xi_0 + \Delta\xi$. Na podstawie obliczonych pochodnych obliczamy s , φ , w , u , n_r i m_r ;

8) obliczamy ε_2 i \varkappa_2 według (2.11); dzięki niżej podanym wzorom iteracyjnym (3.1) obliczamy ε_1 i \varkappa_1 ;

9) z równań fizycznych (2.40)₂ i (2.40)₄ obliczamy n_θ i m_θ ;

10) powtarzamy obliczenia p. 6) dla punktu ξ_1 i przechodzimy do następnego punktu $\xi_2 = \xi_0 + 2\Delta\xi$.

Dla obliczenia ε_1 i \varkappa_1 w każdym punkcie skorzystamy ze znajomości ε_2 , \varkappa_2 , n_r i m_r obliczonych w 6). Uczynimy to na drodze iteracyjnej dzięki wzorom rekurencyjnym otrzymanym z rozwiązania równań (2.40)₁ i (2.40)₃ ze względu na ε_1 i \varkappa_1 , mianowicie

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1^{(n+1)} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{3}{2}(A_2^{(n)}n_r + A_1^{(n)}m_r), \\ \varkappa_1^{(n+1)} &= -\frac{1}{2}\varkappa_2 + \frac{3}{2}(3A_1^{(n)}n_r + A_3^{(n)}m_r). \end{aligned}$$

We wzorach (3.1) występują funkcje A_j zgodnie z (2.45). Są one funkcjami parametrów ε_j i κ_j za pośrednictwem funkcji Ω_j (2.42). Tak więc $A_j^{(n)} = A_j(\varepsilon_j^{(n)}, \varepsilon_2, \kappa_1^{(n)}, \kappa_2)$. Aby rozpocząć iterację, można przyjąć ε_1 i κ_1 z poprzedniego punktu. Obliczenia numeryczne wykazują, że przy małym kroku $\Delta\xi$ iteracja jest szybko zbieżna.

Zakończenie całkowania przy wybranym warunku brzegowym, np. osiągnięcie $m_r = 0$ przy przegubowo-przesuwnym podparciu nastąpi w pewnym punkcie $\xi = \xi_i$, odpowiadającym promieniowi płyty przed odkształceniem. Aby uzyskać spełnienie drugiego warunku przesuwego podparcia, a więc zerowania się sił równoległych do kierunku przesuwu oraz otrzymać zakończenie całkowania przy z góry danej rozpiętości $\xi_i = a$, należy poprawić warunki początkowe i obliczenia powtórzyć.

Dla zwiększenia dokładności można zagęścić początkowy krok całkowania, aby otrzymać wartości pozwalające na stosowanie dokładnych metod numerycznego całkowania, np. metody Adamsa. W praktyce można się też ograniczyć do mniej dokładnych metod (por. [1]), np. ulepszonej metody Eulera. Ma to znaczenie przy układaniu programu dla maszyny cyfrowej, gdyż w ten sposób mniej wartości z poprzednich punktów włączamy do obliczeń. Dokładność łatwo możemy sprawdzić przez zmniejszenie kroku.

Zastosowany przez nas numeryczny sposób pozwala wykonać obliczenia dla różnych typów obciążeń kołowo-symetrycznych; ewentualne nieciągłości obciążeń nie utrudniają zadania ze względu na numeryczne całkowanie równań. Sposób ten wymaga ponadto stosunkowo mało danych wyjściowych.

Metoda numeryczna stosowana przez P. M. NAGHDIEGO w pracy [9] wymaga wstępnego określenia kształtu odkształconej płyty oraz w dodatku rozkładu sił wewnętrznych w całej płycie. W trakcie dalszych obliczeń są one poprawiane na drodze iteracyjnego powtarzania bardzo żmudnych obliczeń dla całej płyty. Do podobnego postępowania sprowadza się metoda «sprężystych rozwiązań» stosowana przez J. R. LEPIKA w [5 i 6].

4. Numeryczne przykłady

Rozpatrzmy szczegółowo płytę pierścieniową z otworem o promieniu początkowym $\xi_0 = b$, przegubowo podpartą wzdłuż zewnętrznego brzegu; brzeg wewnętrzny będzie swobodny. Dla tego brzegu $m_r = n_r = 0$, a więc na podstawie (2.40) można otrzymać

$$(4.1) \quad \xi_0 = b \begin{cases} \varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_2}{2}, \\ \kappa_1 = -\frac{\kappa_2}{2}. \end{cases}$$

Rozpatrzmy płyty przegubowo przesuwne lub nieprzesuwne podparte, obciążone na zewnętrznym konturze równomiernie rozłożonymi momentami gnącymi promieniowymi o intensywności m i siłami poziomymi promieniowymi o intensywności h .

Obciążenie na płycie oraz funkcje obciążenia będą wtedy wynosiły $p = g = 0$, przez co równania równowagi uproszczą się do postaci

$$(4.2) \quad n'_r = (n_\theta - n_r) \cos \varphi \frac{s'}{r} - n_r \varphi' \operatorname{tg} \varphi,$$

$$m'_r = (m_\theta - m_r) \cos \varphi \frac{s'}{r} = 6n_r s' \operatorname{tg} \varphi.$$

Warunki brzegowe dla konturu zewnętrznego przegubowo-podpartego będą wynosiły

$$(4.3) \quad \xi_l = a \begin{cases} m_r = m, \\ n_r = h \cos \varphi_1. \end{cases}$$

W przypadku przegubowo-nieprzesuwnego podparcia warunki (4.3) przyjmą postać

$$(4.4) \quad \xi_l = a' \begin{cases} m_r = m, \\ u = 0. \end{cases}$$

Na rysunku 7 podano wyniki obliczeń wykonanych dla płyty pierścieniowej, gdy $b = 10$ i charakterystyce $\varepsilon_p = 0,001$, $\lambda = 1$ (materiał idealnie sprężysto-plastyczny) przy ustalonych warunkach początkowych $\varphi_0 = 2^\circ$, $u_0 = 0,005$. W obliczeniach przyjęto $\Delta \xi = 1$ i do całkowania zastosowano ulepszoną metodę Eulera (por. [1]). Obliczenia następnie powtórzono dla $\Delta \xi = 0,5$; rozbieżności powstałe przy dwukrotnym zmniejszeniu kroku nie przekraczały 2%, co wskazuje na dość dużą dokładność metody.

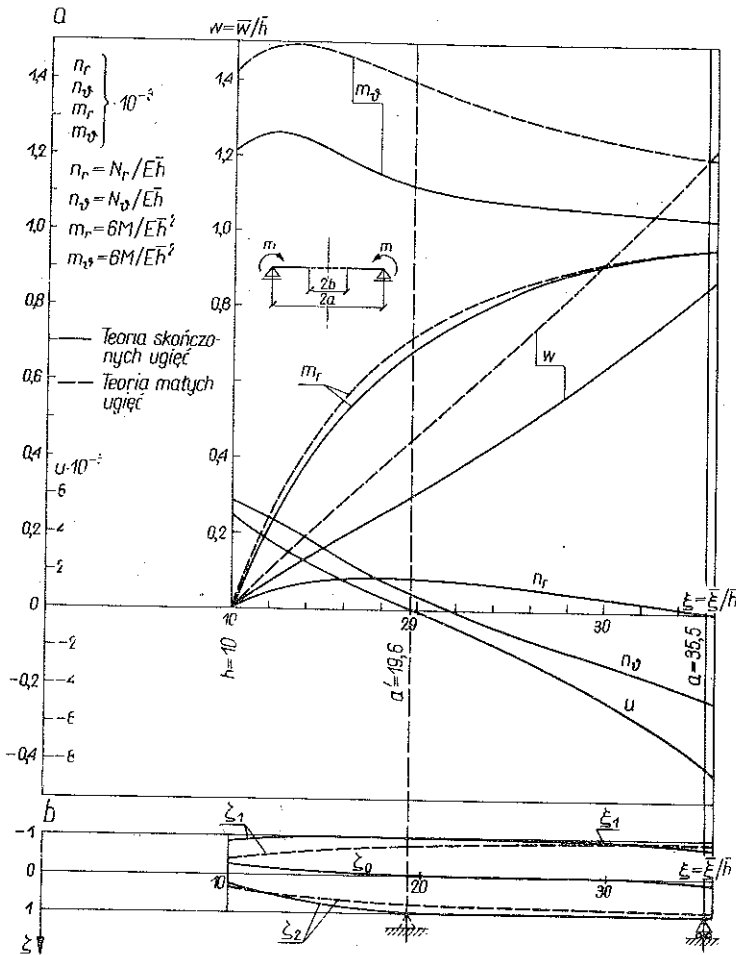
Dla podanych warunków brzegowych numeryczne całkowanie zakończono z chwilą otrzymania $n_r = 0$, co odpowiada podparciu przegubowo-przesuwneemu. Płyta ma wtedy rozpiętość $a = 35,5$ i jest obciążona momentem $m = 0,954 \cdot 10^{-3}$. Na brzegu zewnętrznym wystąpi wtedy $m_\theta = 1,041 \cdot 10^{-3}$, $n_\theta = 0,229 \cdot 10^{-4}$, a przemieszczenia będą wynosiły: $u = -8,301 \cdot 10^{-3}$ i $w = 0,857$ (jest to różnica ugięć $w(a) - w(b)$).

Na rysunku 7a pokazano rozkład sił wewnętrznych oraz przemieszczeń wzdłuż długości płyty. Dla porównania na tym samym rysunku narysowano linią przerywaną krzywe otrzymane dla obciążenia $m = 0,954 \cdot 10^{-3}$ według teorii małych ugięć. Widać, że stosunkowo nieznaczne różnice występują w rozkładzie m_r , natomiast duże w m_θ . Maksymalne ugięcie jest rzędu grubości płyty ($w = 1,197$) i jest o około 40% większe niż obliczone według podanej teorii ugięć skończonych.

Granice obszaru sprężystego zaznaczono na rys. 7b. Widać tutaj zasadniczą różnicę między rozkładem obszarów uplastycznienia obliczonych według teorii małych i skończonych ugięć; duża różnica powstała na skutek zmniejszenia momentu m_θ oraz uwzględnienia wpływu sił podłużnych w teorii ugięć skończonych.

Na rysunkach 7 zaznaczono linią przerywaną brzeg płyty przegubowo-nieprzesuwnie podpartej. Dla podanych warunków brzegowych $\varphi_0 = 2^\circ$ i $u_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ będzie to płyta, dla której $u = 0$ przy $a' = 19,6$. Przy obciążeniu takiej płyty mo-

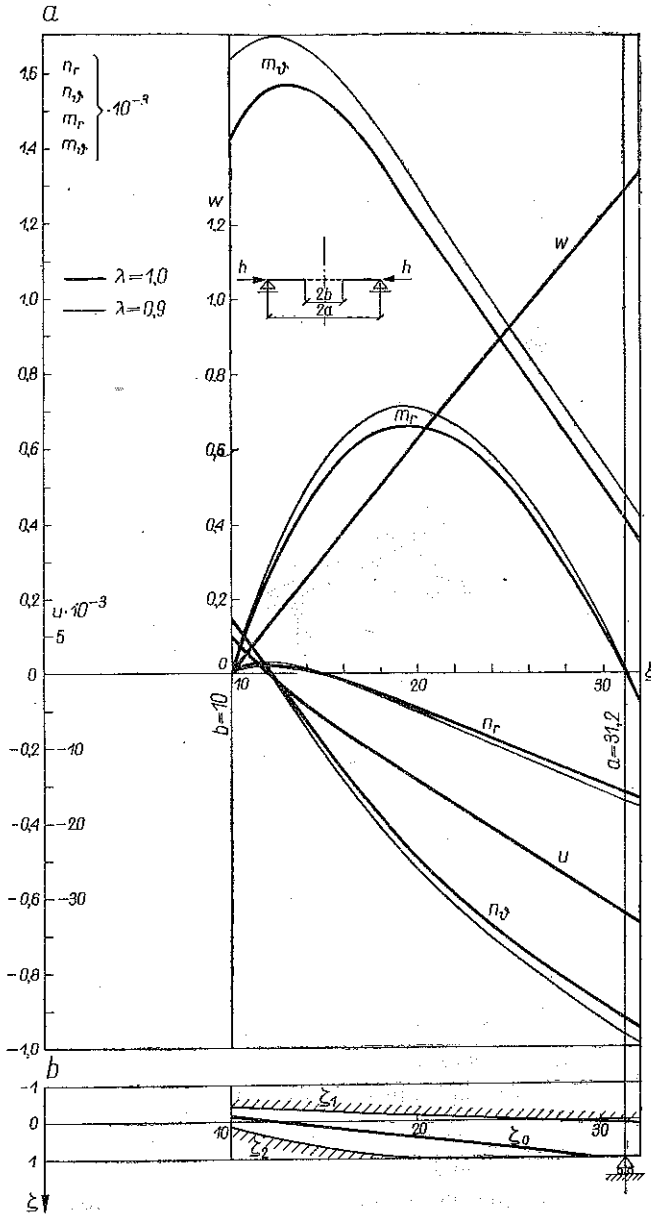
mentem $m = 0,680 \cdot 10^{-3}$ w podporze powstanie reakcja pozioma $h = 0,080 \cdot 10^{-3}$, a maksymalne ugięcie $w = 0,300$.



Rys. 7

Obliczenia powtórzone dla płyty o tej samej charakterystyce materiału i $\xi_0 = b = 10$ lecz przy zmienionym początkowym kącie ugięcia; przyjęto mianowicie $\varphi_0 = 4^\circ$, $u_0 = 5 \cdot 10^{-3}$. Obliczenia doprowadzono do punktu $\xi_l = 31,2$, w którym $m_r = 0$. Odpowiada to pokrytycznej postaci równowagi dla płyty pierścieniowej przegubowo podpartej, ściskanej równomiernie rozłożoną siłą $h = -0,320 \cdot 10^{-3}$ (siłę $h = n_r / \cos \varphi_2$ obliczamy na podstawie wielkości siły n_r odczytanej przy $\xi_l = 31,2$). Na rysunku 8b pokazano obszar sprężysty ograniczony krzywymi ζ_1 i ζ_2 . Krzywa ζ_0 odpowiadająca minimum intensywności odkształceń ε_i w pobliżu podpory wychodzi poza płytę. Siła krytyczna obliczona według teorii małych ugięć jest prawie równa sile h i nie wywoła uplastycznienia przed deformacją płyty (płyta mogłaby ulec uplastycznieniu przy $h_1 = 0,679 \cdot 10^{-3} \gg h_{kr}$); uplastycznienie powstaje w wyniku wyboczenia. Zwraca przy tym uwagę znacznie rozbudowany obszar

jednostronnego uplastycznienia przy podporze, powstały przede wszystkim na skutek wystąpienia dużej siły obwodowej n_θ .



Rys. 8

Na rysunku 8 naniesiono linią cieniłą wyniki obliczeń dla wyżej podanej płyty o współczynniku wzmocnienia $\lambda = 0,9$. Przy tych samych warunkach początkowych przemieszczenia u i w jak też obszary uplastycznienia praktycznie się nie różnią; niewielkie różnice (5–15%) występują w siłach podłużnych i momentach gnących.

Dokładniejszą analizę płyty pierścieniowej można znaleźć w pracy [15], gdzie podano wyniki obliczeń wykonanych na maszynie cyfrowej UMC-1.

5. Zakończenie

W pracy zanalizowaliśmy skończone ugięcia płyt sprężysto-plastycznych wykonanych z materiału nieściśliwego. Założenie to jest bardzo często przyjmowane w teorii odkształceniowej i znacznie upraszcza równania fizyczne.

W przypadku materiału ściśliwego równania znacznie się komplikują (dokładną analizę tego zagadnienia dla teorii małych ugięć można znaleźć w pracy M. ŻYCKOWSKIEGO [17]), jednak nie stanowi to zasadniczej przeszkody w uogólnieniu w tym kierunku podanych równań i sposobu obliczania. Nie uczyniliśmy tego ze względu na możliwość wykorzystania gotowych wzorów J. R. LEPIKA.

W pracy zajmowaliśmy się jedynie aktywnym procesem obciążenia. Przy występowaniu odciążenia należy rozwiązać dodatkowy układ równań wariacyjnych i zadanie znacznie się komplikuje. Dlatego podane równania można stosować jedynie przy założeniu braku odciążeń lub też w przybliżeniu dla niewielkich obszarów odciążeń (por. [5]).

Numeryczne obliczenie ugięć skończonych jest bardzo przydatne przy badaniu pokrytycznego zachowania się płyt sprężysto-plastycznych. Zagadnienie to, stosunkowo mało opracowane (por. [7]), można w przypadku kołowej symetrii zanalizować w oparciu o podany przez nas sposób tym łatwiej, że równania równowagi upraszczają się do postaci (4.2). Duże ugięcia sprężysto-plastycznych płyt ściskanych siłami promieniowymi obliczał numerycznie również A. N. SHERBOURNE [12]; na podstawie analizy obszaru sprężystego oraz wprowadzonego sztywno-plastycznego modelu przy odkształceniach plastycznych oszacowuje on kres górny siły obciążającej jak funkcji ugięcia.

W podanych przykładach rozpatrywaliśmy stosunkowo niewielkie ugięcia (rzędu grubości płyty), a pomimo to otrzymano znacznie mniejsze ugięcia (o ok. 40%) niż w teorii małych ugięć. Przy większych ugięciach również równania Kármána mogą być zbyt mało dokładne, dlatego w pracy podaliśmy bardziej ścisłe związki geometryczne i równania równowagi wyprowadzone przy użyciu zmiennej typu Lagrange'a. Równania te możemy stosować w ramach małych odkształceń, gdyż w przeciwnym przypadku musielibyśmy oprzeć się na jeszcze bardziej dokładnych równaniach teorii skończonych odkształceń (należy wtedy również równania fizyczne wyrazić przez skończone odkształcenia).

Ważny problem odpowiedniego dobrania warunków początkowych (por. [11]) można rozwiązać na drodze numerycznej przez wykonanie przeliczeń dla różnych płyt; zadaniem tym zajęliśmy się bardziej szczegółowo w [15].

Podaną metodę bez żadnych istotnych komplikacji można również zastosować do obliczania skończonych sprężysto-plastycznych ugięć cienkich powłok obrotowo-symetrycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Б. П. Демидович, Я. А. Марон, Е. Я. Шувалова, *Численные методы анализа*, Т. 2 Физматгиз, Москва 1963. (tłum. polskie PWN, Warszawa 1965).
2. А. С. Григорьев, *Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., 6, 21 (1957), 827-832.
3. GU GUO-LI, GU QU-LIN, *On the large deflection of elastic-plastic bending of circular plates* (w j. chińskim), Acta Mech. Sin., 3, 2 (1958), 232-243.
4. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва—Ленинград 1948.
5. Ю. Р. Лепик, *Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах*, Инженерный Сборник, 24 (1956), 37-51.
6. Ю. Р. Лепик, *О равновесии гибких пластинок за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех., 6, 21 (1957), 833-842.
7. Ю. Р. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек*, Инженерный Журнал, 3, 4 (1964), 601-616.
8. П. А. Лукаш, *Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности*, Труды ЦНИИСК, вып. 7 (1961), 268-318.
9. P. M. NAGHDI, *Bending of elastoplastic circular plates with large deflections*, J. Appl. Mech., 3, 19 (1952), 293-300.
10. Y. OHASHI, S. MURAKAMI, *The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate*, Proceeding of the 11-th International Congress of Appl. Mech., Munich (1964), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
11. Я. Оркиш, *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, Инжен. Журнал, 5, 5 (1965), 976-982.
12. A. N. SHERBOURNE, *The ultimate strength of circular mild steel plates in uniform compression*, Mém. Assoc. Intern. Ponts et Charpents, 22 (1962), 289-310.
13. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIGER, *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill, NY-Toronto-London 1956 (wyd. polskie „Arkady” Warszawa 1962).
14. Z. WASZCZYSZYN, M. ŻYCZKOWSKI, *Finite elastic deflection of a stretchable beam on immovable supports*, AMS, 1, 14 (1962), 61-82.
15. Z. WASZCZYSZYN, *Porównanie małych i skończonych sprężysto-plastycznych ugięć na przykładzie płyty pierścieniowej* (w przygotowaniu do druku).
16. А. С. Вольтер, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.
17. М. Życzkowski, *Wpływ ściśliwości materiału na rozkład naprężeń w płytach częściowo uplastycznionych*, Arch. Bud. Maszyn, 1, 5 (1958), 53-87.

Резюме

КОНЕЧНЫЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ПРОГИБЫ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИНОК

В работе выводятся основные геометрические уравнения и уравнения внутреннего равновесия, при использовании координаты типа Лагранжа в качестве независимой переменной. Физические уравнения принято в виде, выведенным Лепиком [6], основываясь на деформационной теории Генки-Ильюшина в зависимости от сделанных упрощений. Выведенные уравнения переходят в уравнения малых упруго-пластических прогибов или же, в уравнения Кармана, применяемые при расчетах больших прогибов.

Приводится численный способ решения, полученных уравнений, путем применения полуобратного метода и численного интегрирования.

Решаются два числовых примера. В первом кольцевая пластинка загружена изгибающим моментом, равномерно расположенным вдоль внешнего шарнирно опертого контура. Дается распределение внутренних сил и перемещений вдоль радиуса пластинки. Результаты сравниваются с расчетами согласно теории малых прогибов.

В качестве второго примера, рассматривается равновесие после потери устойчивости кольцевой пластинки, сжимаемой радиально нагрузкой, приложенной вдоль внешнего контура.

Summary

FINITE ELASTIC-PLASTIC DEFLECTION OF CIRCULARLY SYMMETRIC PLATES

Fundamental geometric and equilibrium equations are derived with a Lagrangian coordinate as an independent variable. The physical equations are assumed in the form obtained by J. R. LEPIK [6] on the grounds of the Hencky-Ilyushin strain theory. The equations become those of small elastic-plastic deflection or the Kármán equations applied for computation of large deflections, depending on the kind of the simplifications introduced.

A numerical method is proposed for solving the equations obtained, by means of the semi-inverse method and numerical integration.

The paper includes two numerical examples. In the first an annular plate is loaded by a bending moment uniformly distributed along the outer contour which rests on hinged support. The radial distribution of the internal forces and the displacements is obtained. The results are confronted with the computation results obtained on the grounds of the theory of small deflections.

The second example concerns the equilibrium, after buckling, of an annular plate, compressed by a radial load along the outer contour.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
KATEDRA STATYKI BUDOWLI
I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lipca 1966 r.
