Rozprawy Inżynierskie
1, 15 (1967)

# W SPRAWIE LINIOWEJ TEORII POWŁOK LEPKOSPRĘŻYSTYCH

EUGENIUSZ BIELEWICZ (GDAŃSK)

Celem przedstawionej pracy jest przede wszystkim określenie przypadków, dla których w zagadnieniu powłok lepkosprężystych, poddanych działaniu obciążenia zewnętrznego i ustalonego pola temperatury, istnieje «stowarzyszony» problem sprężysty. Są to jednocześnie przypadki, gdy stany naprężeń lub stany odkształceń powłoki sprężystej i lepkosprężystej są identyczne.

Stronę geometryczną i statyczną zagadnienia oparto na przybliżonych równaniach liniowej teorii powłok podanych w monografii Greena i Zerny [1].

Jak wiadomo, nie ma konsekwentnych równań pierwszego przybliżenia w teorii powłok sprężystych. Zagadnienie podstaw teorii powłok sprężystych oraz porównanie szeregu istniejących przybliżonych równań konstytutywnych przedstawione jest szczegółowo w przeglądowym opracowaniu Naghdiego [2].

W pracy niniejszej przyjęto najprostszą wersję teorii liniowej (według [1]) w celu uproszczenia zapisu. Wnioski pracy odnoszą się również do wszystkich przypadków bardziej ogólnych równań teorii liniowej, dla których stosuje się analogia geometryczno-statyczna.

Dla materiału powłoki przyjęto ogólny model ciała liniowo lepkosprężystego o stałych niezależnych od czasu. Model taki pozwala na zastosowanie transformacji Laplace'a i wykorzystanie analogii sprężysto-lepkosprężystej [3 i 4].

Rozwiązanie zasadniczego zagadnienia podano przy użyciu zapisu tensorowego w postaci równań przemieszczeniowych, równań dla funkcji naprężeń oraz równań metody mieszanej. Jest to inne ujęcie tematu powłok lepkosprężystych niż w pracach [5, 6 i 7]; jednocześnie bardziej ogólne potraktowanie problemu termosprężystego powłok w odniesieniu do monografii [8 i 9]. Ujęcie to okazało się bardzo korzystne w dyskusji zagadnienia.

Naśladując (z niewielkimi zmianami) pracę [1] główne oznaczenia przyjęto następująco:

$E$, $G$, $\nu$ stałe materiałowe,
$\alpha(t)$ współczynnik rozszerzalności cieplnej,
$t$ grubość powłoki,
$L$ długość charakterystyczna powłoki,
$\lambda$ $= t/L$,
$g_{ik}$ składowe tensora metrycznego,
$\tau^{ik}$ składowe tensora naprężenia,
$\gamma^{ik}$ składowe tensora odkształcenia,

$\theta_1, \theta_2$ współrzędne krzywoliniowe na powierzchni środkowej powłoki,
$\theta_3$ współrzędna prostopadła do powierzchni środkowej powłoki $(-1/2 \leqslant \theta_3 \leqslant 1/2)$,
$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ składowe tensora pierwszej i drugiej podstawowej formy powierzchni,
$n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}$ składowe tensora sił wewnętrznych powłoki,
$v_\alpha$, $w$ składowe wektora przemieszczenia punktów powierzchni środkowej (bezwymiarowe),
$p^\alpha$, $p$ składowe obciążenia zewnętrznego,
$\varepsilon_{\alpha\beta}$ składowe tensora Ricciego,
$\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}$ $= \epsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\mu}$,
$(\,)_{,\alpha}$, $(\,)|_\alpha$ symbole pochodnej cząstkowej i pochodnej kowariantnej.

Wskaźniki greckie przybierają wartości 1 i 2.

## 1. Związki statyczne i geometryczne

Potrzebne w dalszej części pracy zależności przyjmiemy z monografii [1] i pracy [10].

Równania równowagi elementu powłoki mają postać ([1], s. 381)

$$n^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha m^{\lambda\alpha}|_\lambda + p^\beta = 0\,, \quad m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + p = 0\,, \quad (n^{\alpha\beta} + m^{\lambda\alpha} b^\beta_\lambda)\,\varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.1}$$

Odkształcenia powłoki można następująco wyrazić przez przemieszczenia powierzchni środkowej ([1], s. 386):

$$\gamma_{\alpha\beta} = L^2(\alpha_{\alpha\beta} + \lambda\theta_3\beta_{\alpha\beta}), \qquad \alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha) - b_{\alpha\beta} w\,, \qquad \beta_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta}\,. \tag{1.2}$$

Równania zgodności przemieszczeń są następujące ([10], s. 43);

$$\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}\beta^\lambda_\alpha|_\beta + \delta^{\alpha\beta}_{\lambda\varrho} b^\varrho_\mu \alpha^\lambda_\alpha|_\beta = 0\,, \quad \delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}(b^\lambda_\beta \beta^\mu_\alpha + \alpha^\lambda_\alpha|^\mu_{\cdot\beta}) = 0\,, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}(\beta_{\alpha\beta} - b^\lambda_\beta\,\alpha_{\lambda\alpha}) = 0. \tag{1.3}$$

Podstawienie ([10], s. 43)

$$\alpha_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu}\,\varepsilon_{\beta\nu}(-A^{\nu\mu})\,, \qquad \beta_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu}\,\varepsilon_{\beta\nu} B^{\nu\mu} \tag{1.4}$$

nadaje równaniom (1.3) postać

$$B^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha A^{\lambda\alpha}|_\lambda = 0\,, \quad A^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0\,, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(B^{\alpha\beta} + b^\beta_\lambda A^{\lambda\alpha}) = 0\,. \tag{1.5}$$

Identyczność budowy równań (1.5) z budową jednorodnych równań (1.1) jest podstawą analogii geometryczno-statycznej.

## 2. Związki fizyczne i równania powłok sprężystych

Napiszmy teraz związki fizyczne dla sił wewnętrznych i odkształceń powłoki. Do sprężystego ciała przestrzennego odnoszą się równania

$$\begin{aligned} \tau^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\tau^r_r &= 2G\left(\gamma^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\gamma^r_r\right), \\ \tau^i_i &= 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\left(\gamma^i_i - 3a_{(t)}T(\theta_i)\right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $T(\theta_i)$ określa pole temperatury.

Przechodząc do dwuwymiarowego stanu naprężeń przy założeniu $\tau^{33}=0$ i po wykorzystaniu $g^{\alpha 3}=0$, otrzymujemy

$$\tau^{\alpha\beta}=G\left(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\varrho}+g^{\alpha\varrho}g^{\beta\lambda}+\frac{2\nu}{1-\nu}g^{\alpha\beta}g^{\lambda\varrho}\right)\gamma_{\varrho\lambda}-2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_{(t)}Tg^{\alpha\beta}. \tag{2.2}$$

Poszukiwane związki otrzymamy przez całkowanie ([1], s. 379):

$$n^{\alpha\beta}=\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma^{\alpha\beta}d\theta_3,\qquad m^{\alpha\beta}=\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma^{\alpha\beta}\lambda\theta_3\,d\theta_3, \tag{2.3}$$

gdzie ([1], s. 377 i 378)

$$\sqrt{\frac{g}{a}}=\lambda L^3(1-\lambda\theta_3 b^\nu_\nu),\qquad \sigma^{\alpha\beta}=(\delta^\beta_\mu-\lambda\theta_3 b^\beta_\mu)\tau^{\alpha\mu} \tag{2.4}$$

i poza tym

$$g^{\alpha\beta}=\frac{1}{L^2}(a^{\alpha\beta}+2\lambda\theta_3 b^{\alpha\beta}). \tag{2.5}$$

Celowe jest przyjęcie, że temperatura zmienia się liniowo w kierunku grubości powłoki:

$$T(\theta_i)=T_0(\theta_\alpha)+\lambda\theta_3 T_1(\theta_\alpha). \tag{2.6}$$

Wynika to z faktu, że związki pierwszy (2.4) i (2.5) są przybliżone z dokładnością do wyrazu liniowego. Wprowadzając wyższe potęgi do rozwinięcia temperatury w szereg należałoby odpowiednio uzupełnić pierwsze wzory (2.4) i (2.5). Otrzymane w ten sposób związki byłyby bardzo skomplikowane, a zwiększenie dokładności jest problematyczne ze względu na założenie Kirchhoffa-Love'a.

Po wykonaniu całkowania z zachowaniem dla $n^{\alpha\beta}$ tylko wyrazów ze współczynnikiem $(\lambda\theta_3)^0$, a dla $m^{\alpha\beta}$ wyrazów ze współczynnikiem $(\lambda\theta_3)^2$ i po odrzuceniu dla $m^{\alpha\beta}$ szeregu mniej istotnych wyrazów otrzymamy

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}&=DH^{\alpha\beta\varrho\lambda}\alpha_{\varrho\lambda}-\frac{Et}{1-2\nu}\alpha_{(t)}T_0a^{\alpha\beta},\\ m^{\alpha\beta}&=BH^{\alpha\beta\varrho\lambda}\beta_{\varrho\lambda}-\frac{\lambda^2}{12}\frac{Et}{(1-2\nu)}\alpha_{(t)}[T_0(b^{\alpha\beta}-b^\nu_\nu a^{\alpha\beta})+T_1a^{\alpha\beta}],\end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} H^{\alpha\beta\varrho\lambda}&=\frac{1}{2}[a^{\alpha\beta}a^{\beta\varrho}+a^{\alpha\varrho}a^{\beta\lambda}+\nu(\varepsilon^{\alpha\varrho}\varepsilon^{\beta\lambda}+\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\varrho})],\\ D&=\frac{Et}{1-\nu^2},\qquad B=\frac{\lambda^2}{12}D.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Związek drugi (2.7) zawiera uproszczenia wynikające z założenia, że współrzędne wektora przemieszczenia $v_\alpha$ są znacznie mniejsze od współrzędnej $w$. Założenie to było już stosowane przy wyprowadzeniu równań (1.2). Dla wyrazów zależnych od temperatury nie stosowano żadnych uproszczeń. Zależności odwrotne do (2.7) są następujące:

$$
(2.9)\qquad
\begin{aligned}
\alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{Et} F_{\alpha\beta\varrho\lambda} n^{\varrho\lambda} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_{(t)} T_0 \, a_{\alpha\beta}\,,\\
\beta_{\alpha\beta} &= \frac{12}{\lambda^2 Et} F_{\alpha\beta\varrho\lambda} m^{\varrho\lambda} + \frac{\alpha_{(t)}}{1-2\nu} [T_0 \, [(1+\nu)\, b_{\alpha\beta} - b^{\nu}_{\nu} \, a_{\alpha\beta}] + T_1 \, (1-\nu)\, a_{\alpha\beta}]\,,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
F_{\alpha\beta\varrho\lambda} = \frac{1}{2} [a_{\alpha\varrho} \, a_{\beta\lambda} + a_{\alpha\lambda} \, a_{\beta\varrho} - \nu \, (\varepsilon_{\alpha\varrho} \, \varepsilon_{\beta\lambda} + \varepsilon_{\alpha\lambda} \, \varepsilon_{\beta\varrho})]\,.
$$

W teorii powłok sprężystych stosuje się trzy rodzaje równań prowadzących do rozwiązania. Są to równania przemieszczeniowe, równania dla funkcji naprężeń i równania metody mieszanej. Równania przemieszczeniowe otrzymuje się przez podstawienie funkcji (2.7) do równań (1.1) (z wyjątkiem ostatniego). Można im nadać postać

$$
(2.10)\qquad
\begin{aligned}
L^{\beta}_{\alpha}(v^{\alpha}) + L^{\beta}(w) &= -\frac{1-\nu^2}{Et} p^{\beta} + \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \alpha_{(t)} T_0 |^{\beta} + \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{12} \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \alpha_{(t)} \, b^{\beta}_{\alpha} \, [[T_0 \, (b^{\lambda\alpha} - b^{\nu}_{\nu} \, a^{\lambda\alpha})]|_{\lambda} + T_1|^{\alpha}]\,,\\
L^{\beta *}(v_{\beta}) + L(w) &= -\frac{1-\nu^2}{Et} p + \frac{1-\nu^2}{1-2\nu} \alpha_{(t)} \, b^{\alpha}_{\alpha} T_0 + \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{12} \frac{(1-\nu^2)}{1-2\nu} \alpha_{(t)} \, [T_0 \, (b^{\alpha\beta} - b^{\nu}_{\nu} \, a^{\alpha\beta}) + T_1 \, a^{\alpha\beta}]|_{\alpha\beta}\,.
\end{aligned}
$$

W równaniach tych $L^{\beta}_{\alpha}, L^{\beta}, L^{\beta *}$ i $L$ są operatorami tensorowymi. Napiszemy je oznaczając symbolem $\nabla$ operator pochodnej kowariantnej:

$$
(2.11)\qquad
\begin{aligned}
L^{\beta}_{\alpha} &= \frac{1-\nu}{2} (\nabla^{\beta}_{\cdot\alpha} + \nabla^{\lambda}_{\cdot\lambda} \, \delta^{\beta}_{\alpha}) + \nu \nabla^{\cdot\beta}_{\alpha}\,,\\
L^{\beta} &= -(1-\nu)\, b^{\alpha\beta} \, \nabla_{\alpha} - \nu b^{\varrho}_{\varrho} \, \nabla^{\beta} + \frac{\lambda^2}{12} b^{\beta}_{\alpha} \, [\nabla^{\lambda\alpha}_{\cdot\cdot\lambda} (1-\nu) + \nu \nabla^{\varrho\alpha}_{\varrho}]\,,\\
L^{\beta *} &= (1-\nu)\, b^{\alpha\beta} \, \nabla_{\alpha} + \nu b^{\varrho}_{\varrho} \, \nabla^{\beta}\,,\\
L &= -(1-\nu)\, b^{\alpha}_{\beta} \, b^{\beta}_{\alpha} - \nu b^{\varrho}_{\varrho} \, b^{\alpha}_{\alpha} - \frac{\lambda^2}{12} [(1-\nu)\, \nabla^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\alpha\beta} + \nu \nabla^{\alpha\beta}_{\alpha\cdot\beta}]\,.
\end{aligned}
$$

Widoczne jest z równań (2.10), że wpływ pola temperatury można tutaj zastąpić pewnym obciążeniem zewnętrznym.

Przejdźmy teraz do zagadnienia równań dla funkcji naprężeń. Przyjęcie

$$
(2.12)\qquad
\begin{aligned}
n^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\mu} \, \varepsilon^{\beta\nu} \, \varphi|_{\nu\mu}\,,\\
m^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\mu} \, \varepsilon^{\beta\nu} \left[\frac{1}{2} (\psi_{\nu}|_{\mu} + \psi_{\mu}|_{\nu}) - b_{\nu\mu} \, \varphi\right],
\end{aligned}
$$

gdzie $\varphi$, $\psi_\alpha$ są funkcjami naprężeń, spełnia tożsamościowo jednorodne równania równowagi. Wynika to z analogii geometryczno-statycznej.

Wprowadzenie do równań (1.3) funkcji (2.9) z wykorzystaniem (2.12) daje poszukiwane równania. Napiszemy je podobnie jak (2.10):

$$
\begin{aligned}
&\overline{L}^\beta_\alpha(\psi^\alpha)+\overline{L}^\beta(\varphi) = -\frac{Et}{(1-2\nu)}\frac{\lambda^2}{12}\alpha_{(t)}\,[-\nu\,[2T_0\,b^{\alpha\beta}-\\
&\qquad\qquad - T_0\,b^\nu_\nu\,a^{\alpha\beta}]\,|_\alpha+(1-\nu)\,T_1\,|^\beta], \qquad (2.13)\\
&\overline{L}^{\beta*}(\psi_\beta)+\overline{L}(\varphi) = -\frac{Et}{(1-2\nu)}\frac{\lambda^2}{12}\alpha_{(t)}\,[T_0\,[-(1+\nu)\,b^\alpha_\beta\,b^\beta_\alpha+\nu b^\alpha_\alpha\,b^\beta_\beta]+\\
&\qquad\qquad +(1-\nu)\,T_0\,|^\beta_\beta+(1-\nu)\,b^\alpha_\alpha T_1],
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
&\overline{L}^\beta_\alpha = \frac{1+\nu}{2}\left(\nabla^\beta_{\cdot\alpha}+\nabla^\lambda_{\cdot\lambda}\,\delta^\beta_\alpha\right)-\nu\nabla^{\cdot\beta}_\alpha,\\
&\overline{L}^\beta = -(1+\nu)\,b^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha+\nu\,b^\varrho_\varrho\,\nabla^\beta+\frac{\lambda^2}{12}b^\beta_\alpha\,[(1+\nu)\,\nabla^{\lambda\alpha}_{\cdot\cdot\lambda}-\nu\nabla^{\mu\alpha}_\mu], \qquad (2.14)\\
&\overline{L}^{\beta*} = (1+\nu)\,b^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha-\nu b^\varrho_\varrho\,\nabla^\beta,\\
&\overline{L} = -(1+\nu)\,b^\alpha_\beta\,b^\beta_\alpha+\nu b^\varrho_\varrho\,b^\alpha_\alpha-\frac{\lambda^2}{12}[(1+\nu)\,\nabla^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\alpha\beta}-\nu\nabla^{\alpha\beta}_{\alpha\cdot\beta}].
\end{aligned}
$$

Tutaj występuje zasadnicza różnica między obciążeniem zewnętrznym i polem temperatury. W równaniach dla funkcji naprężeń nie ma obciążenia. Równania ujmują zatem tylko warunki brzegowe. Całka szczególna zadania musi być wyznaczona na innej drodze. Natomiast wpływ pola temperatury jest bezpośrednio widoczny w równaniach i może być z nich obliczona całka szczególna. Jest znanym faktem, że operatory (2.14) są takie same jak operatory (2.11) z uwzględnieniem zamiany: $\nu\to(-\nu)$.

Równania metody mieszanej są równaniami przybliżonymi. Stosuje się je najczęściej do powłok o małej wyniosłości. W równaniu pierwszym (1.1) pomija się wyrazy $p^\beta$ i $b^\beta_\alpha\,m^{\lambda\alpha}|_\lambda$. Wówczas równanie to ($n^{\alpha\beta}|_\alpha=0$) może być spełnione tożsamościowo (w przybliżeniu) przez podstawienie $(2.12)_1$.

Niewiadomymi metody mieszanej są: funkcja naprężeń $\varphi$ i składowa przemieszczenia $w$. Równania tej metody otrzymujemy pisząc równanie $(1.1)_2$ i $(1.3)_2$ i podstawiając funkcje $(2.7)_2$ i $(2.12)_1$. Ostateczna ich postać jest następująca:

$$
\begin{aligned}
&Bw\,|^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}-\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}\,b^\lambda_\alpha\,\varphi\,|^\mu_\beta = p-\frac{\lambda^2}{12}\frac{Et}{(1-2\nu)}\alpha_{(t)}\,[T_0\,(b^{\alpha\beta}-b^\nu_\nu\,a^{\alpha\beta})+T_1\,a^{\alpha\beta}]\,|_{\alpha\beta}, \qquad (2.15)\\
&\frac{1}{Et}\,\varphi\,|^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}-\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\mu}\,b^\lambda_\beta\,w\,|^\mu_\alpha = -\frac{1-\nu}{1-2\nu}\alpha_{(t)}\,T_0\,|^\beta_\beta.
\end{aligned}
$$

Do dyskusji zagadnień dynamicznych nadają się tylko równania (2.10), a dla powłok o małej wyniosłości — równania (2.15), które uzupełnić należy siłami bezwładności. W równaniach (2.10) i (2.15) należy poprostu podstawić

$$
p^\beta = p^\beta_0-\mu v^\beta_{,\tau\tau}\,L^2,\qquad p = p_0-\mu w_{,\tau\tau}\,L^2\quad(\text{nie sumować po }\tau). \qquad (2.16)
$$

Indeks $\tau$ oznacza tutaj różniczkowanie względem czasu, a $\mu$ jest masą powłoki na jednostkę pola powierzchni środkowej powłoki.

Jeżeli przyjmiemy bardziej dokładne związki (1.2) i (2.7), dla których ma zastosowanie analogia geometryczno-statyczna, to można zupełnie podobnie napisać odpowiednie równania (2.10), (2.13) i (2.15). Postać ich będzie tylko bardziej skomplikowana. DUDDECK [10] rozważa na przykład przypadek, gdy

$$\beta_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta} - (b^{\nu}_{\alpha} v_{\nu})|_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda\mu}_{\nu\beta} b^{\nu}_{\alpha} v_{\lambda}|_{\mu}, \tag{2.17}$$

a więc przypadek, gdy $\beta_{\alpha\beta} \neq \beta_{\beta\alpha}$.

Operatory (2.11) i (2.14) wyznaczone dla $\beta_{\alpha\beta}$ według (2.17) będą również zależały tylko od stałej materiałowej $\nu$ (ma to znaczenie przy dalszej dyskusji równań).

Wypiszemy jeszcze warunki brzegowe. Niech brzeg powłoki określa krzywa $c$ leżąca na powierzchni środkowej powłoki. Oznaczając wówczas przez $\mathbf{u}$ wektor jednostkowy normalnej geodezyjnej do punktów krzywej $c$ oraz przez $n$, $s$ lokalny układ współrzędnych na krzywej $c$ o kierunkach normalnej geodezyjnej i stycznej do krzywej $c$, napiszemy:

$$v_{\alpha}, \quad w, \quad w_{,n} \tag{2.18}$$

lub

$$n^{\alpha\beta} u_{\beta}, \quad q^{\beta} u_{\beta} - m^{sn}_{\ \ ,s}, \quad m^{nn} \quad \text{(nie sumować po } s \text{ i } n). \tag{2.19}$$

Warunki (2.18) są warunkami w przemieszczeniach, a warunki (2.19) warunkami w naprężeniach.

### 3. Związki fizykalne i równania powłok lepkosprężystych

Jeżeli dla zagadnienia quasi-statycznego powłoki lepkosprężystej przyjmiemy wszystkie założenia powłok sprężystych z p. 1, to łatwo jest stwierdzić, że równania (1.1), (1.2) i (1.3) nie ulegną zmianie, jedynie tensory w nich występujące staną się również funkcjami czasu $\tau$. Związki fizykalne (odpowiednik (2.1)) przyjmą teraz postać

$$\begin{aligned} \tau^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j \tau^r_r &= \frac{Q_1(D)}{P_1(D)}\left(\gamma^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j \gamma^r_r\right), \\ \tau^i_i &= \frac{Q_2(D)}{P_2(D)}(\gamma^i_i - 3\alpha_{(t)}T), \quad D = \frac{\partial}{\partial\tau}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie $Q_1$, $P_1$, $Q_2$ i $P_2$ oznaczają operatory wielomianowe względem $D$.

Równania (1.1), (1.2), (1.3) i (3.1) powłoki lepkosprężystej poddamy transformacji Laplace'a:

$$\bar{f}(\theta_{\alpha}, s) = \int_0^{\infty} f(\theta_{\alpha}, \tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \tag{3.2}$$

z założeniem $\tau^{ij} = 0$, i $\gamma^{ij} = 0$ dla $\tau = 0$.

Porównując te równania z odpowiednimi przetransformowanymi równaniami quasi-statycznymi zagadnienia sprężystego zauważymy, że przejście od powłoki sprężystej do lepkosprężystej polega na zamianie stałych materiałowych $G$ i $\nu$ na pewne wielomiany względem $s$:

$$2G \to \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}, \qquad 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu} \to \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}. \tag{3.3}$$

Wystarczy wobec tego w równaniach (2.10), (2.13) lub (2.15) dokonać odpowiedniej zamiany, aby otrzymać przetransformowane równania powłoki lepkosprężystej. Równania te nie pokrywają się z odpowiednimi równaniami powłoki sprężystej tego samego kształtu o identycznych warunkach brzegowych i dla identycznego obciążenia. Ponieważ różnica polega tylko na zamianie stałych współczynników, można wykorzystać tutaj metody rozwiązywania stosowane dla powłok sprężystych. Ostateczne rozwiązanie otrzymuje się drogą transformacji odwrotnej Laplace'a. Znaczne uproszczenie uzyskuje się przez przyjęcie, że dla powłoki lepkosprężystej $\nu = \text{const}$, tzn. że istnieje następujący związek między operatorami (wielomianami):

$$\frac{Q_2(s)}{P_2(s)} = \frac{Q_1(s)}{P_1(s)} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}. \tag{3.4}$$

Ponieważ operatory (2.11) i (2.14) zależą od stałej $\nu$, transformaty równań powłoki sprężystej i lepkosprężystej będą identyczne (tzn. lewe strony równań).

W przypadku zagadnienia dynamicznego rozważać będziemy tylko równania (1.15) z uzupełnieniem (1.21). Tak jak w przypadku quasi-statycznym założymy, że $\nu = \text{const}$. Po wykonaniu transformacji Laplace'a i po przyjęciu następujących warunków początkowych:

$$\begin{aligned} v_\alpha(\theta_\alpha, 0) &= v_\alpha^*(\theta_\alpha), \qquad & v_{\alpha,\tau}(\theta_\alpha, 0) &= \dot{v}_\alpha^*(\theta_\alpha), \\ w(\theta_\alpha, 0) &= w^*(\theta_\alpha), \qquad & w_{,\tau}(\theta_\alpha, 0) &= \dot{w}^*(\theta_\alpha), \end{aligned} \tag{3.5}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & L_\alpha^\beta(\bar{v}^\alpha) + L^\beta(\bar{w}) + \frac{(1-\nu)}{t}\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}(s)^2(L)^2\mu\bar{v}^\beta = \\ & = -\frac{(1-\nu)}{t}\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}p_0^\beta + \frac{(1-\nu)}{t}\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}(L)^2\mu\,(sv^{*\beta} + \dot{v}^{*\beta}) + (T)_1^\beta, \\ & L^{\beta*}(\bar{v}_\beta) + L(\bar{w}) + \frac{(1-\nu)}{t}\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}(s)^2(L)^2\mu\bar{w} = \\ & = -\frac{(1-\nu)}{t}\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}p_0 + \frac{(1-\nu)}{t}\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}(L)^2\mu(sw^* + \dot{w}^*) + (T)_2, \end{aligned} \tag{3.6}$$

gdzie przez $(T)_1^\beta$ i $(T_2)$ oznaczono wyrazy związane z wpływem temperatury.

Łatwo jest również napisać równania dla zagadnienia drgań harmonicznych ustalonych. Przyjmując

$$v_\beta(\theta_\alpha, \tau) = \overline{\overline{v}}_\beta(\theta_\alpha) e^{i\omega\tau} \tag{3.7}$$

i podobnie dla pozostałych wielkości, otrzymamy równania (nieprzetransformowane) dla amplitud o podobnej postaci do (3.6), jedynie w operatorach $Q_1$ i $P_1$ należy $s$ zamienić na $i\omega$ ([4], s. 62, 63).

## 4. Dyskusja

Rozważać będziemy tylko przypadek, gdy $\nu = \text{const}$ i porównywać będziemy rozwiązania powłoki sprężystej i lepkosprężystej. Indeksem $s$ oznaczymy rozwiązanie dla powłoki sprężystej, indeksem $ls$ rozwiązanie dla powłoki lepkosprężystej, a poza tym kreską rozwiązanie transformat równań.

Przyjmijmy najpierw, że zadanie jest quasi-statyczne i na powłoki działa tylko obciążenie zewnętrzne ($T = 0$). Dla warunków brzegowych w naprężeniach (jednakowych dla obu powłok) o postaci

$$\begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} u_\beta \\ q^\beta u_\beta - m^{ns}{}_{,s} \\ m^{nn} \end{bmatrix} = g_i(\theta_\alpha) h_i(\tau), \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.1}$$

wykażemy, że stan naprężeń powłoki lepkosprężystej pokrywa się ze stanem naprężeń powłoki sprężystej. Z równań (2.13) ujmujących tylko wpływ warunków brzegowych wynika mianowicie, że w rozwiązaniach nie ma różnicy. Całka szczególna może być wyznaczona z równań równowagi, które są takie same dla obu typów powłok. Napiszemy zatem

$$\begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)}. \tag{4.2}$$

W odkształceniach (i przemieszczeniach) będą jednak różnice. Z transformat równań (2.9) wynika

$$\begin{bmatrix} \overline{\alpha}_{\alpha\beta} \\ \overline{\beta}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} \doteq \overline{R}(s) \begin{bmatrix} s\overline{\alpha}_{\alpha\beta} \\ s\overline{\beta}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$\overline{R}(s) = \frac{P_1(s)}{sQ_1(s)} \frac{E}{(1+\nu)}. \tag{4.4}$$

Stosując transformację odwrotną napiszemy

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \beta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \int_0^\tau R(\tau - \tau_1) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta}(\theta_\alpha, \tau_1) \\ \beta_{\alpha\beta}(\theta_\alpha, \tau_1) \end{bmatrix}_{(s)} d\tau_1. \tag{4.5}$$

Funkcję $R(\tau)$ można zatem nazwać funkcją pełzania. W ten sposób określiliśmy «stowarzyszony» problem sprężysty. Dla warunków brzegowych w przemieszczeniach o postaci

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ w \\ w,_n \end{bmatrix} = k_i(\theta_\alpha) L_i(\tau), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.6}$$

można stwierdzić w oparciu o równania (2.10), że rozwiązania obu typów powłok będą różne. Jedynie dla jednorodnych warunków brzegowych (4.6) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_\alpha \\ \bar{w} \end{bmatrix}_{(ls)} = \bar{R}(s) \begin{bmatrix} s\bar{v}_\alpha \\ s\bar{w} \end{bmatrix}_{(s)}. \tag{4.7}$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ w \end{bmatrix}_{(ls)} = \int_0^\tau R(\tau-\tau_1) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ w \end{bmatrix}_{(s)} d\tau_1 . \tag{4.8}$$

Wówczas na podstawie (2.7) napiszemy

$$\begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)}. \tag{4.9}$$

Stany naprężeń są zatem identyczne.

Rozpatrzmy z kolei przypadek quasi-statyczny i działanie tylko pola temperatury.

Dla warunków brzegowych (4.1) można z równań (2.13) tylko wywnioskować, że naprężenia i odkształcenia obu typów powłok będą się różniły od siebie. Jedynie dla jednorodnych warunków (4.1) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \bar{n}^{\alpha\beta} \\ \bar{m}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \bar{F}(s) \begin{bmatrix} s\bar{n}^{\alpha\beta} \\ s\bar{m}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)}, \tag{4.10}$$

gdzie

$$\bar{F}(s) = \frac{Q_1(s)(1+\nu)}{sP_1(s)E}. \tag{4.11}$$

Po retransformacji znajdziemy zatem

$$\begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \int_0^\tau F(\tau-\tau_1) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)} d\tau_1 . \tag{4.12}$$

Funkcja $F(\tau)$ spełnia więc rolę funkcji relaksacji.

W oparciu o równania (2.9) stwierdzimy w dalszym ciągu, że tym razem w odkształceniach nie będzie różnic. Napiszemy zatem

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \beta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \beta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)}. \tag{4.13}$$

Rozważając warunki brzegowe (4.6) stwierdzimy, że równania (2.10) są identyczne dla obu powłok. Stąd

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ w \end{bmatrix}_{(ls)} = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ w \end{bmatrix}_{(s)} \tag{4.14}$$

oraz po wykorzystaniu równań (2.7)

$$\begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = \int_0^\tau F(\tau-\tau_1)\frac{\partial}{\partial\tau_1}\begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)} d\tau_1 . \tag{4.15}$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że w wielu przypadkach rozwiązania dla powłok lepkosprężystych można łatwo otrzymać znając rozwiązanie «stowarzyszonego» problemu sprężystego. Jeżeli obciążenie lub temperatura zmieniają się w czasie według funkcji Heaviside'a $H(\tau)$, to również

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \beta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)} = \begin{bmatrix} \alpha^0_{\alpha\beta} \\ \beta^0_{\alpha\beta} \end{bmatrix} H(\tau), \qquad \begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)} = \begin{bmatrix} n_0^{\alpha\beta} \\ m_0^{\alpha\beta} \end{bmatrix} H(\tau). \tag{4.16}$$

Związki (4.5) i (4.12) przyjmą wówczas postać

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \beta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(s)} = R(\tau)\begin{bmatrix} \alpha^0_{\alpha\beta} \\ \beta^0_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} n^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{(ls)} = F(\tau)\begin{bmatrix} n_0^{\alpha\beta} \\ m_0^{\alpha\beta} \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Dla modelu standartowego ciała lepkosprężystego np. mamy

$$P_1(D) = 1+kD, \qquad Q_1(D) = 2G+2\eta D,$$

$$\bar{R}(s) = \frac{1+ks}{(2G+2\eta s)s}\,\frac{E}{(1+\nu)}, \qquad \bar{F}(s) = \frac{(2G+2\eta s)(1+\nu)}{(1+ks)sE}.$$

Wówczas

$$R(\tau) = \frac{1}{2G}\left[1+\frac{G}{\eta}e^{-\frac{G}{\eta}\tau}\left(k-\frac{\eta}{G}\right)\right]\frac{E}{1+\nu},$$

$$F(\tau) = 2G\left[1-\left(1-\frac{\eta}{Gk}\right)e^{-\frac{\tau}{k}}\right]\frac{1+\nu}{E}.$$

Podstawiając $\tau = 0$ i $\tau = \infty$ otrzymamy

$$R(0) = \frac{k}{2\eta}\,\frac{E}{(1+\nu)} = \frac{1}{F(0)}, \qquad R(\infty) = \frac{1}{2G}\,\frac{E}{(1+\nu)} = \frac{1}{F(\infty)}.$$

Rozpatrując zagadnienie dynamiczne stwierdzimy łatwo, że transformaty równania powłoki lepkosprężystej są inne niż równania dla zagadnienia sprężystego. Rozwiązanie otrzymamy przez rozwiązanie tych równań i transformację odwrotną Laplace'a, ale tym razem nie da się wydzielić klas zagadnień o jednakowych stanach naprężeń i odkształceń.

Na zakończenie podkreślimy jeszcze raz, że wszystkie wnioski i zależności otrzymane w p. 4 stosują się również dla wszystkich bardziej ogólnych wariantów liniowej teorii powłok, dla których lewe strony równań przemieszczeniowych i równań dla funkcji naprężeń zależą tylko od stałej $\nu$.

**Literatura cytowana w tekście**

1. A. E. Green and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

2. P. M. Naghdi, *Foundations of Elastic Shell Theory*, Progress in Solid Mechanics, Vol. IV, Amsterdam 1963.

3. E. H. Lee, *Stress analysis in visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Math., **13** (1955), 183-190.

4. W. Nowacki, *Teoria pełzania*, Warszawa 1963.

5. W. Nowacki, *Thermal Stresses in Elastic and Visco-elastic Shells*, Symposium on Non-classical Shell Problems, Warszawa 1963.

6. И. И. Голденблат, Н. А. Николаенко, *Ползучесть и несущая способность оболочек*, Ак. Стр. и Арх. СССР, Научное сообщение, Москва 1960.

7. M. H. Gradowczyk and J. N. Distefano, *The visco-elastic theory of thin shallow shells*, Ingenieur Archiv, 5 (1965), 304-312.

8. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1960.

9. К. Ф. Черных, *Линейная теория оболочек*, Ленинград 1964.

10. H. Duddeck, *Das Randstörungsproblem der technischen Biegetheorie dünner Schalen in drei korrespondierenden Darstellungen*, Osterreichisches Ingenieur Archiv, 1 (1962), 32-57.

Резюме

## К ВОПРОСУ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

В работе сопоставляются уравнения линейной задачи изотропных вязкоупругих оболочек, подверженных действию внешней нагрузки и стационарного температурного поля. Кроме, обычно, применяемых уравнений для перемещения и уравнения смешанного метода (для пологих оболочек) дается, также, уравнение для функции напряжения. Использование этих уравнений оказалось полезным в случае выделения класса задач, для которых напряженное или деформированное состояние является одинаковым для вязкоупругой и упругой оболочек.

Обсуждения проводились в тензорной записи.

Summary

## ON THE LINEAR THEORY OF VISCO-ELASTIC SHELLS

The paper contains a brief account of the "resolving" equations of the linear problem of isotropic visco-elastic shells subject to the action of an external load and a steady temperature field. In addition to the usual displacement equations and those of the mixed method (for shallow shells) equations for the stress function are represented. The application of these equations has proved to be successful for separating classes of problems for which the state of stress or strain is the same for the visco-elastic and elastic shell.

Tensor notation is used for the considerations.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 września 1965 r.*