

DRGANIA SWOBODNE PASMA PŁYTOWEGO O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

OSWALD MATEJA (OPOLE)

1. Wstęp

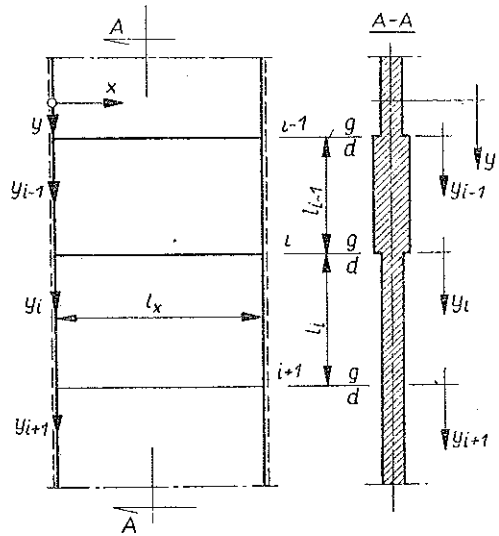
Problem poprzecznych (giętnych) drgań swobodnych płyt prostokątnych o dowolnie zmiennej sztywności i gęstości rozwiązał Z. MAZURKIEWICZ [1, 2 i 3]. Autor ten zastąpił znane równanie różniczkowe zagadnienia jednorodnym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju i doprowadził rozwiązanie tego ostatniego równania do nieskończonego układu jednorodnych równań liniowych. Tak uzyskane rozwiązanie wymaga w konkretnych przykładach uciążliwych obliczeń, trudnych do przeprowadzenia przy wykorzystaniu szybko liczących maszyn cyfrowych.

W niniejszej pracy rozpatruje się zagadnienie drgań swobodnych pasma płytowego o zmiennej grubości wzdłuż jego osi.

Opierając się na pracach H. WAGNERA [4 i 5] oraz na pracy [6], dotyczących innego zagadnienia, uzyskujemy rozwiązanie problemu za pomocą tzw. metody macierzy przeniesienia. Pozwala to na prowadzenie obliczeń według prostego schematu.

2. Rozwiązanie problemu

Rozpatrzmy swobodnie podparte na brzegach pasmo płytowe (rys. 1). Zakładamy, że walcowa sztywność na zginanie pasma  $D$  oraz jego masa w odniesieniu



Rys. 1

do jednostki powierzchni  $\rho$  są funkcjami przedziałami ciągłymi zmiennej  $y$ . Podzielmy rozpatrywane pasmo płaszczyznami prostopadłymi do płaszczyzny płyty wzdłuż linii  $y_i$  na  $n$  części o długościach  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Przyjmujemy, iż dokonaliśmy takiego podziału pasma, że z dostateczną dokładnością dla obliczeń technicznych można na danych odcinkach między poszczególnymi przekrojami przyjąć funkcje  $D_i$  i  $\rho_i$  jako stałe. Warto tu nadmienić, iż uwzględniając w pierwszym przypadku

najmniejsze wartości funkcji  $k_i^2 = \rho_i/D_i$  w poszczególnych przedziałach otrzymuje się częstotliwości drgań własnych nie mniejsze od rzeczywistych, natomiast w drugim przypadku, biorąc największe wartości tych funkcji w poszczególnych przedziałach, otrzymuje się częstotliwości nie większe od rzeczywistych. Można więc łatwo przedstawionym dalej sposobem określania częstotliwości drgań własnych pasma płytowego określić granice, w jakich zawarte są rzeczywiste wartości.

Dla odcinka  $l_i$  (rys. 1) pasma znane równanie różniczkowe poprzecznych drgań własnych płyty przy pominięciu wpływu sił poprzecznych oraz momentów sił bezwładności obrotu ma postać (por. np. [7], str. 486)

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial t^2} + \frac{D_i}{\rho_i} \left( \frac{\partial^4 \tilde{w}_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{w}_i}{\partial x^2 \partial y_i^2} + \frac{\partial^4 \tilde{w}_i}{\partial y_i^4} \right) = 0.$$

Uwzględniając, że dla drgań harmonicznym

$$(2.2) \quad \tilde{w}_i(x, y_i, t) = w_i(x, y_i) \sin \omega t,$$

otrzymamy

$$(2.3) \quad \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y_i^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y_i^4} - k_i^2 \omega^2 w_i = 0,$$

gdzie

$$k_i^2 = \frac{\rho_i}{D_i}, \quad D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Poszukując rozwiązania powyższego równania w postaci (metoda Levy'ego):

$$(2.4) \quad w_i(x, y_i) = Y_i(y_i) \sin \lambda x,$$

gdzie  $\lambda = m\pi/l_x$ , otrzymamy na  $Y_i(y_i)$  następujące równanie:

$$(2.5) \quad Y_i^{IV} - 2\lambda^2 Y_i'' + (\lambda^4 - k_i^2 \omega^2) Y_i = 0.$$

Wykonując na równaniu (2.5) transformację Laplace'a otrzymamy transformatę funkcji  $Y_i(y_i)$  w następującej postaci:

$$(2.6) \quad L[Y_i(y_i)] = \frac{Y_{ia}(p_i^3 - 2\lambda^2 p_i) + Y'_{ia}(p_i^2 - 2\lambda^2) + Y''_{ia} p_i + Y'''_{ia}}{p_i^4 - 2\lambda^2 p_i^2 + \lambda^4 - k_i^2 \omega^2}.$$

Występujące w ostatnim równaniu stałe  $Y_{ia}$ ,  $Y'_{ia}$ ,  $Y''_{ia}$  i  $Y'''_{ia}$  są wartością funkcji  $Y_i(y_i)$ , jej pierwszą, drugą i trzecią pochodną w przekroju  $y_i = 0$ .

Wykonując z kolei na równaniu (2.6) odwrotną transformację Laplace'a, otrzymamy funkcję  $Y_i(y_i)$  będącą całką ogólną równania (2.5). Funkcja ta oraz jej trzy pierwsze pochodne mają następującą postać:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} Y_i &= Y_{ia} S_{11}^i + Y'_{ia} S_{12}^i + Y''_{ia} S_{13}^i + Y'''_{ia} S_{14}^i, \\ Y_i' &= Y_{ia} S_{21}^i + Y'_{ia} S_{22}^i + Y''_{ia} S_{23}^i + Y'''_{ia} S_{24}^i, \\ Y_i'' &= Y_{ia} S_{31}^i + Y'_{ia} S_{32}^i + Y''_{ia} S_{33}^i + Y'''_{ia} S_{34}^i, \\ Y_i''' &= Y_{ia} S_{41}^i + Y'_{ia} S_{42}^i + Y''_{ia} S_{43}^i + Y'''_{ia} S_{44}^i, \end{aligned}$$

Tablica 1. Funkcije  $S_{jk}$  dla  $k^2 < \omega k$

|          | $S_{11}$   | $S_{12}$   | $S_{13}$   | $S_{14}$   |
|----------|--|--|--|--|
| $S_{1k}$ | $\frac{b^2 \operatorname{ch} ay}{2\omega k} + \frac{a^2 \cos by}{2\omega k}$         | $\frac{b^2 \operatorname{sh} ay}{2\omega k} + \frac{a^2 \sin by}{2\omega k}$         | $\frac{\operatorname{ch} ay}{2\omega k} - \frac{\cos by}{2\omega k}$         | $\frac{\operatorname{sh} ay}{2\omega k} - \frac{\sin by}{2\omega k}$         |
| $S_{2k}$ | $\frac{ab^2 \operatorname{sh} ay}{2\omega k} - \frac{a^2 b \sin by}{2\omega k}$      | $\frac{b^2 \operatorname{ch} ay}{2\omega k} + \frac{a^2 \cos by}{2\omega k}$         | $\frac{a \operatorname{sh} ay}{2\omega k} + \frac{b \sin by}{2\omega k}$     | $\frac{\operatorname{ch} ay}{2\omega k} - \frac{\cos by}{2\omega k}$         |
| $S_{3k}$ | $\frac{a^2 b^2 \operatorname{ch} ay}{2\omega k} - \frac{a^2 b^2 \cos by}{2\omega k}$ | $\frac{ab^2 \operatorname{sh} ay}{2\omega k} - \frac{a^2 b \sin by}{2\omega k}$      | $\frac{a^2 \operatorname{ch} ay}{2\omega k} + \frac{b^2 \cos by}{2\omega k}$ | $\frac{a \operatorname{sh} ay}{2\omega k} + \frac{b \sin by}{2\omega k}$     |
| $S_{4k}$ | $\frac{a^2 b^2 \operatorname{sh} ay}{2\omega k} + \frac{a^2 b^2 \sin by}{2\omega k}$ | $\frac{a^2 b^2 \operatorname{ch} ay}{2\omega k} - \frac{a^2 b^2 \cos by}{2\omega k}$ | $\frac{a^3 \operatorname{sh} ay}{2\omega k} - \frac{b^3 \sin by}{2\omega k}$ | $\frac{a^2 \operatorname{ch} ay}{2\omega k} + \frac{b^2 \cos by}{2\omega k}$ |

$a^2 = \omega k + \lambda^2, \quad b^2 = \omega k - \lambda^2, \quad k^2 = \frac{a}{D}, \lambda = \frac{m\pi}{l_x}$ .

Tablica 2. Funkcije  $S_{ik}$  dla  $\lambda^2 > \omega k$

|          | $S_{i1}$   | $S_{i2}$   | $S_{i3}$  | $S_{i4}$  |
|----------|--|--|---|---|
| $S_{1k}$ | $-\frac{e^2 \text{ ch } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 \text{ ch } ey}{2\omega k}$         | $-\frac{e^2 \text{ sh } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 \text{ sh } ey}{2\omega k}$         | $\frac{\text{ch } ay}{2\omega k} - \frac{\text{ch } ey}{2\omega k}$           | $\frac{\text{sh } ay}{2\omega k} - \frac{\text{sh } ey}{2\omega k}$           |
| $S_{2k}$ | $-\frac{ae^2 \text{ sh } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 e \text{ sh } ey}{2\omega k}$      | $-\frac{e^2 \text{ ch } ey}{2\omega k} + \frac{a^2 \text{ ch } ey}{2\omega k}$         | $\frac{a \text{ sh } ay}{2\omega k} - \frac{e \text{ sh } ey}{2\omega k}$     | $\frac{\text{ch } ay}{2\omega k} - \frac{\text{ch } ey}{2\omega k}$           |
| $S_{3k}$ | $-\frac{a^2 e^2 \text{ ch } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 e^2 \text{ ch } ey}{2\omega k}$ | $-\frac{a^2 e \text{ sh } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 e \text{ sh } ey}{2\omega k}$     | $\frac{a^2 \text{ ch } ay}{2\omega k} - \frac{e^2 \text{ ch } ey}{2\omega k}$ | $\frac{a \text{ sh } ay}{2\omega k} - \frac{e \text{ sh } ey}{2\omega k}$     |
| $S_{4k}$ | $-\frac{a^3 e^2 \text{ sh } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 e^3 \text{ sh } ey}{2\omega k}$ | $-\frac{a^2 e^2 \text{ ch } ay}{2\omega k} + \frac{a^2 e^2 \text{ sh } ey}{2\omega k}$ | $\frac{a^3 \text{ sh } ay}{2\omega k} - \frac{e^3 \text{ sh } ey}{2\omega k}$ | $\frac{a^2 \text{ ch } ay}{2\omega k} - \frac{e^2 \text{ ch } ey}{2\omega k}$ |

$$\omega a^2 = \lambda^2 + \omega k, \quad e^2 = \lambda^2 - \omega k; \quad k^2 = \frac{\rho}{D}, \quad \lambda = \frac{m\omega}{I_2}$$

gdzie  $S_{lk}^i$  są funkcjami, które dla przypadku gdy  $\lambda^2 < k_i \omega$  podano w tabelicy 1, a dla przypadku  $\lambda^2 > k_i \omega$  — w tabelicy 2. Przypadek, gdy  $\lambda_1 = k_i \omega$  pominięto.

Znając wartość funkcji  $Y_i(y_i)$ , jej pierwszą, drugą i trzecią pochodną w przekroju  $i$  od strony oznaczonej literą  $d$  (por. rys. 1) oraz znając wartości funkcji  $S_{lk}^i$  dla  $y_i = l_i$ , możemy określić  $Y_{i+1g}$ ,  $Y'_{i+1g}$ ,  $Y''_{i+1g}$  i  $Y'''_{i+1g}$  na końcu rozważanego przedziału po stronie oznaczonej literą  $g$  w następujący sposób:

$$(2.8) \quad \bar{Y}_{i+1g} = S_i \bar{Y}_{id},$$

gdzie

$$(2.9) \quad S_i = [S_{lk}^i]_{y_i=l_i}, \quad \begin{matrix} l = 1, \dots, 4 \\ k = 1, \dots, 4' \end{matrix}$$

$$(2.10) \quad \bar{Y}_{id} = \begin{bmatrix} Y_{id} \\ Y'_{id} \\ Y''_{id} \\ Y'''_{id} \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_{i+1g} = \begin{bmatrix} Y_{i+1g} \\ Y'_{i+1g} \\ Y''_{i+1g} \\ Y'''_{i+1g} \end{bmatrix}.$$

Przy przejściu w danym przekroju  $i+1$  ze strony oznaczonej literą  $g$  do strony oznaczonej literą  $d$  muszą być spełnione następujące warunki:

$$(2.11) \quad Y_{i+1g} = Y_{i+1d}, \quad Y'_{i+1g} = Y'_{i+1d},$$

$$(2.12) \quad m_{yi+1g} = m_{yt+1d},$$

czyli

$$(2.13) \quad D_i(Y''_{i+1g} - \nu \lambda^2 Y_{i+1g}) = D_{i+1}(Y''_{i+1d} - \nu \lambda^2 Y_{i+1d})$$

oraz

$$\left( q_y - \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} \right)_{i+1g} = \left( q_y - \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} \right)_{i+1d},$$

czyli

$$(2.14) \quad D_i(Y'''_{i+1g} - 2(1-\nu)\lambda^2 Y'_{i+1g}) = D_{i+1}(Y'''_{i+1d} - 2(1-\nu)\lambda^2 Y'_{i+1d}).$$

Możemy więc napisać, że

$$(2.15) \quad \bar{Y}_{i+1d} = U_{i+1} \bar{Y}_{i+1g} = U_{i+1} S_i \bar{Y}_{id},$$

gdzie

$$(2.16) \quad U_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\nu \lambda^2 (D_{i+1} - D_i)}{D_{i+1}} & 0 & \frac{D_i}{D_{i+1}} & 0 \\ 0 & \frac{2(1-\nu)\lambda^2 (D_{i+1} - D_i)}{D_{i+1}} & 0 & \frac{D_i}{D_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

Przechodząc w analogiczny sposób wszystkie przedziały otrzymamy

$$(2.17) \quad \bar{Y}_{n+1g} = S_n U_n S_{n-1} U_{n-1} \dots U_3 S_2 U_2 S_1 \bar{Y}_1,$$

gdzie

$$(2.18) \quad \bar{Y}_{n+1g} = \begin{bmatrix} Y_{n+1g} \\ Y'_{d+1g} \\ Y''_{n+1g} \\ Y'''_{n+1g} \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y'_1 \\ Y''_1 \\ Y'''_1 \end{bmatrix}.$$

Oznaczając

$$(2.19) \quad R = S_n U_n S_{n-1} U_{n-1} \dots U_3 S_2 U_2 S_1$$

możemy krótko napisać

$$(2.20) \quad \bar{Y}_{n+1g} = R \bar{Y}_1.$$

Czyli

$$(2.21) \quad \begin{aligned} Y_{n+1g} &= Y_1 A_{11} + Y'_1 A_{12} + Y''_1 A_{13} + Y'''_1 A_{14}, \\ Y'_{n+1g} &= Y_1 A_{21} + Y'_1 A_{22} + Y''_1 A_{23} + Y'''_1 A_{24}, \\ Y''_{n+1g} &= Y_1 A_{31} + Y'_1 A_{32} + Y''_1 A_{33} + Y'''_1 A_{34}, \\ Y'''_{n+1g} &= Y_1 A_{41} + Y'_1 A_{42} + Y''_1 A_{43} + Y'''_1 A_{44}, \end{aligned}$$

gdzie  $A_{ik}$  są elementami macierzy  $R$ .

W zależności od warunków brzegowych na krawędziach  $y = 0$  i  $y = l$ , możemy określić interesujące nas częstości kątowe z warunków znikania odpowiednich minorów macierzy (19).

I tak, w przypadku krawędzi  $y = 0$ ,  $y = l$  swobodnie podpartych mamy

$$(2.22) \quad Y_1 = Y'_1 = Y_{n+1g} = Y'_{n+1g} = 0.$$

Kwadrat częstości kątowej  $\omega^2$  drgań własnych układu możemy obliczyć wtedy ze wzoru

$$(2.23) \quad \Delta_1 = A_{12} A_{34} - A_{14} A_{32} = 0.$$

Jeśli krawędź  $y = 0$  jest utwierdzona a krawędź  $y = l$  jest swobodna, to mamy następujące warunki:

$$(2.24) \quad Y_1 = Y'_1 = 0$$

oraz

$$\begin{aligned} [m_y]_{y=l_n} &= D_n (Y'_{n+1g} - \nu \lambda^2 Y_{n+1g}) = 0, \\ \left[ q_y - \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} \right]_{y=l_n} &= D_n (Y'''_{n+1g} - 2(1-\nu) \lambda^2 Y'_{n+1g}) = 0. \end{aligned}$$

Z ostatnich dwóch równań wynikają zależności

$$(2.25) \quad Y''_{n+1g} = \nu\lambda^2 Y_{n+1g}$$

oraz

$$(2.26) \quad Y'''_{n+1g} = 2(1-\nu)\lambda^2 Y'_{n+1g}.$$

Podstawiając związki (2.24), (2.25) i (2.26) do równań (2.21), otrzymamy

$$(2.27) \quad \begin{aligned} Y''_1(A_{33} - \nu\lambda^2 A_{13}) + Y'''_1(A_{34} - \nu\lambda^2 A_{14}) &= 0, \\ Y''_1(A_{43} - 2(1-\nu)\lambda^2 A_{23}) + Y'''_1(A_{44} - 2(1-\nu)\lambda^2 A_{24}) &= 0. \end{aligned}$$

Czyli z warunku

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \Delta_2 = (A_{33} - \nu\lambda^2 A_{13})(A_{44} - 2(1-\nu)\lambda^2 A_{24}) - \\ - (A_{34} - \nu\lambda^2 A_{14})(A_{43} - 2(1-\nu)\lambda^2 A_{23}) = 0 \end{aligned}$$

możemy obliczyć kwadrat częstości kątowej  $\omega^2$  drgań własnych układu.

Podobne wzory do obliczania częstości drgań własnych można łatwo ustalić dla innych kombinacji warunków brzegowych na krawędziach  $y = 0$  i  $y = l$ .

W ogólności równania (2.23) i (2.28) itp. są równaniami przestępnymi i dlatego w praktycznych obliczeniach najlepiej podstawiać za  $\omega$  odpowiednie wartości według z góry ustalonego «kroku». Sporządzając wykres funkcji  $\Delta_j(\omega^2)$  można wtedy łatwo ustalić interesujące nas pierwiastki równania  $\Delta_j(\omega^2) = 0$ .

### 3. Przykład liczbowy

Obliczyć dla  $m = 1$  podstawową częstość kątową drgań własnych płyty o wymiarach  $l = 10,0$  m,  $h = 0,1$  m (rys. 2). Krawędzie I-III oraz II-IV są swobodnie podparte.

Obliczenia przeprowadzamy dla  $E = 3 \cdot 10^6$  T/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0,20$ ,  $\gamma = 2,5$  T/m<sup>3</sup>. Rozpatrywaną płytę dzielimy płaszczyzną 2-2 na dwie części. Obliczamy dla pierwszej części

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)} = 260 \text{ Tm}, \quad \varrho_1 = \frac{\gamma h_1}{g} = 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ Ts}^2/\text{m}^3$$

oraz

$$k_1^2 = \frac{\varrho_1}{D_1} = 9,81 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^4.$$

Podobnie dla drugiej części znajdziemy

$$D_2 = 32,6 \text{ Tm}, \quad \varrho_2 = 1,275 \cdot 10^{-2} \text{ Ts}^2/\text{m}^3, \quad k_2^2 = 39,1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^4.$$

Następnie ustalamy wartości pomocnicze do obliczenia elementów macierzy  $S_1$  i  $S_2$ . Przykładowo dla  $\omega = 5,5$  rd/s wartości te podano w tablicy 3.

Tablica 3. Wartości pomocnicze do obliczenia elementów macierzy  $S_1$  oraz  $S_2$  dla  $\omega = 5,5$  rd/s

| Część pasma | $\omega$ , rd/s | $k$ , s/m <sup>2</sup> | $\omega k$ , m <sup>-2</sup> | $\lambda^2$ , m <sup>-2</sup> | $a^2 = \lambda^2 + k\omega$ | $b^2 = \omega k - \lambda^2$ | $e^2 = \lambda^2 - \omega k$ | $al$ | $bl$  | $el$ |
|-------------|-----------------|------------------------|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------|-------|------|
| 1—2         | 5,5             | 0,00991                | 0,0545                       | 0,0986                        | 0,1531                      | —                            | 0,0441                       | 3,91 | —     | 2,10 |
| 2—3         | 5,5             | 0,01977                | 0,1087                       | 0,0986                        | 0,2073                      | 0,0101                       | —                            | 4,55 | 1,005 | —    |



Tablica 4. Obliczenie elementów macierzy  $R$  sposobem Falka dla  $\omega = 5,5$  rd/s

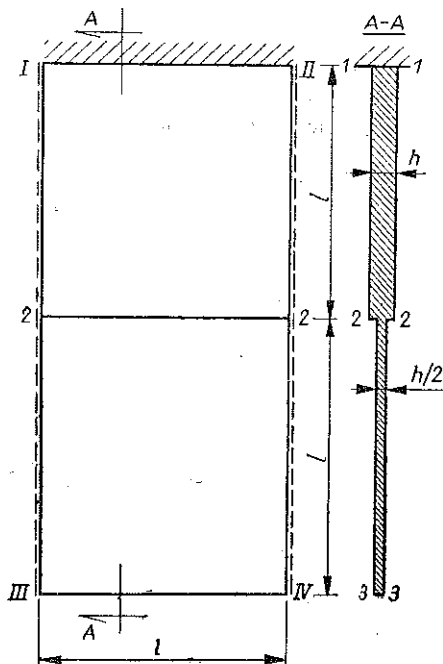
|         |        |        |       |        |        |        |        |
|---------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
|         |        |        |       | -4,26  | 1,10   | 191    | 409    |
|         |        |        |       | -2,76  | -4,26  | 81,8   | 191    |
|         |        |        |       | -1,29  | -2,76  | 33,4   | 81,8   |
|         |        |        |       | -0,551 | -1,29  | 13,4   | 33,4   |
| 1       | 0      | 0      | 0     | -4,26  | 1,10   | 191    | 409    |
| 0       | 1      | 0      | 0     | -2,76  | -4,26  | 81,8   | 191    |
| -0,1375 | 0      | 7,98   | 0     | -9,72  | -22,2  | 240,5  | 597    |
| 0       | -1,098 | 0      | 7,98  | -1,38  | -5,62  | 17,0   | 57,0   |
| 0,8625  | -0,098 | 7,98   | 7,98  | -18,12 | -31,98 | 530,3  | 1254   |
| 2,72    | 12,87  | 216    | 441   | -2754  | -7322  | 60970  | 157470 |
| 0,924   | 2,72   | 99,6   | 216   | -1280  | -3424  | 28070  | 72898  |
| 0,452   | 0,924  | 45,3   | 99,9  | -584   | -1573  | 12770  | 33171  |
| 0,209   | 0,452  | 20,58  | 45,3  | -264,5 | -712   | 5782   | 15027  |
| 4,305   | 16,966 | 381,78 | 802,2 | -4882  | 13031  | 107592 | 278566 |

Z kolei obliczamy ze wzorów (2.7) oraz na podstawie zależności (2.16) elementy macierzy  $S_1$ ,  $S_2$  oraz macierzy  $U_2$ . Elementy tych macierzy przykładowo dla  $\omega = 5,5$  rd/s podano w tablicy 4. Tablica ta służy jednocześnie do mnożenia macierzy sposobem Falka (por. np. [8]).

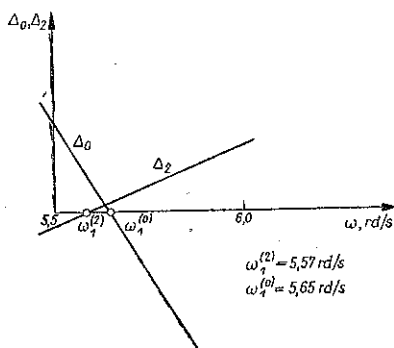
Mając obliczone elementy macierzy  $R$ , ustalamy wartości funkcji  $\Delta_j(\omega)$ . Zbadajmy dwa przypadki:

1) krawędzie I-II i III-IV utwierdzone,

2) krawędź I-II utwierdzona, a krawędź III-IV swobodna.



Rys. 2



Rys. 3

Dla pierwszego przypadku dla  $\omega = 5,5$  rd/s otrzymamy

$$\Delta_0 = A_{13} A_{24} - A_{23} A_{14} = 60970 \cdot 72898 - 28069 \cdot 157470 = 24562630,$$

a dla drugiego, korzystając ze wzoru (2.28) mamy

$$\Delta_2 = -353107.$$

Powyższe obliczenia powtarzamy dla  $\omega = 1,0, 2,0, \dots, 6,0$  rd/s. Sporządzając wykresy funkcji  $\Delta_0(\omega)$  oraz  $\Delta_2(\omega)$  możemy łatwo znaleźć pierwsze miejsce zerowane tych funkcji (rys. 3), otrzymując dla pierwszego przypadku  $\omega_1^{(0)} = 5,65$  rd/s dla drugiego  $\omega_1^{(2)} = 5,57$  rd/s.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. MAZURKIEWICZ, *General expressions for the boundary conditions and the differential equation of equilibrium and vibration of an anisotropic, nonhomogeneous plate*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. techn., 9, 7 (1959).
2. Z. MAZURKIEWICZ, *Free vibration of an isotropic, nonhomogeneous rectangular plate*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. techn., 2, 7 (1960).
3. Z. MAZURKIEWICZ, *Bending vibration and buckling of a rectangular orthotropic plate resting on a non-homogeneous foundation*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. techn., 3, 8 (1960).
4. H. WAGNER, *Die Stabilitätsberechnung abgesetzter Knickstäbe mit Hilfe der Laplace-Transformation und der Matrizenrechnung*, Z. VDI, nr 1251—1256, 1957.
5. H. WAGNER, *Die Stabilität der axial gedrückten Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke*, Österr. Ing.-Archiv, nr 4, 1960.
6. O. MATEJA, *Drgania swobodne masztów i wysmukłych budowli wieżowych*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 14 (1968).
7. S. KALISKI i in., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
8. R. ZURMÜHL, *Matrizen und ihre technische Anwendung*, Springer Verlag, Berlin 1961.

#### Резюме

#### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЧАТОЙ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается вопрос поперечных свободных колебаний пластинчатой полосы переменной, вдоль ее оси, толщины. Решение задачи получено с помощью метода трансляционных матриц. Дается числовой пример.

#### Summary

#### FREE VIBRATIONS OF A STRIP OF PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

The problem concerns the transverse free vibrations of a strip of plates with the thickness being variable along its axis. The solution has been obtained using the matrix of transposition. A numerical example is given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 czerwca 1968 r.