

## O PEWNYM ZAGADNIENIU NIEJEDNORODNEJ PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYTEJ

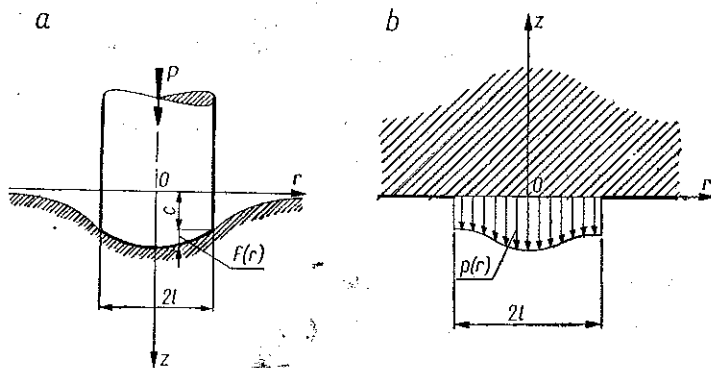
GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

W pracach [2 i 3] podano rozwiązanie kontaktowego problemu dla półprzestrzyny sprężystej ze zmiennym wzdłuż głębokości modułem sprężystości ( $E(y) = E_0 y^m$ ,  $0 < m < 1$  w pracy [2],  $E(y) = E_0 e^{Ay}$  w pracy [3]). W pracy niniejszej rozważymy dwa zagadnienia osiowo-symetrycznego stanu naprężenia, mianowicie: a) zagadnienie stempla, b) zagadnienie typu szczeliny dla niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej z modułem Younga w postaci

$$(1.1) \quad E(z) = E_0 e^{Az}.$$

W zagadnieniu pierwszym podamy efektywne rozwiązanie problemu kontaktowego dla stempla o dowolnej podstawie, spoczywającego bez tarcia na półprzestrzeni (rys. 1a), w zagadnieniu drugim wyznaczmy naprężenia i przemieszczenia dla



Rys. 1

szczeliny w symetrycznie niejednorodnym (względem płaszczyzny, w której leży szczelina) ośrodku sprężystym. Ten drugi problem sprowadza się do zagadnienia półprzestrzeni z określonymi warunkami brzegowymi (rys. 1b). Zadanie to może też znaleźć zastosowanie w mechanice górotworu do wyznaczenia naprężeń w sąsiedztwie frontu eksploatacji.

Podamy rozwiązanie obydwu zagadnień wychodząc z przemieszczeniowych równań Lamégo i stosując transformację całkową Hankela. Problem brzegowy sprowadzimy do dualnych równań całkowych, które przy założeniu małej niejednorodności rozwiążemy efektywnie.

## 2. Ogólne sformułowanie i rozwiązanie problemu

W walcowym układzie współrzędnych  $r, \varphi, z$  rozważamy problem osiowo-symetrycznego stanu naprężenia dla ośrodka ze zmiennym wzdłuż osi  $z$  modułem sprężystości  $E = E(z)$ . Przemieszczeniowe równania Lamégo mają postać

$$(2.1) \quad (2G+\lambda) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + G' \frac{\partial u}{\partial z} + (G+\lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + G' \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

$$G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (2G+\lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (2G'+\lambda') \frac{\partial w}{\partial z} + (G+\lambda) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \lambda' \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 0,$$

gdzie  $u$  oznacza przemieszczenie w kierunku osi  $r$ ,  $w$  oznacza przemieszczenie w kierunku osi  $z$ ,  $G = G(z)$ ,  $\lambda = \lambda(z)$  są to «stałe» Lamégo wynoszące odpowiednio

$$G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad \lambda(z) = \frac{E(z)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

gdzie  $\nu$  jest stałym współczynnikiem Poissona. Kreską pionową oznaczono różniczkowanie modułów. Dla rozwiązania układu (2.1) zastosujemy transformację całkową Hankela. W tym celu równanie pierwsze pomnożymy przez  $rI_1(ar)$ , drugie przez  $rI_0(ar)$  (gdzie  $I_1$  i  $I_0$  są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju, pierwszego i zerowego rzędu) i scałkujemy względem  $r$  od 0 do  $\infty$ .

Korzystając z własności funkcji Bessela otrzymamy następujący układ równań zwyczajnych dla transformat:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} G\tilde{u}'' + G'\tilde{u}' - a^2(2G+\lambda)\tilde{u} - a(G+\lambda)\tilde{w}' - aG'\tilde{w} &= 0, \\ a(G+\lambda)\tilde{u}' + a\lambda'\tilde{u} + (2G+\lambda)\tilde{w}'' + (2G'+\lambda')\tilde{w}' - a^2G\tilde{w} &= 0, \end{aligned}$$

w którym

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a, z) &= \int_0^\infty u(r, z) r I_1(ar) dr, \\ \tilde{w}(a, z) &= \int_0^\infty w(r, z) r I_0(ar) dr \end{aligned}$$

są transformatami Hankela przemieszczeń  $u$  i  $w$ . Dla modułu sprężystości postaci (1.1) mamy  $G(z) = G_0 e^{Az}$ ,  $\lambda(z) = \lambda_0 e^{Az}$ , gdzie  $G_0, \lambda_0$  są stałymi Lamégo.

Układ (2.2) przyjmuje wtedy postać

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tilde{w}'' + A\tilde{w}' - \alpha^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \tilde{w} + \alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \tilde{u}' + \alpha \frac{\lambda_0 A}{2G_0 + \lambda_0} \tilde{u} &= 0, \\ -\alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{G_0} \tilde{w}' - \alpha A \tilde{w} + \tilde{u}'' + A\tilde{u}' - \alpha^2 \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0} \tilde{u} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając operator  $p = d/dz$  otrzymamy

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \left( p^2 + Ap - \alpha^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \tilde{w} + \left( \alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} p + \alpha \frac{\lambda_0 A}{2G_0 + \lambda_0} \right) \tilde{u} &= 0, \\ \left( -\alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{G_0} p - \alpha A \right) \tilde{w} + \left( p^2 + Ap - \alpha^2 \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0} \right) \tilde{u} &= 0. \end{aligned}$$

Oznaczając dalej operatory

$$(2.5) \quad \begin{aligned} L_{11} &= p^2 + Ap - \alpha^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0}, \\ L_{12} &= \alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} p + \alpha A \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}, \\ L_{21} &= -\alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{G_0} p - \alpha A, \\ L_{22} &= p^2 + Ap - \alpha^2 \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0} \end{aligned}$$

napiszemy układ (2.4) krótko

$$(2.6) \quad L_{11} \tilde{w} + L_{12} \tilde{u} = 0, \quad L_{21} \tilde{w} + L_{22} \tilde{u} = 0.$$

Przyjmując

$$(2.7) \quad \tilde{w} = L_{12} \varphi, \quad \tilde{u} = -L_{11} \varphi$$

spełnimy (2.6)<sub>1</sub> tożsamościowo. Podstawiając (2.7) do (2.6)<sub>2</sub> otrzymamy równanie określające funkcję  $\varphi(a, z)$ :

$$(2.8) \quad L_{21}(L_{12} \varphi) + L_{22}(-L_{11} \varphi) = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \varphi = 0.$$

Po obliczeniu wyznacznika dostaniemy

$$(2.9) \quad [p^4 + 2Ap^3 + p^2(A^2 - 2\alpha^2) - 2A\alpha^2 p + \alpha^4 + \alpha^2 A\nu_1] \varphi = 0,$$

gdzie  $\nu_1 = \nu/(1 - \nu)$ .

Równanie charakterystyczne

$$(2.10) \quad \lambda^4 + 2A\lambda^3 + (A^2 - 2\alpha^2)\lambda^2 - 2A\alpha^2\lambda + \alpha^4 + \alpha^2 A\nu_1 = 0$$

ma cztery pierwiastki zespolone

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a - \frac{A}{2} + ib, & \lambda_2 &= -a - \frac{A}{2} - ib, \\ \lambda_3 &= a - \frac{A}{2} - ib, & \lambda_4 &= -a - \frac{A}{2} + ib,\end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned}a(\alpha) &= \sqrt{\frac{\alpha^2 + \frac{A^2}{4} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + A^2 \alpha^2 \nu_1}}{2}}, \\ b(\alpha) &= \sqrt{\frac{-\alpha^2 - \frac{A^2}{4} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + A^2 \alpha^2 \nu_1}}{2}}.\end{aligned}$$

Całką ogólną równania (2.9) jest więc funkcja

$$(2.12) \quad \varphi(\alpha, z) = C_1' e^{\lambda_1 z} + C_2' e^{\lambda_2 z} + C_3' e^{\lambda_3 z} + C_4' e^{\lambda_4 z}.$$

Żądając znikania naprężeń w nieskończoności, a zatem biorąc  $\varphi(\alpha, z) \rightarrow 0$ , należy przyjąć

$$C_1' = C_3' = 0.$$

Uwzględnivszy tę wartość i przekształcając dalej (2.12) do postaci rzeczywistej otrzymamy ostatecznie

$$(2.13) \quad \varphi(\alpha, z) = e^{-\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)z} [C_2(\alpha) \cos bz + C_4(\alpha) \sin bz].$$

Transformatę przemieszczenia  $w$  wyznaczmy ze związku (2.7)<sub>1</sub>

$$\tilde{w}(\alpha, z) = \alpha \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \varphi' + \alpha A \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \varphi.$$

Po uwzględnieniu (2.13) otrzymamy

$$(2.14) \quad \begin{aligned}\tilde{w}(\alpha, z) &= \frac{\alpha}{2G_0 + \lambda_0} e^{-\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)z} \left\{ \left[ C_2 \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( \alpha + \frac{A}{2} \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_4 b (G_0 + \lambda_0) \right] \cos bz + \left[ -C_2 b (G_0 + \lambda_0) + C_4 \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left( \alpha + \frac{A}{2} \right) \right) \right] \sin bz \right\}.\end{aligned}$$

Analogicznie z (2.7)<sub>2</sub> wynikają wzory

$$(2.15) \quad \begin{aligned}\tilde{u}(\alpha, z) &= -\varphi'' - A\varphi' + \alpha^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \varphi, \\ \tilde{u}(\alpha, z) &= e^{-\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)z} \left\{ \left[ C_2 \left( -a^2 + b^2 + \frac{A^2}{4} + \alpha^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) + C_4 2ab \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos bz + \left[ -C_2 2ab + C_4 \left( -a^2 + b^2 + \frac{A^2}{4} + \alpha^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \right] \sin bz \right\}.\end{aligned}$$

Znajomość transformat przemieszczeń pozwala wyznaczyć transformaty naprężeń ze znanych związków:

$$(2.16) \quad \sigma_z = 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \theta = (2G + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \quad \tau = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right).$$

Mnożąc (2.16)<sub>1</sub> przez  $rI_0$  i całkując otrzymamy transformatę naprężenia  $\tilde{\sigma}_z$ :

$$\tilde{\sigma}_z = (2G + \lambda) \tilde{w}' + \lambda \tilde{u}',$$

co po uwzględnieniu (2.14) i (2.15) daje

$$(2.17) \quad \tilde{\sigma}_z = \alpha e^{-\left(a - \frac{A}{2}\right)z} \left\{ \left[ C_2 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( \frac{\lambda_0 - G_0}{2} A - (\lambda_0 + G_0) a \right) - b^2 G_0 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \lambda_0 \left( \frac{A^2}{4} - a^2 + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \right] + C_4 [-bG_0(A+2a)] \right] \cos bz + \right. \\ \left. + \left[ C_2 [bG_0(A+2a)] + C_4 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( \frac{\lambda_0 - G_0}{2} A - (\lambda_0 + G_0) a \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - b^2 G_0 + \lambda_0 \left( \frac{A^2}{4} - a^2 + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \right] \right] \sin bz \right\}.$$

Analogicznie mnożąc (2.16)<sub>2</sub> przez  $rI_1$  i całkując otrzymamy

$$\tilde{\tau} = G \tilde{u}' - \alpha G \tilde{w}'$$

oraz dalej

$$(2.18) \quad \tilde{\tau} = G_0 e^{-\left(a + \frac{A}{2}\right)z} \left\{ \left[ C_2 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2ab^2 - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) \right] + C_4 \left[ - 2ab \left( a + \frac{A}{2} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + b \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} ((G_0 + \lambda_0) b) \right] \right] \cos bz + \right. \\ \left. + \left[ C_2 \left[ 2ab \left( a + \frac{A}{2} \right) - b \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} (G_0 + \lambda_0) b \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + C_4 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - 2ab^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) \right] \right] \sin bz \right\}.$$

Ze związków (2.14), (2.15), (2.16) i (2.18) obliczymy przemieszczenia i naprężenia, stosując transformację odwrotną:

$$\begin{aligned}
 w(r, z) &= \int_0^{\infty} \tilde{w}(a, z) a I_0(ar) da = \\
 &= \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_0^{\infty} a^2 e^{-(a+\frac{A}{2})z} \left\{ \left[ C_2 \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + C_4 (G_0 + \lambda_0) b \right] \cos bz + \left[ -C_2 (G_0 + \lambda_0) b + C_4 \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \times \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \times \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) \right] \sin bz \right\} I_0(ar) da,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad u(r, z) &= \int_0^{\infty} \tilde{u}(a, z) a I_1(ar) da = \\
 &= \int_0^{\infty} a e^{-(a+\frac{A}{2})z} \left\{ \left[ C_2 \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) + C_4 2ab \right] \cos bz + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -C_2 2ab + C_4 \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \right] \sin bz \right\} I_1(ar) da,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z(r, z) &= \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}(a, z) a I_0(ar) da = \\
 &= G_0 \int_0^{\infty} a^2 e^{-(a+\frac{A}{2})z} \left\{ \left[ C_2 \left( a^2 - b^2 + \frac{A^2}{4} + aA + a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - C_4 b(A + 2a) \right] \cos bz + \left[ C_2 b(A + 2a) + C_4 \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left( a^2 - b^2 + \frac{A^2}{4} + aA + a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \right] \sin bz \right\} I_0(ar) da,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau(r, z) &= \int_0^{\infty} \tilde{\tau}(a, z) a I_1(ar) da = \\
 &= G_0 \int_0^{\infty} a e^{-(a+\frac{A}{2})z} \left\{ \left[ C_2 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2ab^2 - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) \right] + C_4 \left[ -2ab \left( a + \frac{A}{2} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} (G_0 + \lambda_0) b \right] \right\} \cos bz +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ C_2 \left[ 2ab \left( a + \frac{A}{2} \right) - b \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} (G_0 + \lambda_0) b \right] + C_4 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \right. \\
 & \left. \left. - 2ab^2 - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) \right] \right] \sin bz \Big] I_1(ar) da.
 \end{aligned}$$

Otrzymane wzory pozwalają na rozpatrzenie problemu brzegowego. Jako pierwszy rozważymy problem stempla.

### 3. Zagadnienie stempla

W tym przypadku warunki brzegowe są następujące (rys. 1a): dla  $z = 0$

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \tau = 0, \\
 & w = f(r) + c, \quad r < l; \\
 & \sigma_z = 0, \quad r > l.
 \end{aligned}$$

Z warunku (3.1)<sub>1</sub> po uwzględnieniu (2.19)<sub>4</sub> otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 C_2 \left[ - \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - 2ab^2 - \frac{a^2}{2G_0 + \lambda_0} \times \right. \\
 \times \left. \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) \right] + C_4 \left[ - 2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + \right. \\
 \left. + \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - a^2 \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] b = 0,
 \end{aligned}$$

skąd po przekształceniach

$$(3.2) \quad C_4 = \frac{\left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} \right) + 2ab^2 - a^2 \left( a - \frac{A}{2} \right) \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}}{b \left[ - 2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} \right) - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right]} C_2.$$

Mieszany warunek (3.1)<sub>2,3</sub> po uwzględnieniu (2.19)<sub>1</sub> i (2.19)<sub>3</sub> daje

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_0^\infty a^2 \left[ C_2 \left( \lambda_0 A + (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + C_4 (G_0 + \lambda_0) b \right] I_0(ar) da = f(r) + c, \quad r < l; \\
 & \int_0^\infty a^2 \left[ C_2 \left( a^2 - b^2 + \frac{A^2}{4} + aA + a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \right. \\
 & \left. - C_4 b (A + 2a) \right] I_0(ar) da = 0, \quad r > l.
 \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (3.2) do równania (3.3)<sub>1</sub> dostaniemy

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 \left[ C_2 \left( \lambda_0 A - (G_0 + \lambda_0) \left( a + \frac{A}{2} \right) \right) + \frac{\left( a + \frac{A}{2} \right) \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} \right) + 2ab^2 - a^2 \left( a - \frac{A}{2} \right) \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}}{-2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}} (G_0 + \lambda_0) C_2 \right] \times \\ \times I_0(\alpha r) d\alpha = (2G_0 + \lambda_0) [f(r) + c], \quad r < l.$$

Po wykonaniu prostych przekształceń znajdziemy

$$(3.4) \quad \int_0^{\infty} C_2 \alpha^2 \frac{\lambda_0 A \left[ -2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] + 2a(G_0 + \lambda_0) \left( b^2 - a^2 - \frac{A^2}{4} - aA \right)}{-2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}} I_0(\alpha r) d\alpha = \\ = (2G_0 + \lambda_0) [f(r) + c], \quad r < l.$$

Analogicznie podstawienie (3.2) do (3.3)<sub>2</sub> po przekształceniach daje

$$(3.5) \quad \int_0^{\infty} C_2 \alpha^2 \left\{ \frac{-2a \left( a + \frac{A}{2} \right) \left[ a^2 + b^2 + \frac{A^2}{4} + aA + a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] - \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} \right) \left( a^2 + b^2 + \frac{A^2}{4} + aA - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)}{-2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}} + \frac{a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \left( a^2 + b^2 - \frac{3}{4} A^2 - aA - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)}{-2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}} \right\} I_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad r > l.$$

Oznaczając dalej dla zwięzłości

$$L_1(\alpha) = \lambda_0 A \left[ -2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} + a^2 \frac{G_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] + \\ + 2a(G_0 + \lambda_0) \left( b^2 - a^2 - \frac{A^2}{4} - aA \right),$$



$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad L_2(a) = & -2a \left( a + \frac{A}{2} \right) \left( a^2 + b^2 + \frac{A^2}{4} + aA + a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) - \\
 & - \left( b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} \right) \left( a^2 + b^2 + \frac{A^2}{4} + aA - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) + \\
 & + a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \left( a^2 + b^2 - \frac{3}{4} A^2 - aA - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right), \\
 M(a) = & -2a \left( a + \frac{A}{2} \right) + b^2 - a^2 + \frac{A^2}{4} - a^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}
 \end{aligned}$$

napiszemy równanie (3.4) i (3.5) w formie krótszej:

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \int_0^\infty C_2 a^2 \frac{L_1(a)}{M(a)} I_0(ar) da = (2G_0 + \lambda_0) [f(r) + c], \quad r < l; \\
 \int_0^\infty C_2 a^2 \frac{L_2(a)}{M(a)} I_0(ar) da = 0, \quad r > l.
 \end{aligned}$$

Problem brzegowy (3.1) sprowadziliśmy więc do dualnych równań całkowych z niewiadomą funkcją  $C_2(a)$ . Równanie (3.7) przekształcimy przyjmując podstawienie

$$(3.8) \quad C_2 a^2 \frac{L_2(a)}{M(a)} = \psi(a),$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \int_0^\infty \psi(a) \frac{L_1(a)}{L_2(a)} I_0(ar) da = (2G_0 + \lambda_0) [f(r) + c], \quad r < l; \\
 \int_0^\infty \psi(a) I_0(ar) da = 0, \quad r > l.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając związki (2.11) i podstawiając  $r/l = t$ ,  $al = u$ ,  $A/2 = \eta$

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad L(u) = & \frac{2\lambda_0 \eta \left[ u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 \nu_1} + \right. \\
 & \left. + 2\eta \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 \nu_1}}{2}} + u^2 \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right]}{N(u)} + \\
 & \frac{(2G_0 + \lambda_0) \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 \nu_1}}{2}} \times}{2} \times \\
 & \times \left[ u^2 + \eta^2 + 2\eta \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 \nu_1}}{2}} \right] \\
 & + \frac{\phantom{2\lambda_0 \eta \left[ u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 \nu_1} + \right.}}{N(u)},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 N(u) = & \left[ u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1} + 2\eta \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1}}{2}} \right] \times \\
 & \times \left[ \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1} + 2\eta \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1}}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + u^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] - u^2 \left[ \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1} + \right. \\
 & \quad \left. + 2\eta \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1}}{2}} - u^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] - u^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \times \\
 & \times \left[ \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1} - 3\eta^2 - 2\eta \sqrt{\frac{u^2 + \eta^2 + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4u^2 \eta^2 v_1}}{2}} - \right. \\
 & \quad \left. - u^2 \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right]
 \end{aligned}$$

napişemy wzory (3.9) w postaci

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \int_0^{\infty} \psi(u) L(u) I_0(ut) du = (2G_0 + \lambda_0) [f(t) + c], \quad t < 1; \\
 & \int_0^{\infty} \psi(u) I_0(ut) du = 0, \quad t > 1.
 \end{aligned}$$

Jak widać z (3.10) funkcja  $L(u)$  ma bardzo złoŹoną postać, utrudniając tym samym efektywne rozwiązanie dualnych równań (3.11). Przyjmijmy dla uproszczenia założenie o «małej» niejednorodności ośrodką. Niech więc  $\eta$  będzie małym parametrem, (i niech  $\eta^2 \approx 0$ ). Funkcja  $L(u)$  wyrazi się wtedy prostym związkim

$$(3.12) \quad L(u) \approx \frac{(2G_0 + \lambda_0)^3}{4(G_0 + \lambda_0)^2} \cdot \frac{1}{u} \frac{u + 2\eta \frac{\lambda_0(5G_0 + 3\lambda_0) + (2G_0 + \lambda_0)^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2}}{u + 2\eta \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0}},$$

a równania (3.11) przyjmą postać

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & \int_0^{\infty} \frac{1}{u} \cdot \frac{u + 2\eta A}{u + 2\eta \Omega} \psi(u) I_0(ut) du = F(t), \quad t < 1; \\
 & \int_0^{\infty} \psi(u) I_0(ut) du = 0, \quad t > 1,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14) \quad A = \frac{\lambda_0 (5G_0 + 3\lambda_0) + (2G_0 + \lambda_0)^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2}, \quad \Omega = \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0},$$

$$F(t) = 4 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [f(t) + c].$$

Mamy dalej

$$\frac{u + 2\eta A}{u + 2\eta \Omega} = 1 + 2\eta \frac{A - \Omega}{u + 2\eta \Omega} = 1 + H(u),$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(3.15) \quad H(u) = 2\eta \frac{A - \Omega}{u + 2\eta \Omega}.$$

Równania (3.13) napiszemy więc ostatecznie w formie następującej:

$$(3.16) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{u} [1 + H(u)] \psi(u) I_0(ut) du = F(t), \quad t < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \psi(u) I_0(ut) du = 0, \quad t > 1.$$

Do ich rozwiązania użyjemy metody Uflanda—Lebiedjewa [4] szukając funkcji  $\psi(u)$  w postaci

$$(3.17) \quad \psi(u) = u \int_0^1 g(\xi) \cos \xi u d\xi.$$

Podstawiając (3.17) do (3.16)<sub>2</sub> otrzymujemy

$$(3.18) \quad \int_0^{\infty} u \int_0^1 g(\xi) \cos \xi u I_0(ut) du d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[ g(1) \sin u - \int_0^1 g'(\xi) \sin \xi u d\xi \right] I_0(ut) du =$$

$$= g(1) \int_0^{\infty} \sin u I_0(ut) du - \int_0^1 g'(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \sin \xi u I_0(ut) du.$$

Wykorzystując własność całki Webera-Schafheitlina

$$(3.19) \quad \int_0^{\infty} \sin \xi u I_0(ut) du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - t^2}}, & \text{jeśli } \xi > t; \\ 0, & \text{jeśli } \xi < t \end{cases}$$

stwierdzamy, że dla  $t > 1$  obydwie całki w (3.18) znikają i równanie (3.16)<sub>2</sub> spełnione jest tożsamościowo.

Podstawienie (3.17) do równania (3.16)<sub>1</sub> daje

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad & \int_0^{\infty} [1+H(u)] \int_0^1 g(\xi) \cos \xi u I_0(ut) d\xi du = \\
 & = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^1 g(\xi) \cos \xi u d\xi \right] I_0(ut) du + \int_0^{\infty} H(u) \left[ \int_0^1 g(\xi) \cos \xi u d\xi \right] I_0(ut) du = \\
 & = \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \cos \xi u I_0(ut) du + \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} H(u) \cos \xi u I_0(ut) du = F(t).
 \end{aligned}$$

Z uwzględnienia wartości całki

$$(3.21) \quad \int_0^{\infty} \cos \xi u I_0(ut) du = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \xi > t, \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - \xi^2}}, & \text{jeśli } \xi < t, \end{cases}$$

otrzymujemy

$$(3.22) \quad \int_0^t \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} H(u) \cos \xi u I_0(ut) du = F(t).$$

Korzystając z całkowego przedstawienia funkcji Bessela

$$I_0(ut) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(ut \sin \theta) d\theta$$

dostajemy

$$\int_0^t \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^{\infty} H(u) \cos \xi u \cos(ut \sin \theta) du \right] d\theta = F(t).$$

Przekształcając iloczyn cosinusów na sumę i przyjmując w pierwszej całce  $\xi = t \sin \theta$  znajdziemy

$$\int_0^{\pi/2} g(t \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} H(u) [\cos u(\xi + t \sin \theta) + \cos u(\xi - t \sin \theta)] du = F(t)$$

oraz

$$(3.23) \quad \int_0^{\pi/2} \left[ g(t \sin \theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} H(u) [\cos u(\xi + t \sin \theta) + \cos u(\xi - t \sin \theta)] du \right] d\theta = F(t).$$

Niech

$$(3.24) \quad \Phi(t \sin \theta) = g(t \sin \theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 g(\xi) [\tilde{H}(\xi + t \sin \theta) + \tilde{H}(\xi - t \sin \theta)] d\xi,$$

gdzie

$$(3.25) \quad \tilde{H}(x) = \int_0^{\infty} H(u) \cos ux \, du$$

jest kosinusową transformatą Fouriera funkcji  $H(u)$ . Mamy wtedy z (3.23) równanie

$$(3.26) \quad \int_0^{\pi/2} \Phi(t \sin \theta) \, d\theta = F(t).$$

Jest to równanie całkowe Schlömilcha, którego rozwiązanie ma postać [4]

$$(3.27) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\pi} \left[ F(0) + x \int_0^{\pi/2} F'(x \sin \theta) \, d\theta \right].$$

Z (3.24) wynika więc równanie Fredholma drugiego rodzaju

$$g(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 g(\xi) [\tilde{H}(\xi+t) + \tilde{H}(\xi-t)] \, d\xi = \frac{2}{\pi} \left[ F(0) + t \int_0^{\pi/2} F'(t \sin \theta) \, d\theta \right],$$

które możemy napisać krótko

$$(3.28) \quad g(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 g(\xi) K(\xi, t) \, d\xi = h(t),$$

gdzie

$$(3.29) \quad \begin{aligned} K(\xi, t) &= \tilde{H}(\xi+t) + \tilde{H}(\xi-t), \\ h(t) &= \frac{2}{\pi} \left[ F(0) + t \int_0^{\pi/2} F'(t \sin \theta) \, d\theta \right]. \end{aligned}$$

Jądro  $K(\xi, t)$  można wyznaczyć efektywnie. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) &= \int_0^{\infty} 2\eta \frac{A - \Omega}{u + 2\eta\Omega} \cos ux \, du = 2\eta (A - \Omega) \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u + 2\eta\Omega} \, du = \\ &= -2\eta (A - \Omega) (\sin x 2\eta\Omega \cdot \text{si } x 2\eta\Omega + \cos x 2\eta\Omega \cdot \text{ci } x 2\eta\Omega). \end{aligned}$$

Tutaj funkcje  $\text{si}$  i  $\text{ci}$  są sinusem i cosinusem całkowym. Dla małego  $\eta$  można je przedstawić za pomocą wzoru

$$\text{si } x 2\eta\Omega \approx -\frac{\pi}{2} + 2\eta\Omega x, \quad \text{ci } x 2\eta\Omega \approx C + \ln 2\eta\Omega x,$$

gdzie  $C = 0,577216$  jest stałą Eulera.

Ponadto dla małych wartości  $\eta$  możemy też przyjąć

$$\sin 2\eta\Omega x \approx 2\eta\Omega x, \quad \cos 2\eta\Omega x \approx 1,$$

skąd

$$\tilde{H}(x) \approx -2\eta(\Lambda - \Omega) \left[ 2\eta\Omega x \left( -\frac{\pi}{2} + 2\eta\Omega x \right) + (C + \ln 2\eta\Omega x) \right].$$

Zaniedbując wyższe potęgi  $\eta$  znajdziemy w końcu

$$(3.30) \quad \tilde{H}(x) \approx -2\eta(\Lambda - \Omega)(C + \ln 2\eta\Omega + \ln x).$$

Stąd na podstawie (3.29)<sub>1</sub> otrzymamy

$$(3.31) \quad K(\xi, t) \approx -4\eta(\Lambda - \Omega)(C + \ln 2\eta\Omega) - 2\eta(\Lambda - \Omega)[\ln|\xi+t| + \ln|\xi-t|].$$

Równanie (3.28) przybiera więc formę

$$g(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 g(\xi) [-4\eta(\Lambda - \Omega)(C + \ln 2\eta\Omega) - 2\eta(\Lambda - \Omega) \ln|\xi^2 - t^2|] d\xi = h(t)$$

a dalej po przekształceniu formę

$$(3.32) \quad g(t) - \varepsilon \int_0^1 g(\xi) \ln|\xi^2 - t^2| d\xi = k(t).$$

Tutaj dla zwięzłości wprowadzono oznaczenie

$$(3.33) \quad \varepsilon = \eta \frac{\Lambda - \Omega}{\pi},$$

$$k(t) = h(t) + \frac{2\eta}{\pi}(\Lambda - \Omega)(C + \ln 2\eta\Omega) B,$$

$$B = \int_0^1 g(\xi) d\xi.$$

Dualne równania (3.16) sprowadziliśmy więc do jednego równania Fredholma drugiego rodzaju z jądrem logarytmicznym. Równanie to można rozwiązać przez jądro iterowane.

Dla jądra ze słabą osobliwością typu ([1])

$$K(\xi, t) = \frac{A(\xi, t)}{|\xi - t|^\alpha}, \quad |A(\xi, t)| \leq M = \text{const}, \quad 0 < \alpha < 1$$

proces iteracji jest zbieżny, gdy

$$|\varepsilon| < \frac{1 - \alpha}{2^\alpha M}.$$

W naszym wypadku mamy

$$\ln|\xi^2 - t^2| \leq \frac{1}{|\xi - t|^{1/2}},$$

rozwiązanie istnieje więc dla

$$\varepsilon < \frac{1 - \frac{1}{2}}{2^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,355.$$

Dla małych wartości  $\eta$  (co założyliśmy) warunek ten będzie praktycznie spełniony. Np. dla  $\nu = 0,25$  znajdziemy z (3.14)<sub>1,2</sub>  $A - \Omega = 0,39$ , skąd  $\varepsilon = 0,124\eta$ . Dla  $\eta = 0,01$  (odpowiada to np. wartości  $A = 0,01 \text{ m}^{-1}$  dla  $l = 2\text{m}$ )  $\varepsilon = 0,00124 < 0,355$ . Rozwiązanie równania (3.32) ma więc postać

$$(3.34) \quad g(t) = k(t) + \varepsilon \int_0^1 k(\xi) \ln |\xi^2 - t^2| d\xi + \\ + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^1 k(z) \ln |z^2 - \xi^2| \ln |\xi^2 - t^2| dz d\xi + \dots$$

Mając  $g(t)$  wyznaczmy funkcję  $\psi(u)$  z (3.17), a stąd naprężenie po wykorzystaniu (3.8) i (3.2). W szczególności naprężenia kontaktowe wyznaczmy łatwo, wychodząc ze wzoru

$$\sigma_z(r, 0) = G_0 \int_0^\infty a^2 C_2 \frac{L_2}{M} I_0(ar) da = \frac{G_0}{l} \int_0^\infty \psi(u) I_0(ut) du = \\ = \frac{G_0}{l} \int_0^\infty \left[ u \int_0^1 g(\xi) \cos \xi u d\xi \right] I_0(ut) du = \\ = \frac{G_0}{l} \int_0^\infty \left[ g(1) \sin u - \int_0^1 g'(\xi) \sin \xi u d\xi \right] I_0(ut) du = \\ = \frac{G_0}{l} \left[ g(1) \int_0^\infty \sin u I_0(ut) du - \int_0^1 g'(\xi) d\xi \int_0^\infty \sin \xi u I_0(ut) du \right].$$

Dla  $t < 1$  otrzymujemy stąd po uwzględnieniu (3.19) naprężenie pod stemplem:

$$(3.35) \quad p(t) = \frac{G_0}{l} \left[ \frac{g(1)}{\sqrt{1-t^2}} - \int_t^1 \frac{g'(\xi)}{\sqrt{\xi^2-t^2}} d\xi \right].$$

Jak widać, do ich obliczenia potrzebne są wielkości  $g(1)$  i  $g'(\xi)$ . W tym celu należy efektywnie wyznaczyć funkcję  $g(\xi)$  z (3.34). Na podstawie (3.14)<sub>3</sub>, (3.29)<sub>2</sub>, (3.33)<sub>2,3</sub> znajdziemy

$$w(t) = f(t) + c,$$

$$F(t) = 4 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [f(t) + c], \quad F'(t) = 4 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 f'(t),$$

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{2}{\pi} \left[ F(0) + t \int_0^{\pi/2} F'(t \sin \theta) d\theta \right] = \\
 &= \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ f(0) + c + t \int_0^{\pi/2} f'(t \sin \theta) d\theta \right] = \\
 &= \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [f(0) + c + D(t)],
 \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 D(t) &= t \int_0^{\pi/2} f'(t \sin \theta) d\theta, \\
 k(t) &= h(t) + \frac{2\eta}{\pi} (\Delta - \Omega) (C + \ln 2\eta\Omega) B = \Delta + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 D(t), \\
 \Delta &= \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [f(0) + c] + \frac{2\eta}{\pi} (\Delta - \Omega) (C + \ln 2\eta\Omega) B.
 \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wielkości do (3.34) dostaniemy

$$\begin{aligned}
 g(t) &= k(t) + \varepsilon \int_0^1 k(\xi) \ln |\xi^2 - t^2| d\xi + \dots = \\
 &= \Delta + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 D(t) + \varepsilon \int_0^1 \left[ \Delta + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 D(\xi) \right] \ln |\xi^2 - t^2| d\xi.
 \end{aligned}$$

Po przekształceniach i obliczeniu całki otrzymujemy następujący wzór:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad g(t) &= \Delta \{1 + \varepsilon [(1-t) \ln(1-t) + (1+t) \ln(1+t) - 2]\} + \\
 &\quad + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D(t) + \varepsilon E(t)],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$E(t) = \int_0^1 D(\xi) \ln |\xi^2 - t^2| d\xi.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \Delta \varepsilon \ln \frac{1+t}{1-t} + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D'(t) + \varepsilon E'(t)], \\
 g(1) &= \Delta [1 + \varepsilon (2 \ln 2 - 2)] + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D(1) + \varepsilon E(1)].
 \end{aligned}$$



Na podstawie wzoru (3.35) mamy więc

$$p(t) = \frac{G_0}{l} \left\{ \frac{\Delta [1 + \varepsilon(2 \ln 2 - 2)] + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D(1) + \varepsilon E(1)]}{\sqrt{1 - t^2}} - \int_t^1 \frac{\Delta \varepsilon \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D'(\xi) + \varepsilon E'(\xi)]}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi \right\}.$$

Występującą pod całką funkcję logarymiczną rozwijamy w szereg:

$$\ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - 1} \xi^{2n-1} \approx 2 \left( \xi + \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{1}{5} \xi^5 \right)$$

otrzymując po obliczeniu prostych całek

$$(3.37) \quad p(t) = \frac{G_0}{l} \left\{ \frac{\Delta [1 + \varepsilon(2 \ln 2 - 2)] + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D(1) + \varepsilon E(1)]}{\sqrt{1 - t^2}} - \Delta \varepsilon \sqrt{1 - t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1 - t^2) + \frac{16}{75} (1 - t^2)^2 \right] - \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 M(t) \right\},$$

gdzie

$$M(t) = \int_t^1 \frac{D'(\xi) + \varepsilon E'(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi.$$

Dla wyznaczenia związku pomiędzy przemieszczeniem stempla a siłą  $P$  całkujemy (3.37) względem  $t$  w granicach od 0 do 1 otrzymując

$$\frac{P}{2l} = \frac{G_0}{l} \left\{ \left[ \Delta [1 + \varepsilon(2 \ln 2 - 2)] + \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 [D(1) + \varepsilon E(1)] \right] \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} - \Delta \varepsilon \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1 - t^2) + \frac{16}{75} (1 - t^2)^2 \right] dt - \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \int_0^1 M(t) dt \right\}.$$

Po obliczeniu występujących całek i prostych przekształceniach dostaniemy

$$\frac{P}{2l} = \frac{G_0 \Delta \pi}{2l} \left[ 1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right) \right] + \frac{4G_0}{l} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ D(1) + \varepsilon E(1) - \frac{2}{\pi} N \right],$$

gdzie

$$N = \int_0^1 M(t) dt.$$

Stąd znajdziemy

$$\frac{G_0 \Delta}{l} = \frac{\frac{P}{l} - \frac{8G_0}{l} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ D(1) + \varepsilon E(1) - \frac{2}{\pi} N \right]}{\pi \left[ 1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right) \right]}$$

Podstawiając tę wartość do (3.37) otrzymamy

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{G_0 \Delta}{l} \left\{ \frac{1 + \varepsilon (2 \ln 2 - 2)}{\sqrt{1 - t^2}} - \varepsilon \sqrt{1 - t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1 - t^2) + \frac{16}{75} (1 - t^2)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{G_0}{l} \frac{8}{\pi} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ \frac{D(1) + \varepsilon E(1)}{\sqrt{1 - t^2}} - M(t) \right] = \\ &= \frac{P - 8G_0 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ D(1) + \varepsilon E(1) - \frac{2}{\pi} N \right]}{\pi l \left[ 1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right) \right]} \left\{ \frac{1 + \varepsilon (2 \ln 2 - 2)}{\sqrt{1 - t^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \sqrt{1 - t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1 - t^2) + \frac{16}{75} (1 - t^2)^2 \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{8G_0}{\pi l} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ \frac{D(1) + \varepsilon E(1)}{\sqrt{1 - t^2}} - M(t) \right]. \end{aligned}$$

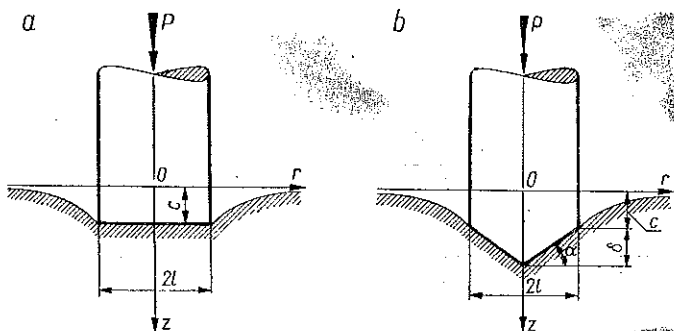
Po dalszych przekształceniach napiszemy naprężenia kontaktowe w postaci następującej:

$$\begin{aligned} (3.38) \quad p(t) &= \frac{P \left[ 1 + \frac{\frac{111}{90} \varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \right] - 8G_0 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \times \\ &\quad \times \left\{ D(1) \frac{\frac{111}{90} \varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} - \frac{2}{\pi} N \left[ 1 + \frac{\frac{111}{90} \varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \right] \right\}}{\pi l \sqrt{1 - t^2}} - \\ &\quad - \frac{8G_0}{\pi l} \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 M(t) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \frac{P - 8G_0 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ D(1) - \frac{2}{\pi} N + \varepsilon E(1) \right]}{\pi l} \times \\ &\quad \times \sqrt{1 - t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1 - t^2) + \frac{16}{75} (1 - t^2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Dla ułatwienia przytaczamy krótkie zestawienie wielkości występujących w tym wzorze:

$$(3.39) \quad \begin{aligned} D(t) &= t \int_0^{\pi/2} f'(t \sin \theta) d\theta, & E(t) &= \int_0^1 D(\xi) \ln |\xi^2 - t^2| d\xi, \\ M(t) &= \int_t^1 \frac{D'(\xi) + \varepsilon E'(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi, & N &= \int_0^1 M(t) dt. \end{aligned}$$

Wzór (3.38) pozwala wyznaczyć naprężenia pod stępem dowolnego kształtu.



Rys. 2

Dla przykładu rozpatrzmy stempel płaski i stożkowy (rys. 2).

a. Stempel płaski.

W tym wypadku mamy:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, & D(t) &= 0, & E(t) &= E'(t) = E(1) = 0, \\ f'(t) &= 0, & D(1) &= 0, & M(t) &= 0, & N &= 0. \end{aligned}$$

Naprężenie kontaktowe wynosi więc

$$(3.40) \quad p(t) = \frac{P}{\pi l} \left\{ \frac{1 + \frac{111}{90} \varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 - t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1 - t^2) + \frac{16}{75} (1 - t^2)^2 \right] \right\}.$$

b. Stempel stożkowy. Kształt stempla określa funkcja  $f(r) = \delta - ar$ ,  $a = \operatorname{tg} \alpha$ ; stąd

$$f(t) = \delta - alt, \quad D(t) = -alt \frac{\pi}{2}, \quad D(1) = -\frac{al\pi}{2},$$

$$f'(t) = -al, \quad D'(t) = -\frac{al\pi}{2},$$

$$E(t) = \int_0^1 -\frac{al\pi}{2} \xi \ln |\xi^2 - t^2| d\xi = -\frac{al\pi}{4} [t^2 \ln t^2 + (1-t^2) \ln(1-t^2) - 1],$$

$$E'(t) = -al \frac{\pi}{2} t \ln \frac{t^2}{1-t^2}, \quad E(1) = \frac{al\pi}{4},$$

$$M(t) = \int_t^1 \frac{1 - al \frac{\pi}{2} + \varepsilon \left( -al \frac{\pi}{2} \xi \ln \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \right)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi =$$

$$= -\frac{al\pi}{2} \left\{ -\ln \frac{2t}{1+t} + \varepsilon \left[ 4t \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \sqrt{1-t^2} \ln(1-t^2) \right] \right\},$$

$$N = \int_0^1 \frac{al\pi}{2} \ln \frac{2t}{1+t} dt - \frac{al\pi}{2} \varepsilon \int_0^1 \left[ 4t \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \sqrt{1-t^2} \ln |1-t^2| \right] dt = -\frac{al\pi}{2} \left[ \ln 2 + \varepsilon \left( \frac{37}{64} \pi - \frac{11}{15} \right) \right].$$

Napężenie pod stemplem wynosi

$$(3.41) \quad p(t) = \frac{P \left[ 1 + \frac{\frac{111}{90} \varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \right] + 4alG_0 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left\{ \pi - 2 \ln 2 - \varepsilon \left( \frac{53}{32} \pi - \frac{22}{15} \right) \right\} \left[ 1 + \frac{\frac{111}{90} \varepsilon}{1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right)} \right] - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \pi}{\pi l \sqrt{1-t^2}} \times$$

$$\frac{\varepsilon \left[ P + 4alG_0 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left[ \pi - 2 \ln 2 - \varepsilon \left( \frac{53}{12} \pi - \frac{22}{15} \right) \right] \right]}{\pi l \left[ 1 + \varepsilon \left( 2 \ln 2 - \frac{291}{90} \right) \right]} \times$$

$$\times \sqrt{1-t^2} \left[ \frac{46}{15} - \frac{132}{135} (1-t^2) + \frac{16}{75} (1-t^2)^2 \right] +$$

$$+ 4aG_0 \left( \frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left\{ -\ln \frac{2t}{1+t} + \varepsilon \left[ 4t \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \sqrt{1-t^2} \ln(1-t^2) \right] \right\}.$$

Jak widać z powyższych wzorów dla  $\eta = 0, \varepsilon = 0$ ; otrzymujemy więc rozwiązanie jak dla ośrodka jednorodnego. Podobnie z (3.41) dla  $a = 0$  otrzymujemy wzór (3.40).

Dla liczbowych danych:  $A = 0,01$ ;  $l = 10$  m;  $\nu = 0,25$  znajdziemy

$$\eta = \frac{Al}{2} = \frac{0,01 \cdot 10}{2} = 0,05,$$

$$A - \Omega = \frac{\lambda_0 (5G_0 + 3\lambda_0) + (2G_0 + \lambda_0)^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} - \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} = \frac{\nu \left( \frac{5}{2} - 2\nu \right)}{(1 - \nu)^2} +$$

$$+ 1 - 2(1 - \nu) = 0,39,$$

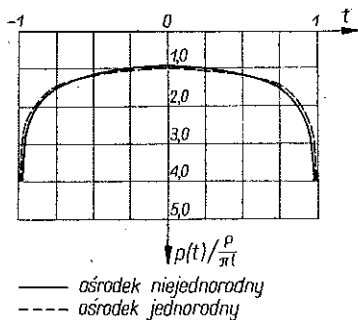
$$\varepsilon = \frac{\eta (A - \Omega)}{\pi} = \frac{0,05 \cdot 0,39}{\pi} = 0,00621.$$

Dla tych wartości wykres naprężeń kontaktowych w przypadku stempla płaskiego [wg (3.40)] przedstawiono na rys. 3. Jak widać, różnica w stosunku do naprężeń w ośrodku jednorodnym jest tutaj nieznaczna.

#### 4. Zagadnienie dla szczeliny

Rozpatrzmy obecnie zadanie z warunkami brzegowymi przedstawionymi na rys. 1b, tzn. dla  $z = 0$  mamy

$$\begin{aligned} \tau &= 0, \\ (4.1) \quad \sigma_z &= -p(r), \quad \text{jeśli } r < l; \\ w &= 0, \quad \text{jeśli } r > l. \end{aligned}$$



Rys. 3

Są to warunki typowe dla szczelin. W dalszym ciągu problemem samej szczeliny zajmować się jednak nie będziemy, poprzestając na krótkiej wzmiance, iż z uwagi na ten charakter warunków brzegowych określimy omawiane zadanie, jako «zagadnienie dla szczeliny». Jak już we wstępie wspomniano, zagadnienie tego rodzaju może mieć pewne znaczenie w mechanice górotworu.

Przystępując do rozwiązania problemu widzimy, że pierwszy z warunków (4.1) jest identyczny z odpowiednim warunkiem dla stempla (3.1)<sub>1</sub>. Stąd zachowując poprzednie oznaczenia i związki otrzymujemy dla mieszanego warunku (4.1)<sub>2,3</sub> wzory:

$$(4.2) \quad \int_0^\infty C_2 a^2 \frac{I_2^{(\omega)}}{M^{(\omega)}} I_0(ar) da = -\frac{p(r)}{G_0}, \quad r < l;$$

$$\int_0^\infty C_2 a^2 \frac{I_1^{(\omega)}}{M^{(\omega)}} I_0(ar) da = 0, \quad r > l.$$

Podstawiając

$$(4.3) \quad C_2 a^2 \frac{L_1^{(\alpha)}}{M^{(\omega)}} = \psi(a)$$

otrzymamy

$$\int_0^{\infty} \psi(a) \frac{L_2^{(\alpha)}}{L_1^{(\omega)}} I_0(ar) da = -\frac{p(r)}{G_0}, \quad r < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \psi(a) I_0(ar) da = 0, \quad r > 1$$

a po zamianie zmiennych otrzymamy

$$(4.4) \quad \int_0^{\infty} \psi(u) \frac{1}{L(u)} I_0(ut) du = -\frac{p(t) l^2}{G_0}, \quad t < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \psi(u) I_0(ut) du = 0, \quad t > 1,$$

gdzie funkcja  $L(u)$  określona jest za pomocą wzoru (3.10). Dla małych wartości  $\eta$  mamy [z (3.12)]

$$\frac{1}{L(u)} \approx \frac{4(G_0 + \lambda_0)^2}{(2G_0 + \lambda_0)^3} u \frac{u + 2\eta\Omega}{u + 2\eta\Lambda}.$$

Równania (4.4) przyjmą więc postać

$$(4.5) \quad \int_0^{\infty} u \frac{u + 2\eta\Omega}{u + 2\eta\Lambda} \psi(u) I_0(ut) du = F(t), \quad t < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \psi(u) I_0(ut) du = 0, \quad t > 1,$$

gdzie

$$(4.6) \quad F(t) = -\frac{(2G_0 + \lambda_0)^3}{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2} p(t) l^2.$$

Wykonując dzielenie wielomianów w funkcji podcałkowej pierwszego równania i korzystając z oznaczenia

$$(4.7) \quad G(u) = 2\eta \frac{\Omega - \Lambda}{u + 2\eta\Lambda}$$

napiszemy dualne równania (4.5) w formie

$$(4.8) \quad \int_0^{\infty} u [1+G(u)] \psi(u) I_0(ut) du = F(t), \quad t < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \psi(u) I_0(ut) du = 0, \quad t > 1.$$

Rozwiązania szukać będziemy w postaci

$$(4.9) \quad \psi(u) = \int_0^1 g(\xi) \sin \xi u d\xi, \quad g(0) = 0.$$

Przy takim podstawieniu i uwzględnieniu związku (3.19) spełnimy natychmiast, jak łatwo sprawdzić, równanie (4.8)<sub>2</sub>. Podstawiając (4.9) do lewej strony równania (4.8)<sub>1</sub> otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u [1+G(u)] \left[ \int_0^1 g(\xi) \sin \xi u d\xi \right] I_0(ut) du &= \int_0^{\infty} u \left[ \int_0^1 g(\xi) \sin \xi u d\xi \right] \times \\ &\times I_0(ut) du + \int_0^{\infty} uG(u) \left[ \int_0^1 g(\xi) \sin \xi u d\xi \right] \int_0^1 I_0(ut) du = \\ &= \int_0^{\infty} u \left\{ \left[ -\frac{\cos \xi u}{u} g(\xi) \right]_0^1 + \frac{1}{u} \int_0^1 g'(\xi) \cos \xi u d\xi \right\} I_0(ut) du + \\ &+ \int_0^1 g(\xi) \int_0^{\infty} uG(u) \sin \xi u I_0(ut) du = \int_0^{\infty} \left[ -g(1) \cos u + \right. \\ &+ \left. \int_0^1 g'(\xi) \cos \xi u d\xi \right] I_0(ut) du + \int_0^1 g(\xi) \int_0^{\infty} uG(u) \sin \xi u I_0(ut) du = \\ &= -g(1) \int_0^{\infty} \cos u I_0(ut) du + \int_0^1 g'(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \cos \xi u I_0(ut) du + \\ &+ \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} uG(u) \sin \xi u I_0(ut) du. \end{aligned}$$

Korzystając z wartości całki (3.21) otrzymamy równanie

$$(4.10) \quad \frac{g'(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^{\infty} uG(u) \sin \xi u I_0(ut) du = F(t), \quad t < 1.$$

W drugiej całce przekształcimy następujące funkcje:

$$\begin{aligned} uG(u) &= u2\eta \frac{\Omega - \Lambda}{u+2\eta\Lambda} = 2\eta(\Omega - \Lambda) \frac{u}{u+2\eta\Lambda} = \\ &= 2\eta(\Omega - \Lambda) \left( 1 - \frac{2\eta\Lambda}{u+2\eta\Lambda} \right) = 2\eta(\Omega - \Lambda) - 4\eta^2\Lambda(\Omega - \Lambda) \frac{1}{u+2\eta\Lambda}. \end{aligned}$$

Pomijając drugi wyraz ( $\eta^2 \approx 0$ ) otrzymamy

$$(4.11) \quad uG(u) \approx 2\eta(\Omega - \Lambda).$$

Równanie (4.10) przyjmie postać

$$\int_0^t \frac{g'(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + 2\eta(\Omega - \Lambda) \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^\infty \sin \xi u I_0(ut) du = F(t).$$

Po uwzględnieniu (3.19) znajdziemy

$$(4.12) \quad \int_0^t \frac{g'(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + 2\eta(\Omega - \Lambda) \int_t^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi = F(t).$$

Jest to równanie różniczkowo-całkowe Volterra pierwszego rodzaju z jądrem słabo-osobliwym. Mnożąc je obustronnie przez  $t/\sqrt{\lambda^2 - t^2}$  i całkując względem  $t$  w granicach od 0 do  $\lambda$  otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt \int_0^t \frac{g'(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + 2\eta(\Omega - \Lambda) \int_0^\lambda \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} \times \\ \times dt \int_t^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi = \int_0^\lambda \frac{F(t) t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt. \end{aligned}$$

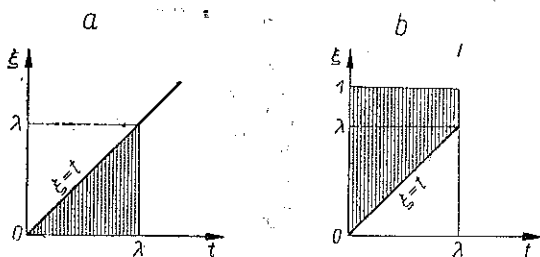
Dokonując zmiany kolejności całkowania, którego obszar przedstawia rys. 4a, dla całki pierwszej i 4b dla całki drugiej dostajemy

$$\begin{aligned} (4.13) \quad \int_0^\lambda g'(\xi) d\xi \int_\xi^\lambda \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2} \sqrt{t^2 - \xi^2}} dt + 2\eta(\Omega - \Lambda) \times \\ \times \left[ \int_0^\lambda g(\xi) d\xi \int_0^\xi \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2} \sqrt{\xi^2 - t^2}} dt + \int_\lambda^1 g(\xi) d\xi \int_0^\lambda \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2} \sqrt{\xi^2 - t^2}} dt \right] = \\ = \int_0^\lambda \frac{tF(t)}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt. \end{aligned}$$



Po obliczeniu elementarnych całek wewnętrznych lewej strony otrzymamy

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\lambda g'(\xi) d\xi + 2\eta(\Omega - A) \left[ \int_0^\lambda g(\xi) \left( -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| \right) d\xi + \right. \\ \left. + \int_\lambda^1 g(\xi) \left( -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| \right) d\xi \right] \int_0^\lambda \frac{tF(t)}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt,$$



Rys. 4

a stąd po przekształceniach i uwzględnieniu wartości  $g(0) = 0$

$$g(\lambda) - \frac{2\eta(\Omega - A)}{\pi} \int_0^1 g(\xi) \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \frac{tF(t)}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt.$$

Podstawiając

$$(4.14) \quad \varepsilon = \frac{2\eta(\Omega - A)}{\pi}, \quad h(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\lambda \frac{tF(t)}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt$$

mamy ostatecznie

$$(4.15) \quad g(\lambda) - \varepsilon \int_0^1 g(\xi) \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| d\xi = h(\lambda).$$

Jest to równanie Fredholma drugiego rodzaju z jądrem logarytmicznym. Podobnie jak w przypadku (3.32) można je rozwiązać za pomocą jąder iterowanych:

$$(4.16) \quad g(\lambda) = h(\lambda) + \varepsilon \int_0^1 h(\xi) \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| d\xi + \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^1 h(z) \ln \left| \frac{z - \xi}{z + \xi} \right| \times \\ \times \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| d\xi dz + \dots$$

Mając  $g(\lambda)$  możemy wyznaczyć interesujące nas wielkości naprężeń i przemieszczeń.

Dla  $z = 0$  i  $t > 1$  naprężenia normalne wyznaczmy ze wzoru

$$\begin{aligned} \sigma_z(t) &= \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2}{l^2(2G_0 + \lambda_0)^3} \int_0^\infty u [1 + G(u)] \psi(u) I_0(ut) du = \\ &= \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2}{l^2(2G_0 + \lambda_0)^3} \left[ -g(1) \int_0^\infty \cos u I_0(ut) du + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 g'(\xi) d\xi \int_0^\infty \cos \xi u I_0(ut) du + \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^\infty u G(u) \sin \xi u I_0(ut) du \right]. \end{aligned}$$

Korzystając z (3.21) znajdziemy

$$\begin{aligned} \sigma_z(t) &= \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2}{l^2(2G_0 + \lambda_0)^3} \left[ -g(1) \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{g'(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^\infty u G(u) \sin \xi u I_0(ut) du \right], \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu (4.11)

$$(4.17) \quad \sigma_z(t) = \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2}{l^2(2G_0 + \lambda_0)^3} \left[ \frac{-g(1)}{\sqrt{t^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{g'(\xi)}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi \right], \quad t > 1.$$

Przemieszczenia pionowe dla  $t < 1$  obliczymy ze wzoru

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_0^\infty \psi(u) I_0(ut) du = \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_0^\infty \left[ \int_0^1 g(\xi) \sin \xi u d\xi \right] I_0(ut) du = \\ &= \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_0^1 g(\xi) d\xi \int_0^\infty \sin \xi u I_0(ut) du, \end{aligned}$$

który po zastosowaniu wyrażenia (3.19) przybierze postać następującą:

$$(4.18) \quad w(t) = \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_t^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi, \quad t < 1.$$

Związki (4.16), (4.17) i (4.18) stanowią efektywne rozwiązanie problemu.

Dla  $p(r) = p = \text{const}$  mamy

$$F(t) = -\frac{(2G_0 + \lambda_0)^3}{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2} pl^2,$$

$$h(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \frac{(2G_0 + \lambda_0)^3}{4G_0(G_0 + \lambda_0)^2} pl^2 \int_0^\lambda \frac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} dt = -\frac{(2G_0 + \lambda_0)^3}{G_0(G_0 + \lambda_0)^2} \frac{pl^2}{2\pi} \lambda = \Delta\lambda,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\Delta = - \frac{(2G_0 + \lambda_0)^3}{G_0 (G_0 + \lambda_0)^2} \frac{pl^2}{2\pi}.$$

Z (4.16) mamy

$$g(\lambda) = \Delta\lambda + \varepsilon \int_0^1 \Delta\xi \ln \left| \frac{\lambda - \xi}{\lambda + \xi} \right| d\xi + \dots$$

Po obliczeniu całki znajdziemy

$$(4.19) \quad g(\lambda) = \Delta\lambda - \varepsilon\Delta \left[ \lambda - \frac{1 - \lambda^2}{2} \ln(1 + \lambda) \right].$$

Stąd

$$g(1) = \Delta(1 - \varepsilon),$$

$$g'(\lambda) = \Delta - \varepsilon\Delta \left[ \frac{3}{2} - \frac{\lambda}{2} + \lambda \ln(1 + \lambda) \right].$$

Naprężenie wg (4.17) wynosi

$$\sigma_z(t) = \frac{4G_0 (G_0 + \lambda_0)^2}{l^2 (2G_0 + \lambda_0)^3} \left[ \frac{-\Delta(1 - \varepsilon)}{\sqrt{t^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\Delta - \varepsilon\Delta \left[ \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} + \xi \ln(1 + \xi) \right]}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} d\xi \right].$$

Po obliczeniu całki, przekształceniach i uwzględnieniu wartości  $\Delta$  otrzymamy ostatecznie

$$(4.20) \quad \sigma_z(t) = - \frac{2p}{\pi} \left\{ - \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{t^2 - 1}} + \frac{1 - \frac{11}{2}\varepsilon}{2} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon \left[ \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{t^2 - 1} + t} - \sqrt{t^2 - 1} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}}{2} \right] \right\}, \quad t > 1.$$

Przemieszczenie obliczone ze wzoru (4.18) wynosi

$$w(t) = \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \int_t^1 \frac{\Delta\xi - \varepsilon\Delta \left[ \xi - \frac{1 - \xi^2}{2} \ln(1 + \xi) \right]}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi.$$

Rozwijając funkcję logarytmiczną w szereg potęgowy otrzymany po obliczeniu całki i przekształceniach

$$(4.21) \quad w(t) = - \left( \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \right)^2 \frac{pl^2}{2\pi G_0} \left\{ (1 - \varepsilon) \sqrt{1 - t^2} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{2} \left[ (1 - t^2) \left[ -\frac{3}{16} + \frac{8}{9} (1 - t^2)^{1/2} - \frac{8}{45} (1 - t^2)^{3/2} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left[ (1 + t)^2 \sqrt{\frac{1 - t}{1 - t}} - t(1 - t^2) - t^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{24} \left( 1 - \frac{3}{4} t^2 - \frac{1}{4} t^6 \right) \right] \right\}, \quad t < 1.$$

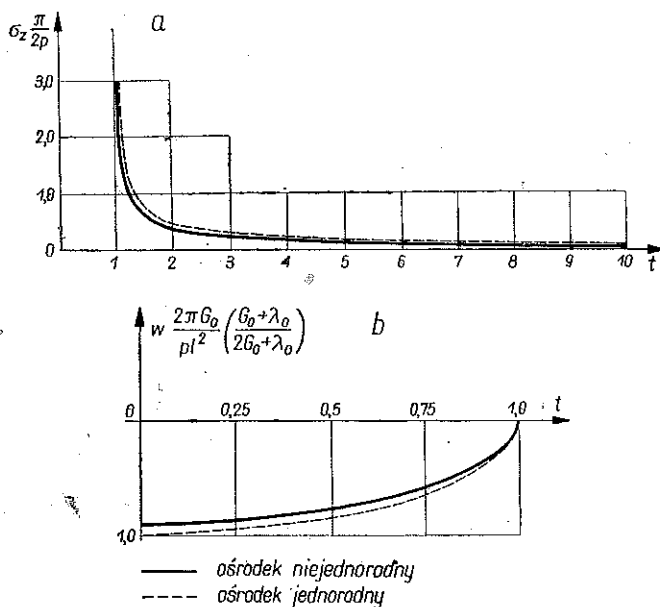
Jak widać z (4.20) i (4.21), dla  $\varepsilon = 0$  (a więc  $\eta = 0$ ) otrzymujemy rezultat jak dla szczeliny w ośrodku jednorodnym.

Dla liczbowych wartości parametrów:  $A = -0,01$ ;  $l = 100$  m;  $\nu = 0,25$  mamy  $\eta = -0,5$ ;  $\Omega - A = -0,39$  oraz

$$\varepsilon = \frac{2\eta(\Omega - A)}{\pi} = 0,124.$$

Wykres naprężeń  $\sigma_z$  i przemieszczeń pionowych na brzegu przedstawia rys. 5.

Różnice w stosunku do odpowiednich wielkości dla ośrodka jednorodnego są tu już widoczne i dochodzą do około 11% (tak dla naprężeń jak i przemieszczeń).



Rys. 5

Przeprowadzone obliczenia dowodzą, iż w zagadnieniach omawianego typu (problem stempla i problem typu szczeliny) i dla omawianego typu niejednorodności (moduły sprężystości zmienne tylko wzdłuż głębokości) wpływ niejednorodności zależy w istotny sposób od szerokości  $l$  (szerokość stempla, szerokość otworu) i jest większy dla większych wartości tego parametru.

## Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий, *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*, СМБ, Москва.
2. В. STACHOWICZ, G. SZEFER, *O pewnym zagadnieniu kontaktowym niejednorodnej półpłaszczyzny sprężystej*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 4 (1966).
3. В. STACHOWICZ, G. SZEFER, *Nacisk stempla na niejednorodną półpłaszczyznę sprężystą*, Rozpr. Inżyn., 4, 13 (1966).
4. Я. С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Москва 1963.

## Резюме

## К ВОПРОСУ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Дается решение двух осесимметрических задач о напряженном состоянии неоднородного упругого полупространства, а именно: а — задача штампа, б — задача типа трещины.

Неоднородность среды определяется, переменным по глубине модулем упругости типа (1.1).

Обе задачи решаются на основе применения интегрального преобразования Ганкеля, сводя краевую задачу к двойственным интегральным уравнениям. Исходной точкой для обеих краевых задач является общая 2 часть работы, в которой находятся общие (интегральные) формулы для напряжений и перемещений.

В третьей части 3 обсуждается вопрос штампа произвольной формы, приводя для малой неоднородности (малый параметр  $\eta$ ) эффективную формулу для контактного напряжения (3.38). Затем даются примеры для плоского и конусообразного штампа (формулы (3.40) и (3.41)). Дается, также, конкретный пример расчета приводя диаграмму напряжений под штампом (рис. 3).

В четвертой части, предлагается эффективное решение второй задачи. Рассматривается случай  $p(r) = \text{const}$ , получая формулы для напряжения и перемещения (4.20) и (4.21). Диаграммы этих величин показаны на рис. 5. В заключение, констатируется, что в обсуждаемых вопросах, при принятом типе неоднородности  $E = E(z)$  решение зависит существенно, от параметра  $I$  (радиус штампа, трещины).

## Summary

## A PROBLEM OF A NONHOMOGENEOUS SEMI-INFINITE ELASTIC BODY

This paper presents solutions of two problems of axially-symmetric state of stress in a non-homogeneous semi-infinite elastic body, which are: a) the problem of a punch, b) the problem of a crack.

Both problems are solved by means of Hankel's integral transformation and by reducing the boundary-value problem to that of dual integral equations. The point of departure for solving both boundary value problems is discussed in Sec. 2 of the present work, which is of general nature and in which are given general (integral) formulae for stresses and displacements.

Sec. 3 is devoted to the solution of the problem of a punch of any form and gives, in the case of a small nonhomogeneity (small parameter  $\eta$ ), an effective equation for the contact stresses (3.38) and (3.41). Also a numerical example is discussed giving a diagram of stresses under the punch (Fig. 3).

Sec. 4 brings an effective solution of the second problem. The case of  $p(r) = \text{const}$  is considered, equations for stresses and displacements being obtained ((4.20) and (4.21)). Figure 5 represents a diagram of these quantities.

In conclusion it is found that, with the type of nonhomogeneity assumed  $E = E(z)$ , the solution of the problem of the type under consideration depends in an essential manner on the parameter  $I$  (the radius of the punch or the crack).

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 sierpnia 1966 r.*

---