

PLASKIE PŁYNIĘCIE USTALONE OŚRODKA COULOMBA
Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ BEZWŁADNOŚCI I SIŁ MASOWYCH

CZESŁAW SZYMAŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem przedstawionej pracy jest analiza równań mechaniki ośrodka jednorodnego i izotropowego typu Coulomba w przypadku, gdy proces deformacji ośrodka traktowany jest jako płaski, sztywno-plastyczny proces dynamiczny. Pod pojęciem procesu dynamicznego rozumiemy tutaj taki proces deformacji, w którym przyśpieszenia cząstek ośrodka są tak wielkie, że w równaniach ruchu należy uwzględnić wyrazy inercyjne, w odróżnieniu od procesu quasi-statycznego, gdzie te wyrazy się pomija. W pracy rozpatrzono przypadek procesu ustalonego. Jako równanie konstytutywne, opisujące proces deformacji, przyjęta została quasi-liniowa zależność między tensorami naprężenia i prędkości odkształcenia (założenie współosiowości tych tensorów). Ponadto założono, że w procesie płynięcia ośrodek jest nieściśliwy.

Model matematyczny, którego kinematyka opisana jest wyżej wymienionym równaniem konstytutywnym i warunkiem nieściśliwości, przyjęty był w pracach A. J. ISZLIŃSKIEGO [7] oraz A. J. JENIKE i R. T. SHIELDA [8]; omawiany był w pracach A. J. M. SPENCERA [14], A. DRESCHERA, K. KWASZCZYŃSKIEJ, Z. MROZA [2], L. S. ZAGAJNOWA [17] i J. MANDELA [10].

Analiza równań mechanicznych wyprowadzonych w teorii sztywno-plastycznego płynięcia materiałów typu Treski lub Misesa (również dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia i przy uwzględnieniu w równaniach ruchu sił bezwładności) przeprowadzona została w pracy A. J. M. SPENCERA [13]. Rozwiązania konkretnych zagadnień brzegowych typu dynamicznego (niefalowego) na gruncie teorii ośrodka sztywno-plastycznego typu Treski lub Misesa podane zostały w cytowanej wyżej pracy SPENCERA [13] i ostatnio w pracach J. NAJARA [11] i W. SZCZEPIŃSKIEGO [15].

Dla ośrodków Coulomba analiza równań mechanicznych (w ujęciu dynamicznym) przeprowadzona została w pracach S. S. GRIGORIANA [6 i 5] (z uwzględnieniem warunku plastyczności Schleichera) dla ogólnego przypadku trójwymiarowego ruchu niestacjonarnego, L. S. ZAGAJNOWA [17] dla płaskiego ruchu stacjonarnego oraz w pracy G. A. GENIEWA [4] dla płaskiego ruchu stacjonarnego i niestacjonarnego ruchu jednowymiarowego (przy dużych założeniach upraszczających).

Założenie, że proces deformacji jest procesem sztywno-plastycznego lub sprężysto-plastycznego płynięcia w ujęciu dynamicznym, prowadzić może do znacznych

odchyłeń w stosunku do rzeczywistego zachowania się ośrodka i wydaje się, że dla ośrodka ziarnistego stosowniejszy jest model matematyczny ciała sprężysto/lepkoplastycznego zaproponowany przez W. OLSZAKA i P. PERZYŃĘ [12] dla gruntu.

Przyjęty w obecnej pracy model sztywno-plastycznego płynięcia dla ośrodka Coulomba stanowi pierwsze przybliżenie i pozwala w sposób stosunkowo prosty przeprowadzić analizę równań wyprowadzonych dla tego modelu i uwzględniających siły bezwładności w równaniach ruchu.

Wyprowadzone w pracy równania mają postać niezmienniczych zależności pomiędzy wielkościami niezmienniczymi, określającymi stan naprężenia i pole prędkości przemieszczeń; są one napisane w układzie współrzędnych krzywoliniowych nieortogonalnych, odpowiednio unormowanych do postaci naturalnej. Taka postać równań mechanicznych spotykana jest w pracach C. CARATHEODORY'EGO, E. SCHMIDTA, H. HENCKY'EGO, H. GEIRINGER, Ł. M. KACZANOWA, J. RYCHLEWSKIEGO i innych autorów przy zagadnieniach quasi-statycznych teorii plastyczności. Podobny sposób zapisu równań mechaniki w układzie współrzędnych krzywoliniowych, nieortogonalnych o postaci naturalnej, stosuje P. P. TEODORESCU [16] dla płaskich stanów teorii sprężystości oraz J. ZAWIDZKI [18] dla płaskich stanów teorii sztywno-plastycznego płynięcia ośrodka izotropowego niejednorodnego.

Przyjęta w obecnej pracy metoda analizy i zapisu równań jest efektywna przynajmniej dla przyjętego modelu kinematycznego ośrodka. Pozwala ona w prosty sposób przejść od równań w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych do równań zarówno w niezmienniczych (dla ustalonego zagadnienia brzegowego) układach współrzędnych (układ trajektorii naprężeń głównych, układ trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych, układ linii poślizgu Coulomba i siatka charakterystyk), jak również do równań w konkretnym układzie linii współrzędnych z daną parametryzacją.

Istotnym punktem pracy jest podanie metody badania typu równań różniczkowych cząstkowych quasi-liniowych i wyprowadzania równań ich charakterystyk; metoda ta została zilustrowana na przykładzie równań różniczkowych dla obranego modelu mechanicznego ośrodka. Na podstawie równań różniczkowych modelu w odniesieniu do układu współrzędnych nieortogonalnych, przyjętego w postaci naturalnej, oraz na podstawie definicji charakterystyk równań różniczkowych cząstkowych, podanej przez R. COURANTA i D. HILBERTA [1], wyprowadzenie równań charakterystyk (kierunków charakterystycznych i odpowiednich związków różniczkowych wzdłuż linii charakterystycznych w płaszczyźnie zmiennych niezależnych) sprowadza się do wykrycia prostych zależności algebraicznych między kątami wzajemnego nachylenia współrzędnych i kątami nachylenia kierunku głównego σ_1 względem linii współrzędnych. Wychodząc z innych przesłanek podobną metodę wyprowadzania równań charakterystyk podał J. ZAWIDZKI [18]. Analizując równania różniczkowe płaskiego stanu quasi-statycznego płynięcia stacjonarnego ośrodka plastycznego niejednorodnego, autor ten z góry założył postać związku między wzajemnym nachyleniem ψ współrzędnych i kątem nachylenia θ większego naprężenia głównego do jednej ze współrzędnych i przy tym

związku wyprowadza kryteria, pozwalające ustalić typ badanych równań różniczkowych oraz, w przypadku hiperboliczności układu, związki różniczkowe wzdłuż dwóch spośród trzech rodzin charakterystyk.

2. Wyprowadzenie równań

W pracy rozpatrzono ośrodek ciągły typu Coulomba w płaskim stanie płynięcia ustalonego przy uwzględnieniu w równaniach ruchu sił masowych i przyspieszenia. Przyjęto założenie, że ośrodek jest nieściśliwy, a dewiatory naprężenia i prędkości odkształcenia są współosiowe. Matematyczne sformułowanie założeń i odpowiednich równań problemu jest następujące:

1. Ruch jest płaski i stacjonarny. Jeśli płaszczyzna $z = \text{const}$ jest płaszczyzną ruchu, x, y są współrzędnymi kartezjańskimi płaszczyzny ruchu, to (rys. 1):

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y), \quad \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \right).$$

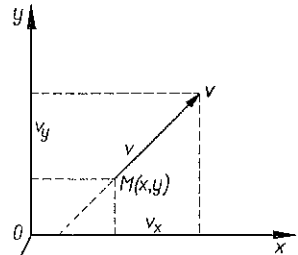
2. Ośrodek jest nieściśliwy:

$$(2.2) \quad \rho = \text{const}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

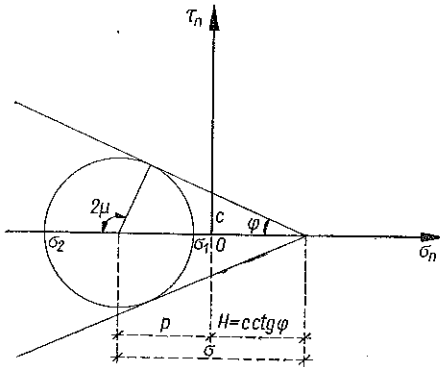
3. Dewiatory naprężenia i prędkości odkształcenia są współosiowe:

$$(2.3) \quad \bar{D} = \gamma \bar{T},$$

gdzie \bar{T} i \bar{D} oznaczają odpowiednio dewiatory tensorów naprężenia T i prędkości odkształcenia D .



Rys. 1



Rys. 2

4. Jest spełniony warunek plastyczności Coulomba (rys. 2):

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sin \varphi \left[-\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + c \text{ctg } \varphi \right].$$

Z założeń 1-4 wynika, że stan odkształcenia określony jest przez dwie funkcje $v_x(x, y)$ i $v_y(x, y)$:

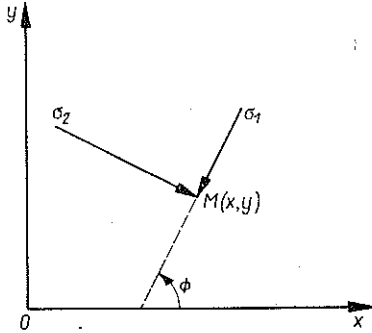
$$(2.5) \quad \epsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

$$(2.5) \quad \varepsilon_z \equiv 0, \quad \gamma_{yz} \equiv 0, \quad \gamma_{zx} \equiv 0.$$

[c.d.]

Stan naprężenia można określić również przez dwie funkcje: tzw. «sprawdzone» naprężenie średnie $\sigma(x, y) = p + c \operatorname{ctg} \varphi$ i kąt nachylenia $\Phi(x, y)$ naprężenia σ_1 do osi x (rys. 3):



Rys. 3

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= H - \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\Phi), \\ \sigma_y &= H - \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\Phi), \\ \sigma_z &= H - \sigma, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \varphi \sin 2\Phi, \\ \tau_{yz} &= 0, \quad \tau_{zx} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma &= p + H, \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \\ H &= c \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned}$$

Te cztery funkcje $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$, $\sigma(x, y)$ i $\Phi(x, y)$ powinny spełniać:

1) równania ruchu

$$(2.8) \quad \operatorname{div} T + \rho \mathbf{F} = \rho \mathbf{a},$$

gdzie \mathbf{F} oznacza siłę masową, ρ gęstość, a przyspieszenie;

2) warunek nieściśliwości

$$(2.9) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

3) warunek współosiowości dewiatorów \bar{D} i \bar{T}

$$(2.10) \quad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}.$$

Ponieważ

$$(2.11) \quad \mathbf{a} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y},$$

przeto możemy układ równań (2.8)–(2.10) na podstawie (2.6) i (2.5) napisać w postaci:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} &(1 - \sin \varphi \cos 2\Phi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\Phi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ &+ 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho F_x, \\ &\sin \varphi \sin 2\Phi \frac{\partial \sigma}{\partial x} - (1 + \sin \varphi \cos 2\Phi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad +2\sigma \sin \varphi \left(\cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\rho F_y,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \sin 2\Phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \cos 2\Phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0.$$

Wyznaczając z tych czterech równań cztery niewiadome funkcje $\sigma(x, y)$, $\Phi(x, y)$, $v_x(x, y)$ i $v_y(x, y)$ otrzymamy na podstawie (2.6) składowe tensora naprężenia T oraz z równań (2.12) składowe wektora prędkości \mathbf{v} [a w konsekwencji również składowe (2.5) tensora prędkości odkształcenia D]. Łatwo jest stwierdzić przy pomocy badania odpowiedniej formy czwartego stopnia typ równań (2.12). Na ogół jest to typ hiperboliczny. Może się jednak okazać, że dla pewnych postaci funkcji układ może stać się paraboliczny.

Częstokroć zachodzi potrzeba napisania równań w innym układzie współrzędnych krzywoliniowych, np. gdy warunki brzegowe dane są wzdłuż brzegów krzywoliniowych. Ponadto łatwiej jest zbadać osobliwości równań w takich siatkach jak siatki naprężeń głównych, siatki trajektorii maksymalnych naprężeń stycznych i siatki linii poślizgu. Ze względu na metodę całkowania równań typu hiperbolicznego lub parabolicznego trzeba nieraz napisać równania w układzie linii charakterystycznych, który na ogół pokrywa się z siatką linii poślizgu względnie z układem trajektorii maksymalnych naprężeń stycznych. Dlatego też celowe jest napisanie naszych równań w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych.

3. Równania w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych

Napisane w układzie kartezjańskim w płaszczyźnie ruchu równania (2.12) są to równania ruchu w postaci skalarnej, warunek nieściśliwości ośrodka i warunek współosiowości dewiatorów. Równania te w postaci niezmienniczej, mają postać:

$$(3.1) \quad \operatorname{div} T + \rho \mathbf{F} = \rho \mathbf{a}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \bar{D} = \lambda \bar{T}.$$

Założenia, że ruch jest płaski i stacjonarny, ograniczają pole wektora prędkości warunkami

$$(3.2) \quad \frac{\partial v}{\partial z} \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

jeśli oś z ma kierunek normalny do płaszczyzny ruchu.

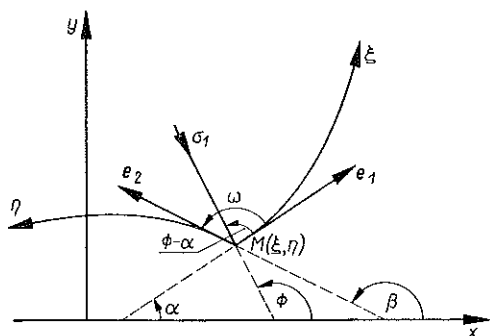
Założenie, że stan naprężenia jest stanem granicznym Coulomba, prowadzi do równania

$$(3.3) \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sin \varphi \left[-\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + c \operatorname{ctg} \varphi \right].$$

Podamy obecnie skalarną postać równań (3.1) w dowolnym układzie współrzędnych krzywoliniowych, obranych w płaszczyźnie ruchu, wykorzystując założenia (3.2) i (3.3). Wprowadzamy współrzędne dowolne krzywoliniowe ξ, η (rys. 4)

$$(3.4) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

(analogicznie jak w pracy P. P. TEODORESCU [16]); oś $\zeta \equiv z$ wybieramy w kierunku normalnym do płaszczyzny ruchu.



Rys. 4

Dla analizy układu równań naszego zagadnienia wydaje się celowe opisanie charakteru linii współrzędnych przez ich krzywizny

$$(3.5) \quad \kappa_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial s_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial \beta}{\partial s_2}$$

oraz kąt ω , jaki tworzą styczne do tych linii (rys. 4)

$$(3.6) \quad \omega = \beta - \alpha$$

Krzywizny i kąt ω są tutaj funkcjami długości łuków s_1, s_2 linii ξ, η .

Przy przyjętych założeniach tensor naprężenia określić można jednoznacznie przez dwie wielkości: przez «sprawdzone» naprężenie średnie

$$(3.7) \quad \sigma = p + H,$$

gdzie (rys. 2):

$$(3.8) \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \equiv -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad H = c \operatorname{ctg} \varphi,$$

oraz przez nachylenie osi głównej do linii współrzędnych. Jako tę drugą wielkość przyjmujemy kąt nachylenia Φ (rys. 3) do osi x :

$$(3.9) \quad \Phi = \Phi(s_1, s_2),$$

gdź zawsze można przejść do kąta nachylenia Φ_1 lub Φ_2 względem linii współrzędnych krzywoliniowych na podstawie wzorów (rys. 4)

$$(3.10) \quad \Phi_1 = \Phi - \alpha \quad \text{lub} \quad \Phi_2 = \beta - \Phi,$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \omega = \beta - \alpha.$$

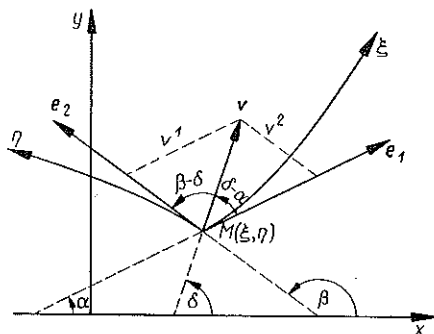
Występujące w równaniach tensory i wektory wyrażamy przez ich składowe fizyczne w układzie jednostkowych wektorów \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 stycznych do linii współrzędnych $\eta = \text{const}$ i $\xi = \text{const}$ odpowiednio. Do wektorów prędkości \mathbf{v} i siły masowej \mathbf{F} stosować będziemy zapis dualny: bądź określać będziemy je przez składowe fizyczne, bądź też przez ich moduły i kąty nachylenia względem linii współrzędnych lub osi x . Mamy więc (rys. 5 i 6)

$$(3.11) \quad \mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 = v \left[\frac{\sin(\beta - \delta)}{\sin \omega} \mathbf{e}_1 + \frac{\sin(\delta - \alpha)}{\sin \omega} \mathbf{e}_2 \right] =$$

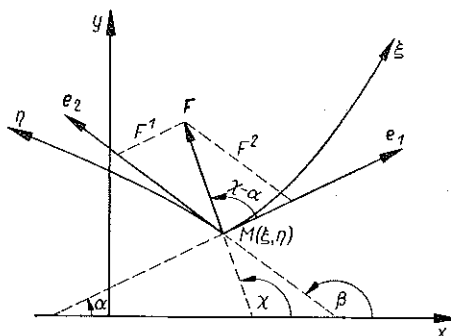
$$= v (\cos \delta \mathbf{i} + \sin \delta \mathbf{j}) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j},$$

$$(3.12) \quad \mathbf{F} = F^1 \mathbf{e}_1 + F^2 \mathbf{e}_2 = F \left[\frac{\sin(\beta - \chi)}{\sin \omega} \mathbf{e}_1 + \frac{\sin(\chi - \alpha)}{\sin \omega} \mathbf{e}_2 \right] = \\ = F(\cos \chi \mathbf{i} + \sin \chi \mathbf{j}) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}.$$

Składowe wektora przyspieszenia $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2$ znajdziemy za pomocą różniczkowania składowych wektora prędkości \mathbf{v} .



Rys. 5



Rys. 6

Stosując wzory transformacyjne dla obiektów tensorowych i wektorowych przy przejściu od układu współrzędnych kartezjańskich do układu współrzędnych krzywoliniowych, a następnie przechodząc do składowych fizycznych i zastępując operacje różniczkowania w kierunku x i y przez operacje różniczkowania względem długości łuków s_1 i s_2 współrzędnych ξ i η , po żmudnych obliczeniach dochodzimy do następujących wzorów:

dla divergencji

$$(3.13) \quad \text{div } T = (\text{div } T)^1 \mathbf{e}_1 + (\text{div } T)^2 \mathbf{e}_2 = \\ = \frac{1}{\sin^3 \omega} \left[\sin \omega \left(- [1 + \sin \varphi \cos 2(\beta - \Phi)] \right) \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + \right. \\ \left. + \{ \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\Phi - \alpha) - \omega] \} \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right] + \\ + (1 - \cos \omega) \left\{ \sigma \sin \varphi \cos 2(\beta - \Phi) + (\sigma - H) \right\} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} - \\ - \left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\Phi - \alpha) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial s_2} \right) - \\ - 2\sigma \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin 2(\beta - \Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \sin [2(\Phi - \alpha) - \omega] \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right\} \mathbf{e}_1 + \\ + \frac{1}{\sin^3 \omega} \left[\sin \omega \left\{ \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\beta - \Phi) - \omega] \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - \right.$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & - [1 + \sin \varphi \cos 2(\Phi - \alpha)] \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \Big) + \\ & + (1 - \cos \omega) \left(- \{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\beta - \Phi) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} + \right. \\ & \quad \left. + \{ \sigma \sin \varphi \cos 2(\Phi - \alpha) + (\sigma - H) \} \frac{\partial \omega}{\partial s_2} \right) + \\ & + 2\sigma \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin [2(\beta - \Phi) - \omega] \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \sin 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right\} \mathbf{e}_2; \end{aligned}$$

dla przyspieszenia \mathbf{a}

$$(3.14) \quad \mathbf{a} = \left\{ \left(v^1 \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial s_2} \right) - \frac{1}{\sin \omega} \left[v^1 \cos \omega \left(v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v^2 \left(v^1 \frac{\partial \beta}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ \left(v^1 \frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial s_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \omega} \left[v^1 \left(v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right) + v^2 \cos \omega \left(v^1 \frac{\partial \beta}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_2;$$

lub

$$(3.15) \quad \mathbf{a} = \frac{v}{\sin^2 \omega} \left\{ \left[\sin(\beta - \delta) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial s_2} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - v \cos(\beta - \delta) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] \right\} \mathbf{e}_1 + \left\{ \left[\sin(\delta - \alpha) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial s_2} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + v \cos(\delta - \alpha) \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] \right\} \mathbf{e}_2 \right\};$$

dla siły masowej \mathbf{F}

$$(3.16) \quad \mathbf{F} = F^1 \mathbf{e}_1 + F^2 \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sin \omega} [(\sin \beta F_x - \cos \beta F_y) \mathbf{e}_1 + (-\sin \alpha F_x + \cos \alpha F_y) \mathbf{e}_2]$$

lub

$$(3.17) \quad \mathbf{F} = F^1 \mathbf{e}_1 + F^2 \mathbf{e}_2 = \frac{F}{\sin \omega} [\sin(\beta - \chi) \mathbf{e}_1 + \sin(\chi - \alpha) \mathbf{e}_2].$$

Znajdziemy również

$$(3.18) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \frac{1}{\sin \omega} \left[v^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_2} - \cos \omega \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \right) - v^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial s_1} - \cos \omega \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) \right]$$

lub

$$(3.19) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sin \omega} \left\{ \left[\sin(\beta - \delta) \frac{\partial v}{\partial s_1} + \sin(\delta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial s_2} \right] - \right.$$

$$(3.19) \quad \left. \begin{array}{l} \text{[c.d]} \\ -v \left[\cos(\beta - \delta) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} - \cos(\delta - \alpha) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] \end{array} \right\}$$

Warunek współosiowości dewiatorów \bar{D} i \bar{T} ($\bar{D} = \lambda \bar{T}$) daje

$$(3.20) \quad \left\{ \cos [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \cos 2(\Phi - \beta) \frac{\partial v^2}{\partial s_1} + \right. \\ \left. + v^1 \sin [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \sin 2(\Phi - \beta) \frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right\} - \\ - \left\{ \cos [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \cos 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \right. \\ \left. + v^2 \sin [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + v^1 \sin 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right\} = 0$$

lub

$$(3.21) \quad \left\{ \cos [2\Phi - (\beta + \delta)] \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \sin [2\Phi - (\beta + \delta)] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} - \\ - \left\{ \cos [2\Phi - (\alpha + \delta)] \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \sin [2\Phi - (\alpha + \delta)] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = 0.$$

Tak więc równania (3.1) sprowadzają się do układu czterech równań skalarnych w układzie współrzędnych krzywoliniowych ξ, η , mianowicie do równań

$$(3.22) \quad (\operatorname{div} T)^1 + \rho F^1 = \rho a^1, \quad (\operatorname{div} T)^2 + \rho F^2 = \rho a^2, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

oraz do warunku współosiowości dewiatorów \bar{D} i \bar{T} , przy czym

$$(\operatorname{div} T)^1 \text{ i } (\operatorname{div} T)^2, \quad a^1 \text{ i } a^2, \quad F^1 \text{ i } F^2 \text{ oraz } \operatorname{div} \mathbf{v}$$

określono wyżej [wzory (3.13)–(3.19)]. Warunek współosiowości dewiatorów $\bar{D} = \lambda \bar{T}$ ma postać jednego równania skalarnego (3.20) lub (3.21).

4. Dalsza transformacja równań

Zauważyć należy, że przy naszych założeniach składowe fizyczne a^1 i a^2 wektora przyspieszenia \mathbf{a} dają się wyrazić przez pochodne współrzędnych wektora prędkości \mathbf{v} i nachyleń α i β linii współrzędnych ξ, η do osi x ,brane w kierunku stycznym do odpowiadającej linii współrzędnej, mianowicie a^1 przez pochodne w kierunku s_1 oraz a^2 przez pochodne w kierunku s_2 . Jest to możliwe dla każdego układu współrzędnych krzywoliniowych z wyjątkiem układu trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych.

Jeśli

$$(4.1) \quad \Phi - \alpha \neq \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \Phi \neq \frac{\pi}{4},$$

to z warunku nieściśliwości (3.18) lub (3.19) oraz warunku współosiowości tensorów (3.20) lub (3.21) można wyrazić pochodne składowych prędkości $\partial v_k/\partial s_i$ lub $\partial v/\partial s_i$, $\partial\delta/\partial s_i$ oraz pochodne $\partial\alpha/\partial s_i$, $\partial\beta/\partial s_i$ ($i, k = 1, 2$) odpowiednio przez pochodne w jednym kierunku. Po obliczeniach otrzymamy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a^1 = & \{v^1 + 2v^2 [\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} 2(\Phi - \alpha)]\} \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \\ & + v^2 [\cos 2\omega + \sin 2\omega \operatorname{tg} 2(\Phi - \alpha)] \frac{\partial v^2}{\partial s_1} - \frac{v^1}{\sin \omega} (v^1 \cos \omega + v^2) \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} - \\ & - \frac{v^2}{\sin \omega} \{(v^1 + v^2 \cos \omega) + 2v^2 \sin^2 \omega [\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} 2(\Phi - \alpha)]\} \frac{\partial \beta}{\partial s_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 = & \{v^2 + 2v^1 [\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tg} 2(\Phi - \beta)]\} \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \\ & + v^1 [\cos 2\omega - \sin 2\omega \operatorname{tg} 2(\Phi - \beta)] \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \frac{v^2}{\sin \omega} (v^2 \cos \omega + v^1) \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + \\ & + \frac{v^1}{\sin \omega} \{(v^2 + v^1 \cos \omega) + 2v^1 \sin^2 \omega [\cos \omega - \sin \omega \operatorname{tg} 2(\Phi - \beta)]\} \frac{\partial \alpha}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

lub

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a^1 = & v \left[[\cos 2(\delta - \alpha) + \sin 2(\delta - \alpha) \operatorname{tg} 2(\Phi - \alpha)] \frac{\partial v}{\partial s_1} - \right. \\ & \left. - \frac{v}{\sin \omega} (\cos \omega + \sin \omega \{ \sin 2(\delta - \alpha) + [1 - \cos 2(\delta - \alpha)] \operatorname{tg} 2(\Phi - \alpha) \}) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right], \\ a^2 = & v \left[[\cos 2(\beta - \delta) - \sin 2(\beta - \delta) \operatorname{tg} 2(\Phi - \beta)] \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\ & \left. + \frac{v}{\sin \omega} (\cos \omega + \sin \omega \{ \omega \sin 2(\beta - \delta) - [1 - \cos 2(\beta - \delta)] \operatorname{tg} 2(\Phi - \beta) \}) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right]. \end{aligned}$$

W każdym układzie współrzędnych z wyjątkiem układu trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych, dla którego nie są spełnione warunki (4.1), równania zagadnienia można napisać w postaci (3.22) z tym zastrzeżeniem, że składowe przyspieszenia a^1 i a^2 należy zastąpić w tych równaniach wyrażeniami (4.2) i (4.3). Równania problemu odniesione do układu trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych, tj. gdy zachodzą warunki

$$\Phi - \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta - \Phi = \frac{\pi}{4},$$

rozpatrzemy w dalszej części pracy.

5. Charakterystyki równań różniczkowych

W tej części pracy rozpatrzmy zagadnienie istnienia charakterystyk układu (3.22) równań różniczkowych. Liniami charakterystycznymi, zgodnie z definicją stosowaną w pracy R. COURANTA i D. HILBERTA [1], będzie taka rodzina linii w płaszczyźnie ruchu, gdzie wzdłuż każdej linii spełniony jest związek różniczkowy, będący kombinacją liniową rozpatrywanych równań i zawierający pochodne funkcji niewiadomych tylko w kierunku tej linii. Stosując tę definicję a jednocześnie i metodę poszukiwania charakterystyk i odpowiednich związków różniczkowych wykazemy, że jedną parą związków różniczkowych będą równania ruchu w układzie linii poślizgu (linii spełniających warunek Coulomba) tworzących jedną parę charakterystyk; drugą parę stanowią będą odpowiednie kombinacje warunków nieściśliwości i współosiowości dewiatorów w układzie trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych.

W związku z tym zastanowimy się obecnie, w jakim układzie współrzędnych każde z równań ruchu zawierać będzie pochodne funkcji $\sigma(s_1, s_2)$ i $\Phi(s_1, s_2)$ tylko w jednym kierunku odpowiadającej linii współrzędnych. Potrzeba na to, aby składowe wektora $\text{div } T$ wzdłuż współrzędnych zawierały pochodne tylko w jednym kierunku, mianowicie $(\text{div } T)^1$ — pochodne w kierunku s_1 i $(\text{div } T)^2$ — pochodne w kierunku s_2 , bowiem składowe przyspieszenia a^1 i a^2 na ogół dają się tak wyrazić przez pochodne w kierunku odpowiednich współrzędnych [(4.2), (4.3)]. Z równania (3.13) mamy

$$\begin{aligned}
 (\text{div } T)^1 = & \frac{1}{\sin^3 \omega} \left[\sin \omega \left(-[1 + \sin \varphi \cos 2(\beta - \Phi)] \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \{\cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\Phi - \alpha) - \omega]\} \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right) + \right. \\
 & \left. + (1 - \cos \omega) \left\{ \sigma \sin \varphi \cos 2(\Phi - \beta) + (\sigma - H) \right\} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} - \right. \\
 & \left. - \left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\Phi - \alpha) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial s_2} \right) - \\
 (5.1) \quad & - 2\sigma \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin 2(\beta - \Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \sin [2(\Phi - \alpha) - \omega] \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right\}, \\
 (\text{div } T)^2 = & \frac{1}{\sin^3 \omega} \left[\sin \omega \left(\{\cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\beta - \Phi) - \omega]\} \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - [1 + \sin \varphi \cos 2(\Phi - \alpha)] \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right) + \right. \\
 & \left. + (1 - \cos \omega) \left(-\left\{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\beta - \Phi) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \right\} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & + \{ \sigma \sin \varphi \cos 2(\Phi - \alpha) + (\sigma - H) \} \frac{\partial \omega}{\partial s_2} + \\ & + 2\sigma \sin \omega \sin \varphi \left\{ \sin [2(\beta - \Phi) - \omega] \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \sin 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right\}. \end{aligned}$$

Warunki, aby $(\operatorname{div} T)^1$ zawierała pochodne w kierunku s_1 , a $(\operatorname{div} T)^2$ — pochodne w kierunku s_2 , są następujące:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\Phi - \alpha) - \omega] = 0, \\ & \{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\Phi - \alpha) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \} \frac{\partial \omega}{\partial s_2} = 0, \\ & \sin [2(\Phi - \alpha) - \omega] = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & \cos \omega + \sin \varphi \cos [2(\beta - \Phi) - \omega] = 0, \\ & \{ \sigma \sin \varphi \cos [2(\beta - \Phi) - \omega] + (\sigma - H) \cos \omega \} \frac{\partial \omega}{\partial s_1} = 0, \\ & \sin [2(\beta - \Phi) - \omega] = 0. \end{aligned}$$

Skąd otrzymamy

$$(5.4) \quad \omega = 2\mu, \quad \Phi - \alpha = \mu, \quad \beta - \Phi = \mu,$$

gdzie $2\mu = \varphi + \pi/2$. Ponieważ

$$\Phi - \alpha = \mu \neq \pi/4, \quad \beta - \Phi = \mu \neq \pi/4,$$

to spełniony jest warunek (4.1). Widzimy więc (5.4), że układ współrzędnych pokrywa się z liniami poślizgu.

Zgodnie z definicją charakterystyk układ ten tworzy jedną z dwu par charakterystyk równań różniczkowych. Ponieważ mamy co najwyżej dwie pary różnych charakterystyk rzeczywistych (forma charakterystyczna jest czwartego stopnia), poszukamy drugiej pary.

Zbadamy, kiedy dwa ostatnie z równań (3.22) dadzą się przekształcić do postaci dwu równań, z których każde zawiera tylko pochodne w jednym kierunku odpowiedniej linii współrzędnych. Znowu dobierzemy odpowiedni układ współrzędnych. Rozpatrzmy równania (3.18) i (3.20), które zapiszemy w innej postaci:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & \left[\frac{\partial v^1}{\partial s_1} - \frac{1}{\sin \omega} \left(v^1 \cos \omega \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \frac{1}{\sin \omega} \left(v^2 \cos \omega \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right) \right] = 0, \\ & v^1 \left\{ \cos [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \cos 2(\Phi - \beta) \frac{\partial v^2}{\partial s_1} + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad & \left. \left. \begin{aligned} & + v^1 \sin [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + v^2 \sin 2(\Phi - \beta) \frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right\} - \right. \\ & \left. - \left\{ \cos [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \cos 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + v^2 \sin [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + v^1 \sin 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right\} = 0. \right.
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Układ tych równań możemy zastąpić układem równoważnym:

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad & 2 \cos [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \cos 2(\beta - \Phi) \frac{\partial v^2}{\partial s_1} - \frac{1}{\sin \omega} \left\{ v^1 \cos 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + \right. \\ & \left. + v^2 [\cos \omega \cos 2(\beta - \Phi) + 2 \sin \omega \sin 2(\beta - \Phi)] \frac{\partial \beta}{\partial s_1} \right\} - \\ & - \cos 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \frac{\cos 2(\Phi - \alpha)}{\sin \omega} \left(v^1 \cos \omega \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} + v^2 \frac{\partial \beta}{\partial s_2} \right) = 0, \\ & 2 \cos [2\Phi - (\alpha + \beta)] \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \cos 2(\Phi - \alpha) \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \frac{1}{\sin \omega} \left\{ v^2 \cos 2(\beta - \Phi) \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + \right. \\ & \left. + v^1 [\cos \omega \cos 2(\Phi - \alpha) + 2 \sin \omega \sin 2(\Phi - \alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} \right\} - \\ & - \cos 2(\beta - \Phi) \frac{\partial v^2}{\partial s_1} - \frac{\cos 2(\beta - \Phi)}{\sin \omega} \left(v^2 \cos \omega \frac{\partial \beta}{\partial s_1} + v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Aby układ równań (5.6) zawierał pochodne funkcji niewiadomych, każde tylko w kierunku jednej odpowiedniej współrzędnej, potrzeba spełnienia warunków

$$(5.7) \quad \cos 2(\Phi - \alpha) = 0, \quad \cos 2(\beta - \Phi) = 0.$$

Stąd wynikają zależności

$$(5.8) \quad \Phi - \alpha = \pi/4, \quad \beta - \Phi = \pi/4, \quad \omega = \pi/2.$$

Zatem w tym przypadku otrzymujemy układ współrzędnych ξ, η pokrywający się z układem trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych (rys. 9). Zgodnie z definicją charakterystyk siatka ta tworzy drugą z par charakterystyk naszych równań różniczkowych.

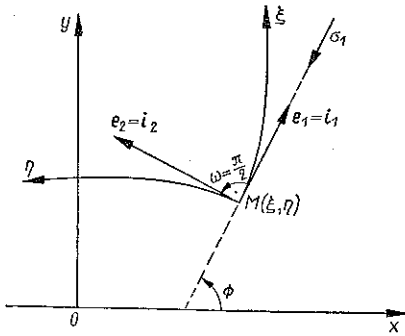
Rozpatrując parę równań (3.19) i (3.21) przy określeniu wektora v przez jego moduł v i nachylenie δ , otrzymujemy ten sam wynik (5.8).

W przypadku przejścia od ośrodka Coulomba do ośrodka Treski ($\varphi = 0, \mu = \pi/4$) układ analogicznych równań wykazuje osobliwości, które wymagają odrębnej analizy. W tej pracy zajmować się tym nie będziemy.

6. Równania w wyróżnionych układach współrzędnych

Obecnie podamy postać skalarną równań problemu w szczególnych układach współrzędnych.

1. Układ trajektorii naprężeń głównych (siatka izostat). W równaniach (3.22) należy przyjąć (rys. 7)



Rys. 7

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \alpha &= \Phi, & \beta &= \Phi + \pi/2, \\ \omega &= \beta - \alpha = \pi/2, \end{aligned}$$

a ponadto wprowadzimy oznaczenia $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{i}_2$ dla wektorów stycznych do tych trajektorii.

Podstawiając wartości (6.1) do wzorów (5.1), (4.2), (3.18), (3.20) i (3.16) sprowadzamy układ równań zagadnienia (3.22) do postaci

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} (1 - \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} + \varrho \left[\left(v^1 \frac{\partial v^1}{\partial s_1} - v^2 \frac{\partial v^2}{\partial s_1} \right) - 2v^1 v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right] &= \\ &= \varrho (\cos \Phi F_x + \sin \Phi F_y), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} (1 + \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \varrho \left[\left(v^2 \frac{\partial v^2}{\partial s_2} - v^1 \frac{\partial v^1}{\partial s_2} \right) + 2v^1 v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right] &= \\ &= \varrho (-\sin \Phi F_x + \cos \Phi F_y), \\ \frac{\partial v^1}{\partial s_1} - v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} &= 0, & \frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + \frac{\partial v^1}{\partial s_2} - v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} &= 0. \end{aligned}$$

W przypadku określenia wektora \mathbf{v} przez parę (v, δ) podstawiamy wartości (6.1) do wzorów (5.1), (4.3), (3.19), (3.21) i (3.17) i równania (3.22) sprowadzamy do postaci

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} (1 - \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} + \varrho v \left[\cos 2(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_1} - \right. \\ \left. - v \sin 2(\delta - \Phi) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right] &= \varrho F \cos(\chi - \Phi), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} (1 + \sin \varphi) - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} - \varrho v \left[\cos 2(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_2} - \right. \\ \left. - v \sin 2(\delta - \Phi) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right] &= \varrho F \sin(\chi - \Phi), \end{aligned}$$

$$\cos(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_1} - v \sin(\delta - \Phi) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} + \sin(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \cos(\delta - \Phi) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} = 0,$$

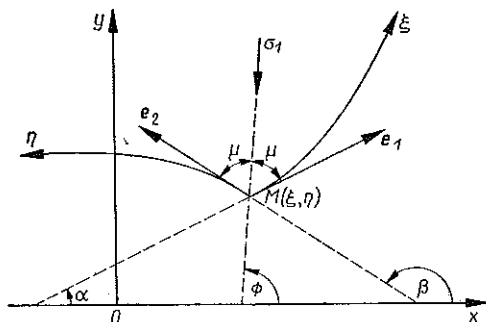
$$\sin(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \cos(\delta - \Phi) \frac{\partial \delta}{\partial s_1} + \cos(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_2} - v \sin(\delta - \Phi) \frac{\partial \delta}{\partial s_2} = 0.$$

Przy wyprowadzaniu dwu pierwszych z równań (6.2) i (6.3) korzystaliśmy ze wzorów (4.2) i (4.3) odpowiednio zamiast wzorów (3.14) i (3.15), gdyż obie grupy wzorów są równoważne przy spełnieniu warunków (4.1), które w tym przypadku [por. (6.1)] mają postać

$$\Phi - \alpha = 0 \neq \pi/4, \quad \beta - \Phi = \pi/2 \neq \pi/4.$$

Zauważmy, że równania (6.2) i (6.3) zawierają pochodne funkcji niewiadomych w obu kierunkach: pierwszej i drugiej trajektorii naprężeń głównych. Nie mogą więc być na ogół charakterystykami układu równań problemu.

2. Układ linii poślizgu. Jako pojęcie «linia poślizgu» przyjmujemy umownie, że jest to linia, wzdłuż której spełniony jest warunek Coulomba lub inaczej mówiąc za «linię poślizgu Cou-



Rys. 8

lomba» uważamy linię odpowiadającą punktowi styczności kół Mohra z ich obwiednią. Dla tego układu współrzędnych należy przyjąć (rys. 8):

$$(6.4) \quad \alpha = \Phi - \mu, \quad \beta = \Phi + \mu, \quad \omega = \beta - \alpha = 2\mu, \quad \text{gdzie } \mu = \pi/4 + \varphi/2,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial s_k} \equiv 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s_k} = \frac{\partial \beta}{\partial s_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_k}, \quad k = 1, 2.$$

Podstawiając wartości (6.4) do wzorów (5.1), (4.2) lub (4.3), (3.16) lub (3.17), (3.18) lub (3.19) i do (3.20) lub (3.21) oraz zestawiając na tej podstawie równania problemu (3.22), otrzymamy układ czterech równań skalarnych w postaci:

$$(6.5) \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - 2\sigma \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) + \varrho \left\{ \left(v^1 + \frac{2v^2}{\cos 2\mu} \right) \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_1} - v^1 \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) + \right.$$

$$\left. + v^2 \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_1} - \frac{v^2 (1 + \sin^2 2\mu)}{\sin 2\mu \cos 2\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right] \right\} = \frac{\varrho}{\sin 2\mu} [\sin(\Phi + \mu) F_x - \cos(\Phi + \mu) F_y],$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} + 2\sigma \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) + \varrho \left\{ \left(v^2 + \frac{2v^1}{\cos 2\mu} \right) \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^2 \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) + \right.$$

$$\left. + v^1 \left[\frac{\partial v^1}{\partial s_2} + \frac{v^1 (1 + \sin^2 2\mu)}{\sin 2\mu \cos 2\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right] \right\} = \frac{\varrho}{\sin 2\mu} [-\sin(\Phi - \mu) F_x + \cos(\Phi - \mu) F_y],$$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} [c. a] \quad & \left[\frac{\partial v^1}{\partial s_1} - \frac{1}{\sin 2\mu} (v^1 \cos 2\mu + v^2) \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right] + \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \frac{1}{\sin 2\mu} (v^2 \cos 2\mu + v^1) \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right] = 0, \\ & \left[\frac{\partial v^1}{\partial s_1} + \cos 2\mu \frac{\partial v^2}{\partial s_1} - v^2 \sin 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right] - \left[\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + \cos 2\mu \frac{\partial v^1}{\partial s_2} + v^1 \sin 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right] = 0 \end{aligned}$$

lub przy określeniu wektora v przez parę (v, δ) układ

$$(6.6) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - 2\sigma \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) + \varrho \frac{v}{\cos 2\mu} \left\{ \cos 2(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_1} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{v}{\sin 2\mu} [1 + \sin 2\mu \sin 2(\delta - \Phi)] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} = \varrho \frac{F}{\sin 2\mu} \sin [(\Phi + \mu) - \chi], \\ & \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} + 2\sigma \operatorname{ctg} 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) + \varrho \frac{v}{\cos 2\mu} \left\{ \cos 2(\delta - \Phi) \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{v}{\sin 2\mu} [1 - \sin 2\mu \sin 2(\delta - \Phi)] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = \varrho \frac{F}{\sin 2\mu} \sin [\chi - (\Phi - \mu)], \\ & \left\{ \sin [(\delta - \Phi) - \mu] \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \cos [(\delta - \Phi) - \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} - \left\{ \sin [(\delta - \Phi) + \mu] \frac{\partial v}{\partial s_2} + \right. \\ & \quad \left. + v \cos [(\delta - \Phi) + \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = 0, \\ & \left\{ \cos [(\delta - \Phi) + \mu] \frac{\partial v}{\partial s_1} - v \sin [(\delta - \Phi) + \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} - \left\{ \cos(\delta - \Phi) - \mu \frac{\partial v}{\partial s_2} - \right. \\ & \quad \left. - v \sin [(\delta - \Phi) - \mu] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dwa pierwsze z równań (6.5) lub (6.6) zawierają pochodne funkcji niewiadomych, każde tylko w jednym kierunku odpowiadającej linii poślizgu. Dwa pozostałe z tych równań zawierają pochodne funkcji określających wektor prędkości, każde w obu kierunkach. Oznacza to, że linie poślizgu stanowią jedną z par charakterystyk spośród czterech linii charakterystycznych równań problemu. Oczywiście spełnione są tu warunki (4.1), które uzasadniały przyjęcie do obliczeń składowych wektora a według wzorów (4.2) lub (4.3). Mamy bowiem

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \Phi - \alpha = \mu &= \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \neq \frac{\pi}{4}, \\ \beta - \Phi = \mu &= \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \neq \frac{\pi}{4} \quad \text{dla } \varphi \neq 0. \end{aligned}$$

3. Układ trajektorii maksymalnych odkształceń postaciowych (a jednocześnie maksymalnych naprężeń stycznych). Dla tej siatki współrzędnych mamy (rys. 9)

$$\alpha = \Phi - \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \Phi + \frac{\pi}{4}, \quad \omega = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2},$$

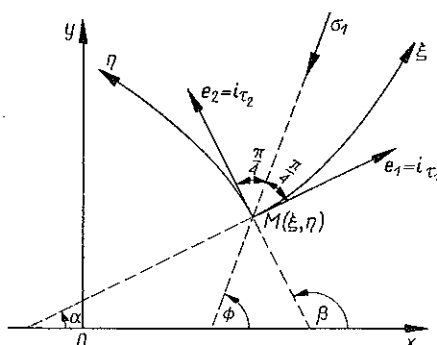
$$(6.8) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s_k} = \frac{\partial \beta}{\partial s_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial s_k}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_k} \equiv 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{i}_{\tau_1}, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{i}_{\tau_2}.$$

W tym przypadku nie jest spełniony warunek (4.1), gdyż

$$(6.9) \quad \Phi - \alpha = \pi/4, \quad \beta - \Phi = \pi/4$$

i nie możemy tutaj stosować wzorów (4.2) i (4.3), pozwalających wyrazić przyspieszenia przez pochodne w kierunku odpowiadającej trajektorii. [W tym przypadku na podstawie warunku nieściśliwości składowe wektora przyspieszenia a^1, a^2 dają się wyrazić przez pochodne składowych v^1, v^2 wektora prędkości (lub modułu v i nachylenia δ) w kierunku trajektorii odpowiadających danej. Tak więc składowa a^1 da się wyrazić przez pochodne w kierunku s_2 oraz składowa a^2 przez pochodne w kierunku s_1]. Wobec tego w obliczaniu a^1 i a^2 korzystamy ze wzorów (3.14) lub (3.15), otrzymując



Rys. 9

$$(6.10) \quad a^1 = \left[v^1 \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_1} - v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) + v^2 \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_2} - v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) \right],$$

$$a^2 = \left[v^2 \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) + v^1 \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) \right]$$

lub

$$(6.11) \quad a^1 = v \sin \left[(\delta - \Phi) - \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \sin \left[(\delta - \Phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} + \right.$$

$$\left. + v \cos \left[(\delta - \Phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} + v \sin \left[(\delta - \Phi) + \frac{\pi}{4} \right] \times$$

$$\times \left\{ \cos \left[(\delta - \Phi) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} - v \sin \left[(\delta - \Phi) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\},$$

$$a^2 = -v \sin \left[(\delta - \Phi) - \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \cos \left[(\delta - \Phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} - \right.$$

$$\left. - v \sin \left[(\delta - \Phi) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} + v \sin \left[(\delta - \Phi) + \frac{\pi}{4} \right] \times$$

$$(6.11) \quad \times \left\{ \sin \left[\left(\delta - \Phi \right) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \cos \left[\left(\delta - \Phi \right) + \frac{\pi}{4} \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\}.$$

[c.d.]

Podstawiając wartości (6.8) do wyrażenia (5.1), uwzględniając wzory (6.10) lub (6.11) dla składowych przyspieszenia, obliczając na podstawie (6.8) składowe siły \mathbf{F} (3.16) lub (3.17) i wreszcie wprowadzając wartości (6.8) do warunku nieściśliwości (3.18) lub (3.19) oraz do warunku współosiowości (3.20) lub (3.21), możemy [po pewnych przekształceniach dwu ostatnich równań (3.22)] równania różniczkowe dla naszego zagadnienia napisać w postaci następującej:

$$(6.12) \quad \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right] + \varrho v^2 \left(\frac{\partial v^1}{\partial s_2} - v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) =$$

$$= \varrho \left[\cos \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) F_x + \sin \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) F_y \right],$$

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} \right] + \varrho v^1 \left(\frac{\partial v^2}{\partial s_1} + v^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) =$$

$$= \varrho \left[\cos \left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) F_x + \sin \left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) F_y \right],$$

$$\frac{\partial v^1}{\partial s_1} - v^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial v^2}{\partial s_2} + v^1 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} = 0$$

lub przy reprezentacji wektora \mathbf{v} przez parę (v, δ) w postaci

$$(6.13) \quad \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} \right] + \varrho v \sin \left[\delta - \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \cos \left[\delta - \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} - v \sin \left[\delta - \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} \right\} =$$

$$= \varrho F \cos \left[\chi - \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - 2\sigma \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right) - \sin \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} \right] + \varrho v \sin \left[\left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \times$$

$$\times \left\{ \cos \left[\left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} + v \sin \left[\left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} \right\} =$$

$$= \varrho F \cos \left[\left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) - \chi \right],$$

$$\cos \left[\delta - \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial s_1} - v \sin \left[\delta - \left(\Phi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_1} = 0,$$

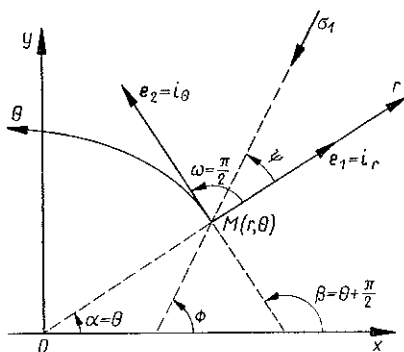
$$(6.13) \quad \cos \left[\left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial v}{\partial s_2} + v \sin \left[\left(\Phi + \frac{\pi}{4} \right) - \delta \right] \frac{\partial \delta}{\partial s_2} = 0.$$

[c.d.]

Dwa ostatnie równania (6.12) lub (6.13) są kombinacją liniową warunku nieściśliwości (3.18) [lub (3.19)] i warunku współosiowości dewiatorów (3.20) [lub (3.21)], odpowiadającą układowi równań (5.6) podanemu w p. 5.

Zauważmy, że w trzecim i czwartym z równań (6.12) lub (6.13) występują tylko pochodne w jednym kierunku odpowiadającej trajektorii, a dwa pierwsze z tych równań zawierają pochodne niewiadomych funkcji w obu kierunkach. Wynika stąd, że trajektorie maksymalnych naprężeń stycznych tworzą jedną z par charakterystyk układu równań różniczkowych problemu (tzw. «kinematyczne charakterystyki» równań).

Poprzednio stwierdziliśmy, że drugą z par spośród czterech linii charakterystycznych tworzą linie poślizgu. A zatem układ równań różniczkowych (3.22) posiada dwie pary różnych charakterystyk, którymi są linie poślizgu Coulomba i trajektorie maksymalnych odkształceń postaciowych. Ponieważ mamy układ czterech równań różniczkowych, odpowiednia forma charakterystyczna jest formą czwartego stopnia, więc i układ posiada co najwyżej cztery rodziny różnych linii charakterystycznych. Stwierdziliśmy, że jedną parę tworzą linie poślizgu, drugą zaś parę trajektorie maksymalnych odkształceń postaciowych. Są to więc jedyne możliwe cztery rodziny linii charakterystycznych. Są one na ogół różne z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków, gdy funkcje niewiadome spełniają pewne specjalne warunki.



Rys. 10

Stwierdzić należy, że dwa ostatnie równania (6.12) są identyczne z równaniami Geiringer dla kinematycznych charakterystyk w zagadnieniu statycznym (tj. przy pominięciu przyspieszeń).

4. Siatka współrzędnych biegunowych r, θ . W tym układzie współrzędnych mamy (rys. 10)

$$\alpha = \theta, \quad \beta = \theta + \pi/2, \quad \omega = \pi/2,$$

$$\Phi = \theta + \psi, \quad e_1 \equiv i_r, \quad e_2 \equiv i_\theta,$$

$$v^1 = v_r = v \cos(\delta - \theta), \quad v^2 = v_\theta = v \sin(\delta - \theta),$$

$$(6.14) \quad \frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{r},$$

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \text{[c.d.]} \quad \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \frac{\partial \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s_2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} = \frac{\partial (\theta + \psi)}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że w tym przypadku, w odróżnieniu od współrzędnych rozpatrywanych poprzednio, mamy z góry obrany układ współrzędnych (niezależnie od warunków brzegowych) o ustalonym położeniu i orientacji względem układu x, y (tzw. «praukładu»).

Podstawiając (6.14) do wzorów (5.1), (3.14), (3.16), (3.18) i (3.20) możemy układ (3.22) równań problemu napisać w postaci czterech równań skalarnych

$$(6.15) \quad \begin{aligned} (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left[\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right) \right] + \\ + \varrho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \varrho \left[(\cos \theta F_x + \sin \theta F_y) + \frac{v_\theta^2}{r} \right], \\ \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left[\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right) \right] - \\ - \varrho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = \varrho \left[(\sin \theta F_x - \cos \theta F_y) + \frac{v_\theta v_r}{r} \right], \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) = 0, \quad \sin 2\psi \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \\ - \cos 2\psi \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \sin 2\psi \frac{v_r}{r} - \cos 2\psi \frac{v_\theta}{r}. \end{aligned}$$

Równania te spotykane są w literaturze naukowej.

Dla reprezentacji wektora \mathbf{v} przez jego moduł v i nachylenie δ równania (3.22), po podstawieniu (6.14) do wzorów (5.1), (3.15), (3.17), (3.19) i (3.21), sprowadzają się do postaci

$$(6.16) \quad \begin{aligned} (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\ + 2\sigma \sin \varphi \left[\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cos 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6.16) \quad & \left[\frac{\partial v}{\partial r} - v \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial \delta}{\partial r} + \right. \\
 & \left. + \frac{\rho v}{2} \left\{ [1 + \cos 2(\delta - \theta)] \frac{\partial v}{\partial r} - v \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial \delta}{\partial r} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r} \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} [1 - \cos 2(\delta - \theta)] \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right\} = \rho F \cos(\chi - \theta), \right. \\
 & \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{r} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\
 & \left. + 2\sigma \sin \varphi \left[\cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right) \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{\rho v}{2} \left\{ \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial v}{\partial r} + v [1 + \cos 2(\delta - \theta)] \frac{\partial \delta}{\partial r} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r} [1 - \cos 2(\delta - \theta)] \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \sin 2(\delta - \theta) \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right\} = -\rho F \sin(\chi - \theta), \right. \\
 & \left[\cos(\delta - \theta) \frac{\partial v}{\partial r} - v \sin(\delta - \theta) \frac{\partial \delta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[\sin(\delta - \theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \\
 & \left. + v \cos(\delta - \theta) \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right] = 0, \\
 & \sin [2\psi - (\delta - \theta)] \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \right) - \cos [2\psi - (\delta - \theta)] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial \delta}{\partial r} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Przy wyprowadzeniu równań (6.15) i (6.16) posługiwaliśmy się wzorami (3.14) lub (3.15), aczkolwiek mogliśmy korzystać ze wzorów transformacyjnych (4.2) lub (4.3), pozwalających wyrazić składowe a^1 i a^2 przez pochodne składowych wektora prędkości w jednym kierunku (a^1 przez pochodne w kierunku r , a^2 przez pochodne w kierunku θ). Jest to możliwe, gdyż warunki (4.1) są na ogół spełnione:

$$\begin{aligned}
 (6.17) \quad & \Phi - \alpha = (\theta + \psi) - \theta = \psi \neq \frac{\pi}{4}, \\
 & \beta - \Phi = \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) - (\theta + \psi) = \frac{\pi}{2} - \psi \neq \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Nierówności w (6.17) na ogół są spełnione z wyjątkiem specjalnych funkcji $\psi(r, \theta)$; mianowicie, gdy $\psi \equiv \pi/4$, wtedy współrzędne r, θ stają się trajektoriami maksymalnych odkształceń postaciowych.

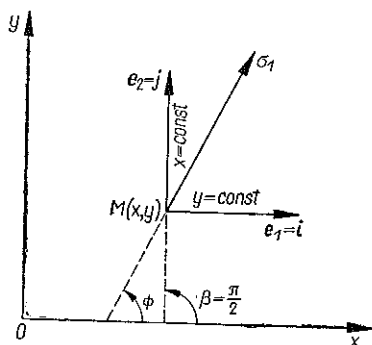
Każde z równań (6.15) lub (6.16) zawiera pochodne funkcji niewiadomych w obu kierunkach współrzędnych biegunowych. Oznacza to, że współrzędne te na ogół nie mogą być układem linii charakterystycznych z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków. Tych szczególnych przypadków w pracy tej rozpatrywać nie będziemy.

5. Siatka współrzędnych kartezjańskich x, y . Dla tego układu należy przyjąć (rys. 11)

$$(6.18) \quad a = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j},$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad v^1 = v_x, \quad v^2 = v_y, \quad v_x = v \cos \delta,$$

$$v_y = v \sin \delta.$$



Rys. 11

Podstawiając (6.18) do wzorów (5.1), (3.14), (3.16), (3.18) i (3.20) sprowadzamy równania (3.22) do postaci

$$(6.19) \quad (1 - \sin \varphi \cos 2\Phi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\Phi \frac{\partial \sigma}{\partial y} +$$

$$+ 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) +$$

$$+ \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho F_x,$$

$$\sin \varphi \sin 2\Phi \frac{\partial \sigma}{\partial x} - (1 + \sin \varphi \cos 2\Phi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} +$$

$$+ 2\sigma \sin \varphi \left(\cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\rho F_y,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \sin 2\Phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \cos 2\Phi \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0.$$

Dla wektora $\mathbf{v}(v, \delta)$ równania (3.22) na podstawie wzorów (6.18), (5.1), (3.15), (3.17), (3.19) i (3.21) przyjmą postać

$$(6.20) \quad \left[(1 - \sin \varphi \cos 2\Phi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\Phi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + 2\sigma \sin \varphi \left(\sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\rho}{2} v \left[(1 + \cos 2\delta) \frac{\partial v}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - v \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial x} + \sin 2\delta \frac{\partial v}{\partial y} - v (1 - \cos 2\delta) \frac{\partial \delta}{\partial y} \right] = \rho F \cos \chi,$$

$$\left[\sin \varphi \sin 2\Phi \frac{\partial \sigma}{\partial x} - (1 + \sin \varphi \cos 2\Phi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \sin \varphi \left(\cos 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin 2\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] - \frac{\rho}{2} v \left[\sin 2\delta \frac{\partial v}{\partial x} + v (1 + \cos 2\delta) \frac{\partial \delta}{\partial x} + \right.$$

$$(3.20) \quad \left[\begin{array}{l} \text{[c.d.]} \\ + (1 - \cos 2\delta) \frac{\partial v}{\partial y} + v \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial y} \end{array} \right] = - \rho F \sin \chi,$$

$$\left(\cos \delta \frac{\partial v}{\partial x} - v \sin \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \left(\sin \delta \frac{\partial v}{\partial y} + v \cos \delta \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\sin (2\Phi - \delta) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) - \cos (2\Phi - \delta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) = 0.$$

Równania (6.19) mają postać znanych równań wyprowadzonych w układzie kartezyjskim, natomiast w reprezentacji (6.20) są rzadziej spotykane. W literaturze równania te wyprowadza się na elementarnej drodze przez bezpośrednie podstawienie składowych tensora naprężenia, określonych przez dwie funkcje σ i Φ [por. wzór (2.6)] i przyspieszeń wyrażonych przez dwie składowe wektora prędkości v_x i v_y do równań ruchu, a następnie do warunku nieściśliwości i współosiowości dewiatorów naprężenia i prędkości odkształcenia.

Autor wyraża podziękowanie Doc. Drowi Z. MROZOWI za wskazanie tematu tej pracy jak również za rady i wskazówki udzielane w trakcie opracowania zagadnienia.

Literatura cytowana w tekście

1. R. COURANT, D. HILBERT, *Partial Differential Equations*, Vol. II, New York, London 1962.
2. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967).
3. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Quart. Appl. Math., 10 (1952), 157-165.
4. Г. А. ГЕНЕВ, *Вопросы динамики сыпучей среды*, Москва 1958.
5. С. С. ГРИГОРЯН, *Об основных представлениях динамики грунтов*, ПИММ, 6, 14 (1960).
6. С. С. ГРИГОРЯН, *О некоторых упрощениях в описании движения мягких грунтов*, ПИММ, 2, 27 (1963).
7. А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, *О плоском движении песка*, Укр. матем. ж., 4, 6 (1954).
8. A. W. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech., 27 (1959), 599-602.
9. G. DE JOSSELYN DE JONG, *Statics and Kinematics in the Faible Zone of a Granular Material*, Waltman, Delft 1959.
10. J. MANDEL, *Sur les équations d'écoulement des sols idéaux en déformation plane et le concept du double glissement*, J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966), 303-308.
11. J. NAJAR, *Inertia effects in the problem of compression of a perfectly plastic layer between two rigid plates*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967).
12. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *The constitutive equations for elastic/viscoplastic soils*, IUTAM Conference in Grenoble, 1964.
13. A. J. M. SPENCER, *The dynamic plane deformation of an ideal plastic-rigid solid*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 8 (1960), 262-279.
14. A. J. M. SPENCER, *A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 12 (1964), 337-351.
15. W. SZCZEPIŃSKI, *Dynamic expansion of an rotating solid cylinder of mild steel*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967), 75-88.
16. P. P. TEODORESCU, *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7 10, (1962), 269 (403)-299(433),

17. Л. С. Загайнов, *Об уравнениях плоского установившегося движения сыпучей среды*, Инж. ж. МТТ, 2 (1967), 188–195.
18. J. ZAWIDZKI, *Plaskie stany ośrodków plastycznych w nieortogonalnych układach współrzędnych krzywoliniowych*, Rozpr. Inżyn., 4, 15 (1967).

Резюме

ПЛОСКОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ СРЕДЫ КУЛОНА
С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ И МАССОВЫХ СИЛ

Рассматривается вопрос плоского установившегося течения для среды типа Кулона с учетом сил инерции и массовых сил в уравнениях движения. Принимается предположение несжимаемости среды и в качестве определяющего уравнения принято условие коаксиальности девиаторов напряжения и скорости деформации.

Выводятся дифференциальные уравнения с частными производными задачи с четырьмя неизвестными функциями (две функции определяющие напряженное состояние и две другие функции, дефинирующие поле скорости перемещений) в произвольной координатной системе (в плоскости движения).

Констатируется гиперболичность систем уравнений. Эти уравнения имеют четыре семейства характеристик в плоскости движения, одна пара из которых является линиями скольжения Кулона, вторая же составляет траектории максимальных скоростей сдвига. Подтверждается, что дифференциальные зависимости вдоль линии скольжения являются преобразованными уравнениями движения, тогда как дифференциальные зависимости вдоль траектории максимальных деформации сдвига — идентичны с зависимостями Г. Гейрингер, установленными для квази-статической задачи (т.е. при пренебрежении инерционными выражениями в уравнениях движения).

Существенным пунктом работы является приведение метода исследования типа дифференциальных квази-линейных уравнений с частными производными и выведение уравнений их характеристик.

Этот метод был представлен при анализе дифференциальных уравнений, вытекающих из предположенной механической модели среды, соответственно преобразованных в криволинейную координатную систему, и сведенных к естественному виду. Выведение уравнений характеристик (характеристических направлений и соответствующих дифференциальных зависимостей вдоль характеристических линий в плоскости независимых переменных) сводится к обнаружению простых алгебраических зависимостей между углами взаимного наклона координатных линий и углами наклона главного направления σ_1 по отношению к координатным линиям.

Этот метод дает возможность избежать трудоемких расчетов, связанных с выведением уравнений характеристик, при использовании метода собственных значений и собственных векторов, соответствующих матриц дифференциальных уравнений задачи.

Summary

STEADY PLANE FLOW OF A COULOMBIAN BODY THE INERTIA
AND MASS FORCES BEING TAKEN INTO CONSIDERATION

The problem under consideration is that of steady plane flow of a Coulombian body using equations of motion in which the inertia and mass forces are involved. The body is assumed to be incompressible. The constitutive equation is the coaxiality condition of the stress and strain rate deviator tensors.

The partial differential equations of the problem with four unknown functions (two functions describing the state of stress, the remaining two describing the displacement rate field) in an arbitrary system of curvilinear coordinates (in the plane of the motion) are derived.

The set of equations above is found to be hyperbolic. They have four families of characteristics in the plane of the motion one pair of which are Coulomb slip-lines, the other representing the trajectories of maximum shear rate. It is found that the differential relations along the slip lines are transformed equations of motion and the differential relations along the trajectories of maximum shear rate are identical with those of H. Geiringer for the quasi-static problem (in which the inertia terms in the equations of motion have been rejected).

The essential point of the present paper is to give a method of investigation of quasi-linear partial differential equations and derivation of the equations of the characteristic lines of these equations.

This method is used for the analysis of the differential equations resulting from the mechanical model assumed and transformed to an appropriate system of curvilinear coordinates normalized to the natural form. The derivation of the equations of the characteristics (characteristic directions and the relevant differential relations along the characteristic lines in the plane of independent variables) reduces to the obtainment of some simple algebraic relations between the angles of relative inclination of the coordinate lines and the inclination angles of the principal direction σ_1 to the coordinate lines.

This method enables us to avoid toilsome manipulation connected with the derivation of the equations of the characteristics by the method of eigenfunctions and eigenvectors of the relevant matrices of the differential equations of the problem.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1968 r.
