

ZGINANIE I WYBOCZENIE USTROJÓW SPRĘŻYSTYCH,
ZŁOŻONYCH Z PRĘTÓW PROSTYCH O ZMIENNYCH PRZEKROJACH
POPZRZECZNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM CIĘŻARU WŁASNEGO

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problemy stateczności ustrojów prętowych należą do tych klasycznych i ważnych zagadnień mechaniki stosowanej, które mają szczególnie duże znaczenie przy projektowaniu nowoczesnych, ażurowych i lekkich konstrukcji o różnym przeznaczeniu. O ile jednak problemy wybooczenia ustrojów sprężystych, złożonych z prętów prostych o stałych przekrojach poprzecznych, zostały obszernie i wyczerpująco opisane w literaturze technicznej, o tyle w przypadku ustrojów złożonych z prętów niejednorodnych o zmiennych przekrojach poprzecznych określenie obciążeń krytycznych powoduje duże trudności.

Problemy zginania, wybooczenia i drgań ustrojów sprężystych, złożonych z niejednorodnych prętów prostych o dowolnie zmiennych przekrojach poprzecznych, rozważono w pracy [1], w której podano ogólny sposób rozwiązywania tych zagadnień za pomocą metody ortogonalizacyjnej. W monografii [2] opisano zastosowanie metody przemieszczeń do rozwiązywania problemów jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) oraz wybooczenia ustrojów ramowych, złożonych z prętów o sztywnościach zginania zmiennych w sposób często występujący w różnych konstrukcjach inżynierskich. Niektóre przypadki wybooczenia ustrojów ramowych nieprzesuwnych, złożonych z prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych, rozważono w monografii [3]. Zarówno w pracy [1], jak i w monografiach [2 i 3] ograniczono się do rozważania problemów wybooczenia ustrojów ramowych, poddanych działaniu stałych sił osiowych wzdłuż osi prętów.

Nie cytujemy tu bardzo dużej liczby prac, w których podano rozwiązania, dotyczące różnych przypadków z zakresu jednoczesnego zginania i ściskania oraz wybooczenia prętów o zmiennych sztywnościach zginania i o szczególnych warunkach brzegowych. Rozwiązania takie nie mogą być bowiem na ogół wykorzystane w przypadku ustrojów ramowych. Wyjątek stanowi tu interesujące rozwiązanie problemu statyki prętów o dowolnie zmiennych przekrojach poprzecznych, podane w pracy [4]. Aczkolwiek rozwiązanie przedstawione w pracy [4] dotyczy tylko zginania pojedynczych prętów prostych, to jednak dzięki zastosowaniu metody transformacji Laplace'a umożliwia uwzględnienie dowolnych warunków brzegowych i może być

wykorzystane do uzyskania rozwiązań różnych problemów z zakresu statyki złożonych ustrojów prętowych.

W pracy tej rozważono problem jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) oraz wyboczenia ustrojów sprężystych, złożonych z prętów prostych, niejednorodnych o dowolnie zmiennych przekrojach poprzecznych, obciążonych prostopadłe do osi prętów i poddanych działaniu zmiennych sił osiowych, pochodzących np. od ciężaru własnego. Założono, że gęstość i cechy sprężyste materiału są opisane za pomocą dowolnych funkcji, zależnych od współrzędnej miejsca i niezależnych od czasu.

Rozwiązanie problemu sprowadzono do rozwiązania równania różniczkowego osi odkształconej pręta, stanowiącego element składowy ustroju prętowego. Równanie osi odkształconej pręta oraz funkcję opisującą rozkład obciążenia prostopadłego do osi pręta wyrażono za pomocą szeregu Fouriera, zakładając spełnienie warunków Dirichleta.

W celu uzyskania rozwiązania, umożliwiającego spełnienie dowolnych, niejednorodnych warunków brzegowych zastosowano sposób, opisany i wykorzystany w pracy autora [1]. Sposób ten polega na pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej dzięki wykorzystaniu znanego twierdzenia o różniczkowaniu szeregów Fouriera (por. np. [5]). Rozwiązanie takie prowadzi oczywiście do nieskończonego układu algebraicznych równań, który występuje również w przypadku skończonej transformacji Fouriera. Jest ono bardziej przejrzyste i pozwala na pominięcie niektórych przekształceń, występujących przy stosowaniu metody skończonej transformacji Fouriera [6].

Stosując wyżej wymieniony sposób doprowadzono rozwiązanie równania różniczkowego zagadnienia do nieskończonego układu algebraicznych, niejednorodnych równań liniowych, w których występują statyczne i geometryczne wielkości brzegowe oraz niewiadome współczynniki szeregu Fouriera, opisującego równanie odkształconej osi pręta. Następnie rozważono kilka przypadków podparcia prętów, stanowiących elementy składowe ustroju prętowego. Dla każdego rozważonego sposobu podparcia wyprowadzono wzory na brzegowe momenty zginające i siły poprzeczne. We wzorach tych występują przemieszczenia brzegowe (kąty obrotów i pionowe przesunięcia podpór) oraz wyrażenia zależne od wyżej wymienionych współczynników Fouriera.

Poza tym dla każdego z rozważonych przypadków podparcia pręta otrzymano nieskończony układ algebraicznych równań liniowych, zawierających niewiadome współczynniki Fouriera oraz przemieszczenia brzegowe (po wyeliminowaniu brzegowych momentów zginających). Wykorzystanie warunków równowagi węzłów ustroju oraz warunków równowagi części ustroju prętowego umożliwia ustawienie układu algebraicznego równań, których liczba odpowiada stopniowi geometrycznej niewyznaczalności ustrojów. Wyprowadzone wzory i równania umożliwiają rozwiązywanie różnych problemów z zakresu jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) oraz wyboczenia ustrojów sprężystych, złożonych z prętów prostych o dowolnie zmiennych przekrojach poprzecznych. Sposób postępowania przy rozwiązywaniu wyżej wymienionych problemów, opisany w dalszej części pracy,

jest podobny do sposobu rozwiązywania tego typu zagadnień za pomocą metody przemieszczeń w przypadku ustrojów sprężystych, złożonych z prętów o stałych przekrojach poprzecznych. Z praktycznego punktu widzenia duże znaczenie ma fakt, że sumy wszystkich nieskończonych szeregów funkcyjnych przedstawiono w postaci całek, w których wyrażenia podcałkowe zależą od funkcji, opisujących zmienność sztywności zginania, masy i obciążenia wzdłuż osi pręta.

Następnie podano inny wariant rozwiązania rozważanych problemów. Wszystkie nieskończone układy algebraicznych równań liniowych, otrzymane w różnych przypadkach podparcia pręta, doprowadzono do równań całkowych Fredholma. Natomiast wzory dla brzegowych wielkości statycznych przedstawiono w postaci całek, w których wyrażenia podcałkowe zależne są od funkcji, opisującej równanie odkształconej osi pręta. Doprowadzenie rozwiązania do takiej postaci umożliwia stosowanie metod iteracyjnych i otrzymywanie przybliżonych rozwiązań rozważanych problemów w różnych przypadkach funkcji, opisujących niejednorodność materiału oraz zmienność przekroju poprzecznego poszczególnych prętów ustroju. Sposób postępowania przy korzystaniu z wyprowadzonych wzorów i równań całkowych w przypadku rozwiązywania problemów zginania i wyboczenia złożonych ustrojów prętowych opisano w innym miejscu pracy.

2. Ogólne rozwiązanie problemu

Rozważmy sprężysty, niejednorodny i pionowo ustawiony pręt prosty o dowolnie zmiennym przekroju poprzecznym, obciążony siłami osiowymi, pochodzącymi od ciężaru własnego oraz od sił przyłożonych w obu końcach pręta, i poddany działaniu dowolnego obciążenia prostopadłego do osi pręta (rys. 1). Równanie różniczkowe osi odkształconej takiego pręta można przedstawić w postaci następującego układu równań:

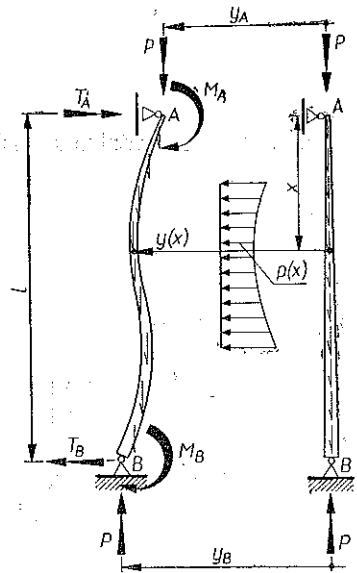
$$(2.1) \quad \frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left[G(x) \frac{dy(x)}{dx} \right] = -p(x),$$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{B(x)},$$

gdzie

$$(2.2) \quad G(x) = r(x) + P, \quad r(x) = g \int_0^x \rho(z) dz,$$

przy czym $B(x) = E(x) J(x)$ oznacza sztywność zginania pręta, $\rho(x)$ masę przypadającą na jednostkę długości pręta, g przyspieszenie ziemskie; pozostałe oznaczenia wyjaśniono na rys. 1.



Rys. 1

Całkując dwukrotnie równanie (2.1)₁, otrzymujemy

$$(2.3) \quad M(x) = \int_0^x G(z) \frac{dy(z)}{dz} dz - \int_0^x (x-z)p(z) dz + C_1 x + C_2.$$

Wykonując całkowanie przez części oraz wykorzystując związki

$$(2.4) \quad G(0) = P, \quad \frac{dG(x)}{dx} = g\varrho(x),$$

doprowadzamy wyrażenie (2.3) do postaci

$$(2.5) \quad M(x) = G(x)y(x) - Py_A - g \int_0^x \varrho(z)y(z) dz - \int_0^x (x-z)p(z) dz + C_1 x + C_2.$$

Podstawiając do równania (2.5) kolejno $x = 0$ i $x = l$ znajdujemy stałe całkowania:

$$C_2 = M_A,$$

$$(2.6) \quad C_1 = \frac{1}{l} \left[Py_A - Py_B - M_A - M_B - y_B g \int_0^l \varrho(x) dx + g \int_0^l \varrho(x)y(x) dx + \int_0^l (l-z)p(z) dz \right].$$

Równanie odkształconej osi pręta przedstawiamy w postaci szeregu Fouriera:

$$(2.7) \quad y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin \alpha_m x, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{l}.$$

Pierwszą i drugą pochodną funkcji (2.7) wyrażamy w rozważanym przypadku za pomocą wzorów

$$(2.8) \quad \frac{dy(x)}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[y_m \alpha_m + \frac{2}{l} y_B (-1)^m - \frac{2}{l} y_A \right] \cos \alpha_m x + \psi,$$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \left[y_m \alpha_m + \frac{2}{l} y_B (-1)^m - \frac{2}{l} y_A \right] \alpha_m \sin \alpha_m x,$$

gdzie

$$(2.9) \quad \psi = \frac{y_B - y_A}{l}.$$

Wykorzystując wzory (2.6) i (2.7) oraz podstawiając wyrażenia (2.5), (2.8)₂ do równania (2.1)₂, otrzymujemy

$$(2.10) \quad B(x) \sum_{m=1}^{\infty} \left[y_m \alpha_m + \frac{2}{l} y_B (-1)^m - \frac{2}{l} y_A \right] \alpha_m \sin \alpha_m x =$$

$$(2.10) \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{l} \left[M_A (l-x) - M_B x - P y_A (l-x) - P y_B x - r(l) y_B x + \right. \\ &+ x \int_0^l (l-z) p(z) dz - l \int_0^x (x-z) p(z) dz \left. \right] + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \left[P \sin \alpha_m x + \right. \\ &\left. + r(x) \sin \alpha_m x - r_m(x) + r_m(l) \frac{x}{l} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \begin{aligned} r(l) &= g \int_0^l \varrho(x) dx, \\ r_m(x) &= g \int_0^x \varrho(z) \sin \alpha_m z dz, \quad r_m(l) = g \int_0^l \varrho(x) \sin \alpha_m x dx. \end{aligned}$$

Następnie zastosujemy metodę ortogonalizacyjną. Dzieliąc obie strony równania (2.10) przez funkcję $B(x)$ oraz mnożąc przez $\sin \alpha_i x$ i całkując względem zmiennej x w granicach $x=0$, $x=l$, otrzymujemy po prostych przekształceniach następujący nieskończony układ algebraicznych, niejednorodnych równań liniowych:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} y_i &= \frac{2}{l \alpha_i} [y_A - y_B (-1)^i] + \frac{2}{l \alpha_i^2} [M_A S_i^{(1)} + M_B S_i^{(2)} - P y_A S_i^{(1)} + P y_B S_i^{(2)} + \\ &+ r(l) y_B S_i^{(2)}] + \frac{F_i}{\alpha_i^2} + \frac{1}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m (P b_{im} + Y_{im}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{aligned} S_i^{(1)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{l-x}{B(x)} \sin \alpha_i x dx, \quad S_i^{(2)} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x \sin \alpha_i x}{B(x)} dx, \\ b_{im} &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\sin \alpha_i x}{B(x)} \sin \alpha_m x dx, \quad Y_{im} = C_{im}^{(1)} - C_{im}^{(2)} - \frac{2}{l} S_i^{(2)} r_m(l), \\ C_{im}^{(1)} &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{r(x)}{B(x)} \sin \alpha_i x \sin \alpha_m x dx, \\ C_{im}^{(2)} &= \frac{2}{l} \int_0^l \frac{r_m(x)}{B(x)} \sin \alpha_i x dx, \\ F_i &= \frac{2}{l^2} \int_0^l \frac{\sin \alpha_i x}{B(x)} \left[x \int_0^l (l-z) p(z) dz - l \int_0^x (x-z) p(z) dz \right] dx. \end{aligned}$$

Wyrażenie (2.13)₇ można również przedstawić w innej postaci. Wprowadzając funkcję

$$K(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq z, \\ 1 & \text{dla } x \geq z \end{cases}$$

oraz korzystając ze związków

$$\int_0^x f(z) dz = \int_0^l K(x, z) f(z) dz, \quad \int_0^z f(x) dx = \int_0^l [1 - K(x, z)] f(x) dx,$$

doprowadzamy wyrażenie to do postaci

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{2}{l^2} \int_0^l p(z) \left[z \int_0^z \frac{(l-x) \sin a_i x}{B(x)} dx + l \int_0^z \frac{(x-z) \sin a_i x}{B(x)} dx \right] dz = \\ &= \frac{2}{l^2} \int_0^l p(z) \left[(l-z) \int_0^z \frac{x \sin a_i x}{B(x)} dx + z \int_z^l \frac{(l-x) \sin a_i x}{B(x)} dx \right] dz. \end{aligned}$$

Układ równań (2.12) bardzo się upraszcza w przypadku pręta podpartego w obu końcach przegubowo-przesuwnie w sposób uniemożliwiający przesunięcia podpór w kierunku prostopadłym do osi pręta. Zachodzą w tym przypadku warunki

$$(2.14) \quad y_A = y_B = 0, \quad M_A = M_B = 0.$$

Układ równań (2.12) przyjmuje w tym przypadku postać

$$(2.15) \quad \sum_{m=1}^{\infty} y_m \left[(Pb_{im} + Y_{im}) - a_m^2 \delta_{im} \right] = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie δ_{im} oznacza symbol Kroneckera.

Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań (2.15) umożliwia obliczenie współczynników y_m oraz wyznaczenie w postaci szeregu trygonometrycznego równania osi odkształconej rozważanego pręta.

Przyrównując do zera wyznacznik podstawowy układu równań (2.15) otrzymujemy równanie

$$(2.16) \quad \det [(Pb_{im} + Y_{im}) - a_m^2 \delta_{im}] = 0, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots,$$

którego najmniejszy pierwiastek umożliwia wyznaczenie siły krytycznej P_{kr} , występującej przy wyboczeniu pręta.

3. Wzory dla brzegowych wielkości momentów zginających i sił poprzecznych

Pręt utwierdzony w obu końcach. Rozważmy najpierw dość ogólny przypadek pręta utwierdzonego sprężystości w obu końcach w taki sposób, że końce pręta mogą doznawać obrotów oraz przesunąć w kierunku prostopadłym do osi pręta.

W celu wyznaczenia brzegowych wielkości momentów zginających wykorzystamy warunki

$$(3.1) \quad \left[\frac{dy(x)}{dx} \right]_{x=0} = \varphi_A, \quad \left[\frac{dy(x)}{dx} \right]_{x=l} = \varphi_B,$$

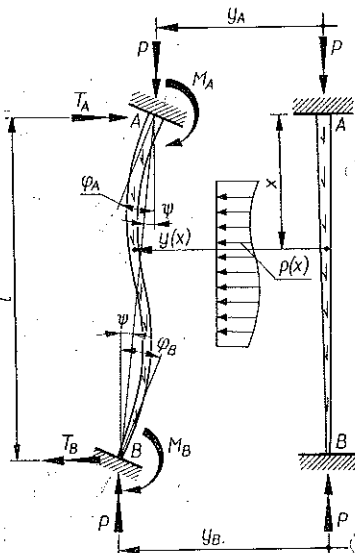
które po uwzględnieniu wzoru (2.8)₁ przyjmują postać

$$(3.2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left[y_m a_m + \frac{2}{l} y_B (-1)^m - \frac{2}{l} y_A \right] + \psi = \varphi_A,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[y_m a_m + \frac{2}{l} y_B (-1)^m - \frac{2}{l} y_A \right] (-1)^m + \psi = \varphi_B,$$

gdzie

$$\psi = \frac{y_B - y_A}{l}.$$



Rys. 2

Podstawiając wyrażenie (2.12) do równań (3.2), otrzymujemy następujący układ równań:

$$(3.3) \quad M_A J_1 + M_B J_2 = \varphi_A - \psi + PJ_1 y_A - PJ_2 y_B - r(l) J_2 y_B - Q_1 -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} y_m [PS_m^{(1)} + K_m^{(1)} - \bar{K}_m^{(1)} - r_m(l) J_2],$$

$$M_A J_2 + M_B J_3 = \varphi_B - \psi + PJ_2 y_A - PJ_3 y_B - r(l) J_3 y_B - Q_2 -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} y_m [PS_m^{(2)} + K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} - r_m(l) J_3],$$

gdzie

$$(3.4) \quad J_1 = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(1)}}{a_i} = J_3 - 2J_4 + J_5,$$

$$J_2 = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(2)}}{a_i} = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(1)} (-1)^i}{a_i} = J_3 - J_4,$$

$$J_3 = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(2)} (-1)^i}{a_i} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2}{B(x)} dx,$$

$$(3.4) \quad [c.d.] \quad J_4 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x}{B(x)} dx, \quad J_5 = \int_0^l \frac{dx}{B(x)},$$

$$K_m^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{im}^{(1)}}{\alpha_i} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{r(x)}{B(x)} (l-x) \sin \alpha_m x dx,$$

$$K_m^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{im}^{(1)} (-1)^i}{\alpha_i} = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{r(x)}{B(x)} x \sin \alpha_m x dx,$$

(3.5)

$$\bar{K}_m^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{im}^{(2)}}{\alpha_i} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{r_m(x)}{B(x)} (l-x) dx,$$

$$\bar{K}_m^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{im}^{(2)} (-1)^i}{\alpha_i} = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{r_m(x)}{B(x)} x dx ;$$

(3.6)

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\alpha_i} = \int_0^l H_1(z) p(z) dz,$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i (-1)^i}{\alpha_i} = -\int_0^l H_2(z) p(z) dz ;$$

(3.7)

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{l-z}{l^2} \int_0^z \frac{x(l-x)}{B(x)} dx + \frac{z}{l^2} \int_z^l \frac{(l-x)^2}{B(x)} dx = \\ &= \frac{z}{l^2} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{B(x)} dx + \frac{1}{l} \int_0^z \frac{(l-x)(x-z)}{B(x)} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{l-z}{l^2} \int_0^z \frac{x^2}{B(x)} dx + \frac{z}{l^2} \int_z^l \frac{x(l-x)}{B(x)} dx = \\ &= \frac{z}{l^2} \int_0^l \frac{x(l-x)}{B(x)} dx + \frac{1}{l} \int_0^z \frac{x(x-z)}{B(x)} dx. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.3) otrzymujemy następujące wzory na momenty zginające, występujące na końcach pręta:

$$(3.8) \quad M_A = M_A^0 + M_A^*, \quad M_B = M_B^0 + M_B^*,$$

gdzie

$$(3.9) \quad M_A^0 = \frac{1}{D} (J_3 \varphi_A - J_2 \varphi_B - J_4 \psi) + P y_A - \sum_{m=1}^{\infty} y_m (P X_m^{(1)} + U_m^{(1)}),$$

$$M_B^0 = \frac{1}{D} (J_1 \varphi_B - J_2 \varphi_A - J_6 \psi) - [P + r(l)] y_B - \sum_{m=1}^{\infty} y_m [P X_m^{(2)} + U_m^{(2)} - r_m(l)];$$

$$(3.10) \quad M_A^* = -\frac{1}{D} (J_3 Q_3 + J_4 Q_2) = -\int_0^l L_1(z) p(z) dz,$$

$$M_B^* = -\frac{1}{D} (-J_2 Q_3 + J_6 Q_2) = -\int_0^l L_2(z) p(z) dz;$$

$$(3.11) \quad D = J_1 J_3 - J_2^2 = J_3 J_5 - J_4^2, \quad J_6 = J_5 - J_4;$$

$$(3.12) \quad X_m^{(1)} = \frac{1}{D} (J_3 S_m^{(3)} + J_4 S_m^{(2)}) = \int_0^l I_1(x) \sin \alpha_m x dx,$$

$$X_m^{(2)} = \frac{1}{D} (-J_2 S_m^{(3)} + J_6 S_m^{(2)}) = \int_0^l I_2(x) \sin \alpha_m x dx;$$

$$(3.13) \quad U_m^{(1)} = \frac{J_3}{D} (K_m^{(3)} - \bar{K}_m^{(3)}) + \frac{J_4}{D} (K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)}) = \int_0^l I_1(x) [r(x) \sin \alpha_m x - r_m(x)] dx,$$

$$U_m^{(2)} = -\frac{J_2}{D} (K_m^{(3)} - \bar{K}_m^{(3)}) + \frac{J_4}{D} (K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)}) = \int_0^l I_2(x) [r(x) \sin \alpha_m x - r_m(x)] dx;$$

$$(3.14) \quad S_m^{(3)} = S_m^{(1)} - S_m^{(2)} = \int_0^l \frac{\sin \alpha_m x}{B(x)} dx,$$

$$K_m^{(3)} = K_m^{(1)} - K_m^{(2)} = \int_0^l \frac{r(x)}{B(x)} \sin \alpha_m x dx,$$

$$\bar{K}_m^{(3)} = \bar{K}_m^{(1)} - \bar{K}_m^{(2)} = \int_0^l \frac{r_m(x)}{B(x)} dx,$$

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = \int_0^l H_3(z) p(z) dz ;$$

$$(3.15) \quad H_3(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{l-z}{l} \int_0^z \frac{x dx}{B(x)} + \frac{z}{l} \int_z^l \frac{l-x}{B(x)} dx = \\ = \frac{z}{l} \int_0^l \frac{l-x}{B(x)} dx + \int_0^z \frac{x-z}{B(x)} dx .$$

$$(3.16) \quad L_1(z) = z + \int_0^z (x-z) I_1(x) dx, \quad L_2(z) = \int_0^z (x-z) I_2(x) dx, \\ I_1(x) = \frac{J_3 l - J_4 x}{DIB(x)}, \quad I_2(x) = \frac{-J_2 l - J_6 x}{DIB(x)} .$$

Siły poprzeczne, występujące na końcach pręta, wyznaczamy na podstawie wzorów

$$(3.17) \quad T_A = \left[\frac{dM(x)}{dx} - G(x) \frac{dy(x)}{dx} \right]_{x=0}, \quad T_B = \left[\frac{dM(x)}{dx} - G(x) \frac{dy(x)}{dx} \right]_{x=l}$$

Wykorzystując wzór (2.3), otrzymujemy

$$(3.18) \quad T_A = C_1 = T_A^0 + T_A^*, \quad T_B = C_1 - l \int_0^l p(z) dz = T_B^0 + T_B^*,$$

gdzie stała C_1 wyraża się za pomocą wzoru (2.6).

Podstawiając do wzoru (2.6) wyrażenia (3.8)–(3.10) oraz wykonując proste przekształcenia znajdujemy

$$(3.19) \quad T_A^0 = T_B^0 = -\frac{1}{DI} (J_4 \varphi_A + J_6 \varphi_B - J_5 \psi) + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} y_m (PX_m^{(3)} + U_m^{(3)}), \\ T_A^* = \frac{1}{l} \int_0^l L_3(z) p(z) dz, \quad T_B^* = \frac{1}{l} \int_0^l L_4(z) p(z) dz,$$

gdzie

$$(3.20) \quad X_m^{(3)} = X_m^{(1)} + X_m^{(2)} = \int_0^l I_3(x) \sin a_m x dx, \\ U_m^{(3)} = U_m^{(1)} + U_m^{(2)} = \int_0^l I_3(x) [r(x) \sin a_m x - r_m(x)] dx, \\ L_3(z) = l + \int_0^z (x-z) I_3(x) dx, \quad L_4(z) = L_3(z) - l,$$

$$(3.20) \quad [c.d.] \quad I_3(x) = I_1(x) + I_2(x) = \frac{J_4 l - J_5 x}{DIB(x)}.$$

Podstawiając wyrażenia (3.8)–(3.10) do układu równań (2.12) otrzymujemy następujący nieskończony układ algebraicznych równań liniowych:

$$(3.21) \quad y_i = \frac{1}{I\alpha_i^2} \left\{ 2\alpha_i [y_A - y_B (-1)^i] + 2(X_i^{(1)} \varphi_A + X_i^{(2)} \varphi_B - X_i^{(3)} \psi) - N_i^{(1)} - \sum_{m=1}^{\infty} y_m (PA_{im}^{(1)} + \Gamma_{im}^{(1)}) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

który można również przedstawić w postaci:

$$(3.22) \quad \sum_{m=1}^{\infty} y_m (I\alpha_m^2 \delta_{im} + PA_{im}^{(1)} + \Gamma_{im}^{(1)}) = 2\alpha_i [y_A - y_B (-1)^i] + 2(X_i^{(1)} \varphi_A + X_i^{(2)} \varphi_B + X_i^{(3)} \psi) - N_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(3.23) \quad \begin{aligned} A_{im}^{(1)} &= 2(S_i^{(3)} X_m^{(1)} + S_i^{(2)} X_m^{(3)}) - I b_{im}, \\ \Gamma_{im}^{(1)} &= 2(S_i^{(3)} U_m^{(1)} + S_i^{(2)} U_m^{(3)} - \\ &\quad - I(C_{im}^{(1)} - C_{im}^{(2)})), \\ N_i^{(1)} &= 2(Q_3 X_i^{(1)} + Q_2 X_i^{(3)} - IF_i). \end{aligned}$$

Pręt utwierdzony w końcu A i przegubowo podparty w końcu B . W tym przypadku z warunku $M_B = 0$ znajdujemy

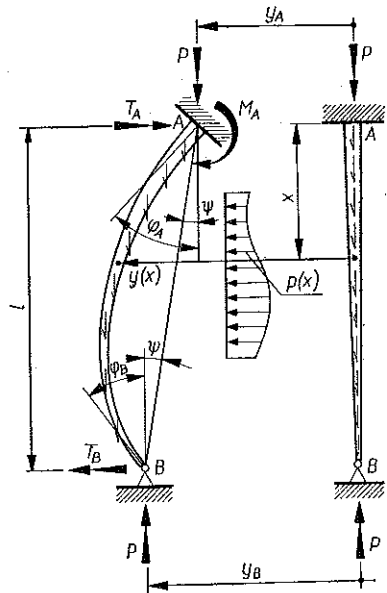
$$(3.24) \quad \varphi_B = -\frac{1}{J_1} \left\{ -J_2 \varphi_A - J_6 \psi - D y_B [P + r(I)] + J_2 Q_3 - J_6 Q_2 - D \sum_{m=1}^{\infty} y_m [P X_m^{(2)} + U_m^{(2)} - r_m(I)] \right\}.$$

Podstawiając wyrażenie (3.24) do pierwszego ze wzorów (3.9) oraz wykorzystując wzory (3.8) i (3.10) na momenty M_A , M_A^0 , M_A^* , otrzymujemy

$$(3.25) \quad M_A = M_A^0 + M_A^*,$$

gdzie

$$(3.26) \quad \begin{aligned} M_A^0 &= \frac{1}{J_1} \left\{ \varphi_A - \psi - J_2 y_B [P + r(I)] - \sum_{m=1}^{\infty} y_m [P S_m^{(1)} + K_m^{(1)} - \bar{K}_m^{(1)} - J_2 r_m(I)] \right\} + P y_A, \\ M_A^* &= -\frac{Q_1}{J_1}. \end{aligned}$$



Rys. 3

Następnie wyznaczamy siły poprzeczne występujące na końcach pręta. W tym celu podstawiamy wyrażenia (3.25) i (3.26) do wzoru (2.6) oraz przyjmujemy $M_B = 0$. Ostatecznie na podstawie wzorów (3.18) otrzymujemy

$$(3.27) \quad T_A = T_A^0 + T_A^*, \quad T_B = T_B^0 + T_B^*,$$

$$T_A^0 = T_B^0 = -\frac{1}{J_1 l} \left\{ \varphi_A - \psi + [P + r(l)] J_6 y_B - \sum_{m=1}^{\infty} y_m [P S_m^{(1)} + K_m^{(1)} - \bar{K}_m^{(1)} + J_6 r_m(l)] \right\},$$

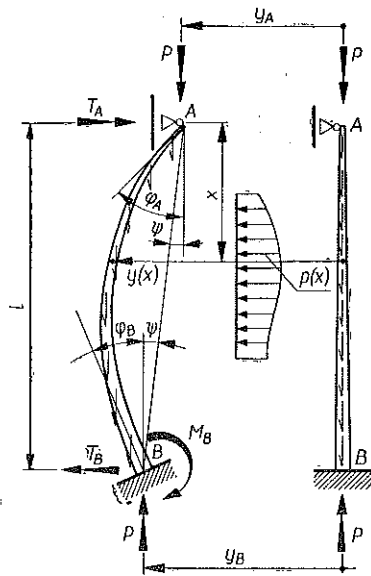
gdzie

$$(3.28) \quad T_A^* = \frac{1}{l} \int_0^l L_5(z) p(z) dz, \quad T_B^* = \frac{1}{l} \int_0^l L_6(z) p(z) dz,$$

$$L_5(z) = I + \frac{1}{J_1 l} \int_0^z \frac{(l-x)(x-z)}{B(x)} dx, \quad L_6(z) = L_5(z) - I.$$

Wykorzystując wzory (3.25) i (3.26) oraz przyjmując $M_B = 0$, doprowadzamy w rozważanym przypadku układ równań (2.12) do postaci

$$(3.29) \quad y_i = \frac{1}{I \alpha_i^2} \left\{ 2a_i [y_A - y_B (-1)^i] + 2 \frac{S_i^{(1)}}{J_1} (\varphi_A - \psi) + 2 \frac{D}{J_1} X_i^{(2)} [P + r(l)] y_B - N_i^{(2)} - \sum_{m=1}^{\infty} y_m (P A_{im}^{(2)} + \Gamma_{im}^{(2)}) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$



Rys. 4

gdzie

$$(3.30) \quad N_i^{(2)} = \frac{2}{J_1} S_i^{(1)} Q_1 - I F_i,$$

$$A_{im}^{(2)} = \frac{2}{J_1} S_i^{(1)} S_m^{(1)} - I b_{im},$$

$$\Gamma_{im}^{(2)} = \frac{2}{J_1} S_i^{(1)} (K_m^{(1)} - \bar{K}_m^{(1)}) - I (C_{im}^{(1)} - C_{im}^{(2)}) + 2 \frac{D}{J_1} X_i^{(2)} r_m(l).$$

Pręt utwierdzony w końcu B i przegubowo podparty w końcu A. W tym przypadku z warunku $M_A = C$ znajdujemy

$$(3.31) \quad \varphi_A = -\frac{1}{J_3} \left[-J_2 \varphi_B - J_4 \psi + P D y_A - J_3 Q_3 - J_4 Q_2 - D \sum_{m=1}^{\infty} y_m (P X_m^{(1)} + U_m^{(1)}) \right].$$

Podstawiając wyrażenie (3.31) do drugiego ze wzorów (3.9) oraz wykorzystując wzory (3.8)–(3.10) na momenty M_B , M_B^0 , M_B^* , otrzymujemy

$$(3.32) \quad M_B = M_B^0 + M_B^*,$$

gdzie

$$(3.33) \quad M_B^0 = \frac{1}{J_3} \left\{ \varphi_B - \psi + PJ_2 y_A - \sum_{m=1}^{\infty} y_m [PS_m^{(2)} + K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} - J_3 r_m(l)] \right\} -$$

$$M_B^* = -\frac{Q_2}{J_3} - [P + r(l)] y_B,$$

Następnie wyznaczmy siły poprzeczne, występujące na końcach pręta. W tym celu podstawiamy wyrażenia (3.32) i (3.33) do wzoru (2.6) oraz przyjmujemy $M_A = 0$. Na podstawie wzorów (3.18) otrzymujemy

$$(3.34) \quad T_A = T_A^0 + T_A^*, \quad T_B = T_B^0 + T_B^*,$$

gdzie

$$(3.35) \quad T_A^0 = T_B^0 = -\frac{1}{J_3 l} \left\{ \varphi_B - \psi - PJ_4 y_A - \sum_{m=1}^{\infty} y_m [PS_m^{(2)} + K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} - J_3 r_m(l)] \right\},$$

$$T_A^* = \frac{1}{l} \int_0^l L_7(z) p(z) dz, \quad T_B^* = \frac{1}{l} \int_0^l L_8(z) p(z) dz,$$

$$L_7(z) = \frac{1}{J_3 l} \int_z^l \frac{x(x-z)}{B(x)} dx, \quad L_8(z) = L_7(z) - l.$$

Wykorzystując wzory (3.32) i (3.33) oraz przyjmując $M_A = 0$, doprowadzamy w tym przypadku układ równań (2.12) do postaci

$$(3.36) \quad y_i = \frac{1}{l\alpha_i^2} \left\{ 2\alpha_i [y_A - y_B (-1)^i] + 2 \frac{S_i^{(2)}}{J_3} (\varphi_B - \psi) - 2 \frac{D}{J_3} X_i^{(1)} P y_A - N_i^{(3)} - \sum_{m=1}^{\infty} y_m (PA_{im}^{(3)} + \Gamma_{im}^{(3)}) \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

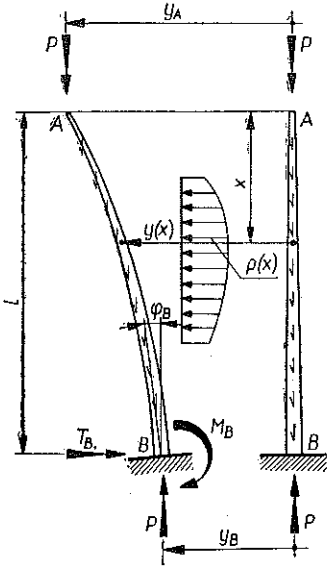
gdzie

$$(3.37) \quad N_i^{(3)} = \frac{2}{J_3} S_i^{(2)} Q_2 - l F_i, \quad A_{im}^{(3)} = \frac{2}{J_3} S_i^{(2)} S_m^{(2)} - l b_{im},$$

$$\Gamma_{im}^{(3)} = \frac{2}{J_3} S_i^{(2)} (K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)}) - l (C_{im}^{(1)} - C_{im}^{(2)}).$$

Pręt utwierdzony w węźle B ze swobodnym końcem A . W tym przypadku na podstawie wzoru (3.18) z warunku $T_A = 0$ znajdujemy amplitudę przemieszczenia

$$(3.38) \quad y_A = \frac{1}{PIJ_4 - 1} \left\{ l\varphi_B - y_B - l \sum_{m=1}^{\infty} y_m [PS_m^{(2)} + K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} - J_3 r_m(l)] - \right. \\ \left. - J_3 l \int_0^l L_7(z) p(z) dz \right\}.$$



Rys. 5

Podstawiając wyrażenie (3.38) do drugiego ze wzorów (3.9) oraz wykorzystując wzór (3.10) na M_B^* otrzymujemy

$$M_B = M_B^0 + M_B^*, \\ M_B^0 = \frac{1}{PIJ_4 - 1} \left\{ Pl\varphi_B - [P^2IJ_4 + \right. \\ \left. + (PIJ_4 - 1)r(l)] y_B - Pl \sum_{m=1}^{\infty} y_m [PS_m^{(2)} + \right. \\ \left. + K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} - J_3 r_m(l)] \right\}, \quad (3.39)$$

$$M_B^* = -\frac{Q_2}{J_3} \frac{PIJ_2 + 1}{PIJ_4 - 1} \int_0^l L_7(z) p(z) dz.$$

Siłę poprzeczną można obliczyć w tym przypadku z następującego znanego wzoru:

$$(3.40) \quad T_B = T_B^* = - \int_0^l p(z) dz.$$

Następnie wyprowadzimy układ równań, który w tym przypadku muszą spełniać współczynniki y_m .

Podstawiając wyrażenia (3.39) do układu równań (2.12) oraz wykonując proste przekształcenia otrzymujemy następujący nieskończony układ algebraicznych równań liniowych:

$$(3.41) \quad y_i = \frac{2}{l\alpha_i^2 (PIJ_4 - 1)} \left\{ (\alpha_i - PS_i^{(3)}) l\varphi_B - [\alpha_i - PS_i^{(3)} + PIJ_4 \alpha_i (-1)^i - \right. \\ \left. - \alpha_i (-1)^i \right] y_B - \frac{l}{2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m [2(\alpha_i - PS_i^{(3)}) (PS_m^{(2)} + K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} - J_3 r_m(l)) + \\ \left. + (PIJ_4 - 1)(Pb_{im} + Y_{im}) \right\} - \frac{2}{l\alpha_i^2 (PIJ_4 - 1)} \left\{ [J_3 l(\alpha_i - PS_i^{(1)}) + \right. \\ \left. + S_i^{(2)}(1 + PIJ_2)] \int_0^l L_7(z) p(z) dz + \frac{Q_2}{J_3} S_i^{(2)}(PIJ_4 - 1) \right\} + \frac{F_i}{\alpha_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

Wszystkie wyprowadzone wzory dla brzegowych wielkości statycznych oraz odpowiadające im w rozważonych przypadkach podparcia pręta nieskończone

układy algebraicznych równań liniowych umożliwiają rozwiązywanie różnych problemów z zakresu jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) oraz wybooczenia płaskich ustrojów prętowych, złożonych z niejednorodnych prętów o zmiennych przekrojach poprzecznych. Sposób rozwiązywania tych problemów polega na zastosowaniu postępowania podobnego do metody przemieszczeń (odkształceń) w rozwiązaniach różnych zagadnień z zakresu jednoczesnego zginania i ściskania oraz wybooczenia ustrojów prętowych, złożonych z prętów jednorodnych o stałych przekrojach poprzecznych.

Wykorzystując warunki równowagi momentów w węzłach rozważanego ustroju oraz warunki równowagi rzutów sił w wydzielonych przekrojach ustroju można na podstawie wyprowadzonych wzorów dla brzegowych wielkości statycznych ustawić układ algebraicznych równań, zawierający na razie nieznanne przemieszczenia brzegowe φ , γ . Rozwiązanie tego układu równań umożliwi wyrażenie przemieszczeń brzegowych za pomocą wzorów, zawierających niewiadome współczynniki y_m szeregów Fouriera, opisujących równania osi odkształconych poszczególnych prętów. Następnie wyrażone w ten sposób przemieszczenia brzegowe podstawiamy do nieskończonych układów równań, ustawionych dla różnych prętów rozważanego ustroju. Otrzymujemy ostatecznie układ sprzężonych nieskończonych układów algebraicznych równań z niewiadomymi współczynnikami y_m szeregów Fouriera, opisujących równania osi odkształconych poszczególnych prętów. W przypadku jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań umożliwi obliczenie wyżej wymienionych współczynników Fouriera. Znając te współczynniki można obliczyć przemieszczenia brzegowe, a następnie wyznaczyć brzegowe momenty zginające i siły poprzeczne. W przypadku wybooczenia otrzymujemy układ sprzężonych nieskończonych układów algebraicznych jednorodnych równań liniowych z niewiadomymi współczynnikami Fouriera. Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego daje równanie charakterystyczne, które umożliwia z dowolnym przybliżeniem obliczenie obciążenia krytycznego.

4. Równania całkowe

Doprowadzimy najpierw do równania całkowego Fredholma układ równań algebraicznych (2.12). W tym celu wykorzystamy następujące znane sumy nieskończonych szeregów funkcyjnych:

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i} = \frac{l-x}{2}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \sin a_i x}{a_i} = -\frac{x}{2},$$

$$0 < x < 2l, \quad -l < x < l,$$

$$S(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x \sin a_i z}{a_i^2} = \begin{cases} \frac{x}{2}(l-z) & \text{dla } x < z, \\ \frac{z}{2}(l-x) & \text{dla } x > z. \end{cases}$$

Uwzględniając wzory (2.13), (3.14) i (4.1)₂ oraz zmieniając kolejność sumowania i całkowania, znajdujemy

$$(4.2) \quad \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(1)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z = H_1(z), \quad \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(2)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z = -H_2(z),$$

$$\frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(3)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z = H_3(z),$$

gdzie funkcje $H_n(z)$ ($n = 1, 2, 3$) wyrażają się za pomocą wzorów (3.7) i (3.15).

Mnożąc obie strony równania (2.12) przez $\sin \alpha_i z$ oraz wykonując sumowanie względem wskaźnika i od $i = 1$ do nieskończoności i wykorzystując wzory (4.1) i (4.2) otrzymujemy następujące równanie całkowe:

$$(4.3) \quad y(z) = y_A \left[1 - \frac{z}{l} - PH_1(z) \right] + y_B \left[\frac{z}{l} - PH_2(z) - r(l) H_2(z) \right] +$$

$$+ M_A H_1(z) - M_B H_2(z) + F(z) + PO(z) + Y_0(z),$$

gdzie

$$F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i \sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} = \int_0^z p(s) \mathcal{L}(s, z) ds + \int_z^l p(s) \mathcal{L}(z, s) ds =$$

$$= \int_0^l p(s) \mathcal{L}(z, s) ds + \int_0^z p(s) \left[\int_0^z \frac{(x-s)(z-x)}{B(x)} dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^s \frac{(x-s)(z-x)}{B(x)} dx \right] ds,$$

$$(4.4) \quad O(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m b_{im} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{y(x)}{B(x)} S(x, z) dx =$$

$$= \frac{1}{l} \left[(l-z) \int_0^z \frac{y(x)}{B(x)} x dx + z \int_z^l \frac{y(x)}{B(x)} (l-x) dx \right] =$$

$$= \frac{z}{l} \int_0^l \frac{y(x)}{B(x)} (l-x) dx + \int_0^z \frac{y(x)}{B(x)} (x-z) dx,$$

$$Y_0(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m Y_{im} = Y_1(z) - Y_2(z) - Y_3(z),$$

We wzorach (4.4) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\mathcal{L}(s, z) = (l-z) \frac{l-s}{l^2} \int_0^s \frac{x^2}{B(x)} dx + (l-z) \frac{s}{l^2} \int_s^z \frac{x(l-x)}{B(x)} dx +$$

$$+ \frac{sz}{l^2} \int_z^l \frac{(l-x)^2}{B(x)} dx = \frac{sz}{l^2} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{B(x)} dx + \frac{l-z}{l} \int_0^z \frac{x(x-s)}{B(x)} dx +$$

$$+ \frac{s}{l} \int_0^z \frac{(l-x)(x-z)}{B(x)} dx,$$

$$(4.5) \quad Y_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m C_{im}^{(1)} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{y(x)}{B(x)} r(x) S(x, z) dx =$$

$$= \frac{l-z}{l} \int_0^z \frac{y(x)}{B(x)} r(x) x dx + \frac{z}{l} \int_z^l \frac{y(x)}{B(x)} (l-x) r(x) dx =$$

$$= \frac{z}{l} \int_0^l \frac{y(x)}{B(x)} r(x) (l-x) dx + \int_0^z \frac{y(x)}{B(x)} r(x) (x-z) dx,$$

$$Y_2(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m C_{im}^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{f(x)}{B(x)} S(x, z) dx =$$

$$= \frac{l-z}{l} \int_0^z \frac{f(x)}{B(x)} x dx + \frac{z}{l} \int_z^l \frac{f(x)}{B(x)} (l-x) dx =$$

$$= \frac{z}{l} \int_0^l \frac{f(x)}{B(x)} (l-x) dx + \int_0^z \frac{f(x)}{B(x)} (x-z) dx,$$

$$Y_3(z) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i^{(2)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z \sum_{m=1}^{\infty} y_m r_m(l) = -f(l) H_2(z),$$

gdzie

$$(4.6) \quad f(x) = g \int_0^x \varrho(s) y(s) ds, \quad f(l) = g \int_0^l \varrho(x) y(x) dx.$$

Pręt w obu końcach utwierdzony. Zmieniając kolejność sumowania i całkowania doprowadzamy wzory (3.9) i (3.19) do następującej postaci:

$$(4.7) \quad M_A^0 = \frac{1}{D} (J_3 \varphi_A - J_2 \varphi_B - J_4 \psi) + P y_A - P X_1 - U_1,$$

$$M_B^0 = \frac{1}{D} (J_1 \varphi_B - J_2 \varphi_A - J_6 \psi) - [P+r(l)] y_B - P X_2 - U_2 + f(l),$$

$$T_A^0 = T_B^0 = -\frac{1}{Dl} (J_4 \varphi_A + J_6 \varphi_B - J_5 \psi) + \frac{1}{l} (P X_3 + U_3),$$

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad [c.d] \quad X_1 &= \int_0^l I_1(x) y(x) dx, & X_2 &= \int_0^l I_2(x) y(x) dx, \\
 X_3 &= X_1 + X_2 = \int_0^l I_3(x) y(x) dx, \\
 U_1 &= \int_0^l I_1(x) [r(x) y(x) - f(x)] dx, \\
 U_2 &= \int_0^l I_2(x) [r(x) y(x) - f(x)] dx, \\
 U_3 &= U_1 + U_2 = \int_0^l I_3(x) [r(x) y(x) - f(x)] dx.
 \end{aligned}$$

Występujące w powyższych wzorach funkcje $I_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) wyrażają się za pomocą wzorów (3.16) i (3.20)₄.

Następnie doprowadzimy układ równań (3.21) do równania całkowego. W tym celu mnożymy obie strony równania (3.21) przez $\sin \alpha_i z$ oraz wykonujemy sumowanie względem wskaźnika i od $i = 1$ do nieskończoności.

Wykorzystując wzory (3.12), (3.20)₁ i (4.1)₂, znajdujemy

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{(n)} \sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} &= \frac{l-z}{l} \int_0^z x I_n(x) dx + \frac{z}{l} \int_z^l (l-x) I_n(x) dx = \\
 &= \int_0^z (x-z) I_n(x) dx + \frac{z}{l} \int_0^l (l-x) I_n(x) dx, \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając związki

$$(4.9) \quad \int_0^l (l-x) I_1(x) dx = \int_0^l (l-x) I_3(x) dx = l, \quad \int_0^l (l-x) I_2(x) dx = 0,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{(1)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z &= z + \int_0^z (x-z) I_1(x) dx = L_1(z), \\
 \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{(2)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z &= \int_0^z (x-z) I_2(x) dx = L_2(z), \\
 \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{(3)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z &= z + \int_0^z (x-z) I_3(x) dx = L_4(z) + z.
 \end{aligned}$$

Postępując w sposób wyżej opisany oraz wykorzystując wzory (4.1), (4.2), (4.4) i (4.10), doprowadzamy równanie (3.21) do następującego równania całkowego:

$$\begin{aligned}
 y(z) &= \frac{y_A}{l} L_3(z) - \frac{y_B}{l} L_4(z) + \varphi_A L_1(z) + \varphi_B L_2(z) - N_1(z) - \\
 &\quad - PA_1(z) - \Gamma_1(z), \\
 N_1(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i^{(1)}}{a_i^2} \sin a_i z = Q_3 L_1(z) + Q_2 [L_4(z) + z] - F(z), \\
 A_1(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i z}{a_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m A_{im}^{(1)} = X_1 H_3(z) - X_3 H_2(z) - O(z), \\
 \Gamma_1(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i z}{a_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \Gamma_{im}^{(1)} = U_1 H_3(z) - U_3 H_2(z) - \\
 &\quad - Y_1(z) + Y_2(z).
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Występujące we wzorach (4.11) funkcje $H_k(z)$, $L_n(z)$, $Y_i(z)$, ($k = 2, 3$; $n = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2$), $F(z)$ i $O(z)$ wyrażają się odpowiednio za pomocą wzorów (3.7), (3.15), (3.16), (4.4) i (4.5).

Łatwo zauważyć, że w przypadku pręta utwierdzonego w obu końcach w sposób uniemożliwiający obrót i przesuw podpór równanie (4.11)₁ upraszcza się do postaci

$$y(z) = -N_1(z) - PA_1(z) - \Gamma_1(z). \tag{4.12}$$

Rozważymy następnie inne przypadki podparcia pręta.

Pręt utwierdzony w końcu A oraz przegubowo podparty w końcu B. Zmieniając kolejność sumowania i całkowania doprowadzamy wzory (3.26) i (3.27) do postaci

$$\begin{aligned}
 M_A^0 &= \frac{1}{J_1} \{ \varphi_A - \psi - [P+r(l)] J_2 y_B - PS_1 - K_1 + \bar{K}_1 + J_2 f(l) \} + P y_A, \\
 T_A^0 &= T_B^0 = - \frac{1}{J_1 l} \{ \varphi_A - \psi + [P+r(l)] J_6 y_B - PS_1 - K_1 + \bar{K}_1 - J_6 f(l) \},
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{l-x}{B(x)} y(x) dx, \\
 K_1 &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{r(x)}{B(x)} (l-x) y(x) dx, \quad \bar{K}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{f(x)}{B(x)} (l-x) dx.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Mnożąc obie strony równania (3.29) przez $\sin a_i z$ oraz sumując względem wskaźnika i od $i = 1$ do nieskończoności i wykorzystując wzory (4.2), (4.4) i (4.5), otrzymujemy równanie całkowe

$$\begin{aligned}
 y(z) &= \frac{y_A}{l} L_5(z) - \frac{y_B}{l} \left\{ L_6(z) - [P+r(l)] \frac{dl}{J_1} L_2(z) \right\} + \frac{\varphi_A}{J_1} H_1(z) - \\
 &\quad - N_2(z) - PA_2(z) - \Gamma_2(z), \\
 N_2(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i^{(2)}}{a_i^2} \sin a_i z = \frac{Q_1}{J_1} H_1(z) - F(z),
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

$$(4.15) \quad \begin{aligned} [c.d.] \quad A_2(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m A_{im}^{(2)} = \frac{S_1}{J_1} H_1(z) - O(z), \\ \Gamma_2(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \Gamma_{im}^{(2)} = \frac{K_1 - \bar{K}_1}{J_1} H_1(z) - Y_1(z) + \\ &\quad + Y_2(z) + \frac{D}{J_1} f(l) L_2(z). \end{aligned}$$

Uwzględniając związek

$$(4.16) \quad H_1(z) = J_1 [z + L_6(z)],$$

doprowadzamy ostatnie z wyrażeń (4.15) do postaci

$$(4.17) \quad \Gamma_2(z) = (K_1 - \bar{K}_1) L_6(z) - \int_0^z \frac{x-z}{B(x)} [r(x)y(x) - f(x)] dx + \\ + \frac{D}{J_1} f(l) L_2(z).$$

Pręt utwierdzony w końcu B oraz przegubowo podparty w końcu A . Zmieniając kolejność sumowania i całkowania doprowadzamy wzory (3.33) i (3.35) do postaci

$$(4.18) \quad M_B^0 = \frac{1}{J_3} [\varphi_B - \psi + PJ_2 y_A - PS_2 - K_2 + \bar{K}_2 + J_3 f(l)] - [P + r(l)] y_B,$$

$$T_A^0 = T_B^0 = -\frac{1}{J_3 l} [\varphi_B - \psi - PJ_4 y_A - PS_2 - K_2 + \bar{K}_2 + J_3 f(l)],$$

gdzie

$$(4.19) \quad S_2 = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{x}{B(x)} y(x) dx, \\ K_2 = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{r(x)}{B(x)} xy(x) dx, \quad \bar{K}_2 = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{f(x)}{B(x)} x dx.$$

Mnożąc obie strony równania (3.36) przez $\sin \alpha_i z$ oraz wykonując sumowanie względem wskaźnika i od $i=1$ do nieskończoności i wykorzystując wzory (4.2), (4.4) i (4.5), otrzymujemy równanie całkowite

$$(4.20) \quad \begin{aligned} y(z) &= \frac{y_A}{l} \left[L_7(z) - P \frac{Dl}{J_3} L_1(z) \right] - \frac{y_B}{l} L_8(z) - \frac{\varphi_B}{J_3} H_2(z) - \\ &\quad - N_3(z) - PA_3(z) - \Gamma_3(z), \\ N_3(z) &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i^{(3)}}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i z = -\frac{Q_2}{J_3} H_2(z) - F(z), \end{aligned}$$

$$A_3(z) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m A_{im}^{(3)} = -\frac{S_2}{J_3} H_2(z) - O(z),$$

$$(4.20) \quad \Gamma_3(z) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_i z}{\alpha_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \Gamma_{im}^{(3)} = \frac{\bar{K}_2 - K_2}{J_3} H_2(z) - Y_1(z) + Y_2(z).$$

Uwzględniając związek

$$(4.21) \quad H_2(z) = J_3 [l - z - L_7(z)],$$

doprowadzamy ostatnie z wyrażeń (4.20) do postaci

$$(4.22) \quad \Gamma_3(z) = (K_2 - \bar{K}_2) L_7(z) + \int_0^l \frac{x-z}{B(x)} [r(x)y(x) - f(x)] dx - \\ - \int_0^z \frac{x-z}{B(x)} [r(x)y(x) - f(x)] dx.$$

Pręt utwierdzony w końcu B ze swobodnym końcem A . Zmieniając kolejność całkowania i sumowania doprowadzamy wzory (3.38) i (3.39) do postaci

$$(4.23) \quad y_A = \frac{1}{PIJ_4 - 1} \left\{ l\varphi_A - y_B - l[PS_2 - K_2 + \bar{K}_2 + J_3 f(l)] - J_3 l \int_0^l L_7(z) p(z) dz \right\}, \\ M_B^0 = \frac{1}{PIJ_4 - 1} \left\{ Pl\varphi_B - P^2 l J_4 y_B - Pl[PS_2 + K_2 - \bar{K}_2 - J_3 f(l)] \right\} - r(l) y_B,$$

gdzie wielkości f , S_2 , K_2 i \bar{K}_2 wyrażają się odpowiednio za pomocą wzorów (4.6) i (4.19)

Mnożąc obie strony równania (3.41) przez $\sin \alpha_i z$ oraz wykonując sumowanie względem wskaźnika i od $i=1$ do nieskończoności i wykorzystując wzory (4.1), (4.2), (4.4) i (4.5), otrzymujemy równanie całkowe

$$(4.24) \quad y(z) = \frac{1}{PIJ_4 - 1} \left\{ [l - z - PIH_3(z)] \varphi_B - [1 - PH_3(z) - PJ_4 z] y_B - \right. \\ \left. - [l - z - PIH_3(z)] [PS_2 + K_2 - \bar{K}_2 - J_3 f(l)] - \right. \\ \left. - [J_3 (l - z - PIH_1(z) - (1 + PIJ_2) H_2(z))] \int_0^l L_7(z) p(z) dz \right\} - \\ - PO(z) - Y_0(z) + \frac{Q_2}{J_3} H_2(z) + F(z).$$

Korzystając ze wzorów (3.4), (3.15), (4.16) i (4.21), doprowadzamy ostatecznie równanie całkowe (4.24) do następującej postaci:

$$(4.25) \quad y(z) = \frac{1}{PIJ_4 - 1} \left\{ [l - z - PIH_3(z)] \left[\varphi_B - PS_2 - K_2 + \bar{K}_2 + J_3 f(l) - \right. \right.$$

$$(4.29) \quad \left. \begin{aligned} & - J_3 \int_0^l L_7(z) p(z) dz \Big] - [1 - PH_3(z) - PJ_4 z] y_B \Big\} - PQ(z) - Y_0(z) + \\ & + F(z) - H_2(z) \int_0^l (l-z) p(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad [c.d.]$$

Zatem wszystkie otrzymane poprzednio nieskończone układy algebraicznych równań liniowych doprowadzono do równań całkowych Fredholma.

Doprowadzenie nieskończonych układów algebraicznych równań liniowych do równań całkowych Fredholma oraz przedstawienie w postaci całkowej wzorów dla brzegowych wielkości statycznych umożliwia łatwe, przybliżone rozwiązywanie różnych problemów z zakresu jednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) oraz wybożenia rozważanych ustrojów prętowych. Rozwiązania takie można uzyskać stosując np. metodę iteracji. Ponieważ poszczególne równania całkowe zostały wyprowadzone z uwzględnieniem określonych warunków brzegowych, więc poszukiwane rozwiązania tych równań można w pierwszym przybliżeniu przyjmować w postaci funkcji, które nie muszą spełniać ani równań całkowych, ani warunków brzegowych. Postępowanie przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień jest w zasadzie w tym przypadku podobne do postępowania opisanego poprzednio, tj. przy zastosowaniu nieskończonych układów algebraicznych równań. Po wykorzystaniu warunków równowagi wyrażamy przemieszczenia brzegowe (φ, γ) za pomocą wzorów zawierających całki z niewiadomymi funkcjami $\gamma(s)$, opisującymi równania osi odkształconych poszczególnych prętów ustroju. Wyrażone w ten sposób przemieszczenia brzegowe podstawiamy do równań całkowych, przyporządkowanych różnym prętom. Otrzymujemy ostatecznie układ równań całkowych Fredholma z niewiadomymi funkcjami $\gamma(s)$. Przy rozważaniu problemów ednoczesnego zginania i ściskania (lub rozciągania) układ ten będzie oczywiście zawierał równania niejednorodne. Rozwiązanie otrzymanego układu równań całkowych za pomocą jednej ze znanych metod przybliżonych (np. za pomocą metody iteracji) umożliwia określenie funkcji $\gamma(s)$, opisujących równania osi odkształconych poszczególnych prętów ustroju. Znając funkcje $\gamma(s)$ można wyznaczyć przemieszczenia brzegowe, a następnie za pomocą wyprowadzonych wzorów można obliczyć brzegowe momenty zginające i siły poprzeczne. W przypadku braku obciążenia prostopadłego do osi prętów ($p = 0$) można rozważać wybożenie ustroju prętowego pod wpływem sił działających osiowo, przyłożonych w węzłach oraz pochodzących od ciężaru własnego prętów. Otrzymujemy wtedy układ jednorodnych równań całkowych Fredholma. Przybliżone określenie wartości własnych tego układu umożliwia obliczenie obciążenia krytycznego.

Podamy przykład, ilustrujący praktyczne zastosowanie niektórych wyprowadzonych wzorów. Ponieważ w przypadku złożonych ustrojów prętowych obliczenie obciążenia krytycznego przy uwzględnieniu wpływu ciężaru własnego jest bardzo pracochłonne i wymaga wykorzystania matematycznej maszyny liczącej, więc ograniczymy się do rozwiązania prostego zadania.

5. Przykład

Rozważmy pręt swobodnie podparty w końcu A oraz utwierdzony w końcu B , poddany działaniu stałej siły osiowej oraz ciężaru własnego. Wyznamy wielkość siły krytycznej przy założeniu stałego przekroju poprzecznego pręta. Założenie takie znacznie uprości rachunkową stronę zadania. W przypadku pręta o zmiennym przekroju poprzecznym sposób rozwiązania nie ulega zmianie. Warto nadmienić, że podawane w literaturze technicznej przykłady wyznaczania sił krytycznych przy uwzględnieniu ciężaru własnego dotyczą tylko prętów o stałych przekrojach poprzecznych, swobodnie podpartych w obu końcach, oraz prętów o jednym końcu utwierdzonym i o drugim swobodnym.

Układ równań (3.36) upraszcza się w tym szczególnym przypadku do postaci

$$(5.1) \quad \sum_{m=1}^{\infty} y_m (P A_{im}^{(3)} + l a_i^2 \delta_{im} + \Gamma_{im}^{(3)}), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $A_{im}^{(3)}$ i $\Gamma_{im}^{(3)}$ wyrażają się za pomocą wzorów (3.37).

Występujące w tych wzorach wielkości upraszczają się w tym przypadku do postaci

$$(5.2) \quad J_3 = \frac{l}{3B_0}, \quad S_i^{(2)} = \frac{(-1)^i}{B_0 a_i}, \quad b_{im} = \frac{\delta_{im}}{B_0},$$

$$r(x) = g \varrho_0 x, \quad r_m(x) = \frac{g \varrho_0}{a_m} (1 - \cos a_m x),$$

gdzie ϱ_0 i B_0 oznaczają odpowiednio masę i sztywność zginania pręta o stałym przekroju poprzecznym.

Wykorzystując powyższe wzory oraz wykonując proste całkowanie znajdujemy

$$(5.3) \quad A_{im}^{(3)} = \frac{l}{B_0} \left[\frac{6(-1)^i (-1)^m}{i m \pi^2} - \delta_{im} \right],$$

$$K_m^{(2)} - \bar{K}_m^{(2)} = \frac{k}{2\pi m^3} [6 - 6(-1)^m + 2\pi^2 (-1)^m m^2 + \pi^2 m^2],$$

$$C_{im}^{(1)} - C_{im}^{(2)} = \frac{2k}{\lim (m^2 - i^2)^2} \{ (-1)^i (m^2 - i^2)^2 [1 - (-1)^m] - m^2 (i^2 + m^2) [1 - (-1)^{i+m}] \} \quad \text{dla } i \neq m,$$

$$C_{ii}^{(1)} - C_{ii}^{(2)} = \frac{2k}{l} \left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{(-1)^i - 1}{i^2} \right] \quad \text{dla } i = m,$$

$$\Gamma_{im}^{(3)} = k \left\{ \frac{(-1)^i}{\pi^2 i m^3} [18 - 18(-1)^m + 8\pi^2 m^2 (-1)^m + \pi^2 m^2] + \frac{2m(i^2 + m^2)}{i(m^2 - i^2)^2} [1 - (-1)^{i+m}] \right\} \quad \text{dla } i \neq m,$$

$$\Gamma_{ii}^{(3)} = \frac{k}{2\pi^2 i^4} [36(-1)^i - 36 + 10\pi^2 i^2 - \pi^4 i^4 - 4\pi^2 i^2 (-1)^i] \quad \text{dla } i = m,$$

gdzie

$$(5.4) \quad k = \frac{gQ_0 l^2}{\pi^2 B_0}.$$

Wielkość siły krytycznej obliczymy w przybliżeniu, uwzględniając kolejno w układzie równań (5.1) jedno, dwa i trzy równania.

Układ trzech pierwszych równań jednorodnych można przedstawić w postaci następującej:

$$(5.5) \quad \sum_{m=1}^{m=3} y_m A_{im} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

w którym współczynniki A_{im} po wykonaniu prostych przekształceń i obliczeń wyrażają się za pomocą wzorów

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A_{11} &= -34372P + 87668P_E - 14056ql, & A_{22} &= -74344P + 350673P - 37172ql, \\ A_{33} &= -81746P + 789014P_E - 37325ql, \\ A_{12} &= -26648P - 494ql, & A_{13} &= 17765P + 19526ql, \\ A_{23} &= -8883P + 17890ql, & A_{21} &= -26648P - 5020ql, \\ A_{31} &= 17765P + 9926ql, & A_{32} &= -8883P - 1006ql, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.7) \quad P_E = \frac{\pi^2 B_0}{l^2}, \quad q = gQ_0.$$

W celu obliczenia siły krytycznej założymy wielkość stosunku P_E/ql .

W tabelicy zestawiono wartości współczynnika $\kappa = P_{kr}/P_E$, obliczone w trzech przybliżeniach dla $P_E : ql = 10$ i dla $P_E/ql = 5$.

Wartości współczynnika κ

Przybliżenie	1	2	3
$P_E/ql = 10$	2,510	2,056	2,024
$P_E/ql = 5$	2,411	2,022	1,988

Jak widać, wielkość siły krytycznej, obliczona w trzecim przybliżeniu, różni się bardzo mało od wielkości tej siły, obliczonej w drugim przybliżeniu, a więc może być uznana za wystarczająco dokładną.

W rozważanym przypadku wpływ ciężaru własnego pręta na wielkość siły krytycznej jest bardzo mały, ponieważ przy pominięciu wpływu ciężaru własnego $\kappa = 2,045$. Oczywiście w miarę wzrostu obciążenia ql wartość współczynnika κ będzie malała.

Przybliżoną wartość siły krytycznej można również w tym przypadku bardzo łatwo wyznaczyć stosując metodę iteracji (np. Peano-Picarda) do wyznaczenia najmniejszej wartości własnej równania całkowego (4.20)₁, które w tym przypadku upraszcza się do postaci

$$y(z) = -PA_3(z) - I_3(z).$$

Konkretny przykład liczbowy, przedstawiający zastosowanie wyżej omówionej praktycznej i pożytecznej metody przybliżonej, podano w pracy [1].

Uwagi końcowe

Otrzymane w tej pracy wzory, umożliwiające rozwiązywanie trudnych problemów z zakresu stateczności sprężystej ustrojów prętowych, wskazują na duże zalety zastosowanej metody. Zasadniczym celem pracy było przedstawienie metody, umożliwiającej rozwiązywanie ogólnie sformułowanych problemów brzegowych mechaniki technicznej, opisanych za pomocą równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Zastosowany w tej pracy sposób do rozwiązania skomplikowanego problemu brzegowego zezwala na pożyteczne uogólnienie metody ortogonalizacyjnej. Drugi wariant rozwiązania, polegający na doprowadzeniu nieskończonych układów algebraicznych równań liniowych do równań całkowych Fredholma, posiada również istotne zalety.

Pozornie może wydawać się, że bardziej celowym było najpierw doprowadzić rozwiązanie problemu do równania całkowego, a następnie uzyskać nieskończone układy algebraicznych równań liniowych. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że w ten sposób byłoby znacznie trudniej uwzględnić różne warunki brzegowe. Natomiast dzięki zastosowanej metodzie otrzymane w tej pracy równania całkowite umożliwiają spełnienie określonych warunków brzegowych. Przybliżone rozwiązania tych równań całkowych w konkretnych przypadkach można bardzo łatwo uzyskać za pomocą metody iteracji (np. Peano-Picarda). Przykład takiego przybliżonego rozwiązania podano w pracy [1].

Literatura cytowana w tekście

1. Z. MAZURKIEWICZ, *Bending, buckling and vibration of elastic structures composed of non-homogeneous rectilinear bars with cross-sections varying in an arbitrary manner*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966).
2. E. KRYNICKI i Z. MAZURKIEWICZ, *Ramy z prętów o zmiennych sztywnościach*, PWN, Warszawa 1966.
3. А. Ф. Смирнов, *Устойчивость и колебания сооружений*, ТИЗИ, Москва 1958.
4. T. IWŃSKI, *Zastosowanie transformacji Laplace'a i funkcji schodkowych w teorii belek o zmiennej sztywności*, Rozpr. Inżyn., 3, 12 (1964).
5. G. TOŁSTOW, *Szeregi Fouriera* [tłumacz. z ros.], PWN, Warszawa 1954.
6. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, New York-Toronto-London 1951.

Резюме

ИЗГИБ И ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ,
СОСТОЯЩИХ ИЗ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ,
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ
С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

В работе рассматривается задача, касающаяся одновременного изгиба и сжатия (или растяжения), а также потери устойчивости упругих систем, состоящих из неоднородных прямых стержней, с произвольно переменными поперечными сечениями, нагруженными перпендикулярно к осям стержней и подверженным действию переменных осевых сил напр. собственному весу. Предполагается, что неоднородность и упругие свойства материала описаны с помощью произвольных функций, зависящих от координаты точки и независящих от времени.

Решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения деформированной оси стержня, являющегося составным элементом стержневой системы. Уравнение деформированной оси стержня и функция, описывающая распределение нагрузки, перпендикулярной к оси стержня, выражается с помощью ряда Фурье, предполагая выполнение условия Дирихле.

Для получения решения, дающего возможность, удовлетворению произвольным, неоднородным краевым условиям, применяется способ описанный и использованный в работе автора [1]. Этот способ состоит в некотором обобщении ортогонализационного метода, благодаря использованию известной теоремы о дифференцировании рядов Фурье. Такое решение приводит, очевидно, к идентичной бесконечной системе алгебраических уравнений, как и к использованию метода конечного преобразования Фурье, но оно более ясно и дает возможность пренебречь некоторыми преобразованиями, существующими при использовании метода конечного преобразования Фурье.

Применяя, вышеприведенный способ сводится решение дифференциального уравнения задачи к бесконечной системе алгебраических неоднородных линейных уравнений, в которых существуют статические и геометрические краевые величины и неизвестные коэффициенты ряда Фурье, описывающие уравнение деформированной оси стержня. Затем рассматривается несколько случаев опирания стержней. Для каждого, рассматриваемого способа опирания стержня, выводятся уравнения для краевых изгибающих моментов поперечных сил. В этих формулах существуют краевые перемещения (углы оборота и вертикальные передвижения опор), а также выражения зависящие от, упомянутых выше, коэффициентов Фурье. Кроме того для каждого из рассматриваемых случаев опирания стержня получено бесконечную систему линейных уравнений, заключающих неизвестные коэффициенты Фурье и краевые перемещения (после элиминации краевых изгибающих моментов). Использование условия равновесия услов системы и условий равновесия, вырезанных мысленно частей стержневой системы, дает возможность построить систему алгебраических уравнений, число которых соответствует степени геометрической неопределенности системы. Решая эту систему уравнений, определяются краевые перемещения с помощью известных физических величин, а также с помощью неизвестных коэффициентов рядов Фурье, описывающих уравнения деформированных осей отдельных стержней. Подставляя выраженные, таким способом, краевые перемещения в системы уравнений составленных для разных стержней системы, решение задачи можно свести к системе сопряженных бесконечных систем алгебраических уравнений, заключающих неизвестные коэффициенты рядов Фурье. В случае одновременного изгиба и сжатия (или растяжения) решение некоторого конечного числа уравнений, дает возможность определить коэффициента Фурье, а затем определить краевые перемещения, изгибающие моменты и поперечные силы, появляющиеся на концах стержней. При рассмотривании теории устойчивости стержневой системы, решение задачи ведет к системе сопряженных бесконечных алгебраических, однородных линейных уравнений, с неизвест-

ными коэффициентами Фурье. Приравнение к нулю основного детерминанта этих уравнений дает характеристическое уравнение, позволяющее с любым приближением определить критическую нагрузку. С практической точки зрения большое значение имеет факт, что суммы всех бесконечных функциональных рядов, представлены в форме интегралов, в которых подинтегральные выражения зависят от функций, описывающих переменность жесткости изгиба массы и нагрузки вдоль осей стержней.

Затем, дается другой вариант решения, рассматриваемых задач. Все бесконечные системы алгебраических линейных уравнений, полученные для разных случаев опирания стержней, сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма. Тогда как формулы для краевых статических величин, представлены в форме интегралов, в которых подинтегральные выражения зависят от функций, описывающей уравнения деформированной оси стержня. Сведение решения к такому виду, позволяет применить итерационные методы и получить приближенные решения, рассматриваемых задач, в разных случаях функций, описывающих неоднородность материала и изменчивость поперечного сечения отдельных стержней системы. Способы, применяемые при решении задач, касающиеся вопросов одновременного изгиба, сжатия и потери устойчивости сложных стержневых систем являются, в данном случае, похожими на способ, описанный выше.

S u m m a r y

BENDING AND BUCKLING OF ELASTIC STRUCTURES COMPOSED OF STRAIGHT BARS OF VARIABLE CROSS-SECTION AND LOADED BY THE WEIGHT

The present considerations are devoted to the problem of simultaneous bending and compression (or tension) and that of buckling of a structure composed of nonhomogeneous straight bars, the cross-sections of which vary in an arbitrary manner and which are subject to loads normal to their axes and to variable axial forces due, for instance, to the weight of the structure. It is assumed that the nonhomogeneity and the elastic properties of the material are described by arbitrary functions of the location, which are independent of time.

The solution of the problem is reduced to that of the differential equation of the deformed axis of a bar constituting an element of the structure considered. The equation of the deformed axis of the bar and the function describing the distribution of the normal load is expressed in the form of a Fourier series, assuming that the Dirichlet conditions are satisfied.

In order to obtain a solution enabling the satisfaction of arbitrary nonhomogeneous boundary conditions, the method used by the present author in Ref. [1] is applied. This method is a generalized orthogonalization method based on the familiar theorem concerning the differentiation of Fourier series. Such a solution leads, of course, to the same infinite set of algebraic equations as is obtained by the method of finite Fourier transformation but is more lucid and enables the rejection of some transformations that are necessary, if the latter method is used.

By applying the above method the solution of the differential equation of the problem can be reduced to an infinite set of nonhomogeneous linear algebraic equations, involving the boundary values of mechanical and geometrical quantities and the unknown coefficients of the Fourier series describing the deformed axis of the bar. Next, a few examples of support types of a bar are considered. For each support type equations are derived for the boundary values of the bending moments and shear forces, involving the boundary displacements (rotation angles and vertical displacements of the supports) and expressions depending on the Fourier coefficients. In addition, for each of the support types under consideration, an infinite set of linear algebraic equations are obtained, involving the unknown Fourier coefficients and the boundary displacements (after eliminating the edge values of the bending moments). The use of the equilibrium conditions of the nodes and the equilibrium conditions for parts of the structure separated mentally enables the establishment

of a set of algebraic equations, the number of which is equal to the degree of redundancy of the structure. Solving this set of equations the edge displacements are found in terms of known physical quantities and the unknown coefficients of the Fourier series representing the deformed axes of the bars. On substituting the edge displacements in the equations of motion established for various bars of the structure we can reduce the solution of the problem to that of a set of coupled infinite sets of algebraic equations with the Fourier coefficients as unknown. In the case of simultaneous bending and compression (or tension) the solution of a finite number of equations enables the obtainment of the Fourier coefficients and the end displacements, bending moments and transversal forces. In the case buckling of a structure the solution is reduced to a set of coupled infinite sets of homogeneous linear algebraic equations with the Fourier coefficients as unknown. By setting equal to zero the principal determinant of these equations, we obtain the characteristic equation enabling the determination of the critical load with any required accuracy. The fact that the sums of all the infinite functional series are represented in the form of integrals, in which the integrands depend on the functions describing the variability of the flexural rigidities, the masses and the loads along the axes of the bars is of considerable importance from the practical point of view.

The second of the two solution procedures proposed consists in all the infinite sets of linear algebraic equations obtained for various support types of the bar being reduced to Fredholm integral equations. The equations for the boundary values of the mechanical quantities are represented in the form of integrals, the integrands of which depend on functions describing the deformed axis of the bar. The reduction of the solution to such a form enables the application of iteration methods and the obtainment of approximate solutions of the problem considered for various functions describing the nonhomogeneity of the material and the variability of the cross-sections of the bars. In the problem of simultaneous bending and compression and that of buckling of bar structures the solution procedure is similar.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1968 r.
