

**ŚCISLE RÓWNANIA I OBLICZANIE SKOŃCZONYCH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH
UGIĘĆ ORTOTROPOWYCH POWŁOK OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH**

ZENON WASZCZYSZYN (KRAKÓW)

1. Wstęp

Literatura poświęcona skończonym ugięciom powłok sprężystych jest dość bogata. Zwłaszcza badanie stateczności powłok i ich pokrytycznego odkształcania się jak też obliczanie dużych ugięć mało wyniosłych powłok wymagają uwzględnienia nieliniowości geometrycznych. Otrzymywane stąd układy równań nieliniowych można rozwiązywać tylko metodami przybliżonymi; bogatą bibliografię z tego zakresu można znaleźć w monografiach A. S. WOLMIRA [27 i 28].

Z drugiej strony zaczęto intensywnie badać niesprężyste odkształcanie się powłok. W tej dziedzinie dużo uwagi poświęcono obliczaniu małych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok. Badania, zapoczątkowane przez A. A. ILIUSZINA [8], były kontynuowane przez szereg badaczy zwłaszcza w Związku Radzieckim. Przegląd ważniejszych osiągnięć można znaleźć w pracach A. SAWCZUKA i W. OLSZAKA [24] oraz J. R. LEPIKA [14]; powłokami anizotropowymi zajmował się przede wszystkim M. Sz. MIKIEŁADZE [17].

Równoczesne uwzględnienie nieliniowości geometrycznych i fizycznych stwarza znaczne trudności. Nawet w rozpatrywanym w dalszym ciągu przypadku obrotowej symetrii powłoki i obciążenia nie można scałkować ściśle otrzymanego układu równań zwyczajnych; pozostają jedynie metody przybliżone: wariacyjne bądź numeryczne. Tutaj powszechnie stosuje się elektronowe maszyny cyfrowe; na bogate możliwości w tej dziedzinie wskazuje W. I. FIEDOSJEW [4].

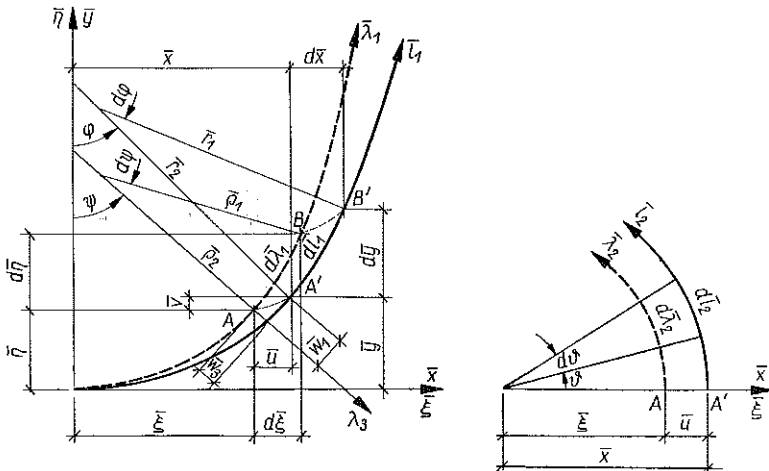
Spośród prac zajmujących się obliczaniem skończonych ugięć sprężysto-plastycznych powłok obrotowo-symetrycznych (płyty okrągłe będziemy w dalszym ciągu uważali za szczególny przypadek powłoki obrotowej) należy wymienić prace P. A. ŁUKASZA [15], M. F. JERSZOWA [9], Y. OHASHI i S. MURAKAMI [20], W. I. FIEDOSJEW i S. M. CZERNAKOWA [5]; obszerniejsze zestawienie prac można znaleźć w [14 i 16].

We wszystkich wymienionych pracach autorzy czynią mniej lub dalej idące uproszczenia. Tak więc wszystkie prace opierają się na teorii deformacyjnej i uwzględniają tylko aktywny proces obciążania. Obok upraszczania równań geometrycznych i równowagi wewnętrznej, np. zgodnie z teorią Kármána, często jest przyjmowany model ciała uproszczonego w znacznym stopniu; np. dla materiału izotropowego

- $J_k, I_k, B_{ij}(k)$ całki w związkach fizycznych,
- $\lambda_j, l_j; \lambda_3 = z, l_1 = s$ współrzędne krzywoliniowe,
- $m_j = 6M_j \Phi^e / h_0^2$ bezwymiarowe momenty gnące,
- $n_j = \frac{N_j \Phi^e}{h_0}, q_j = \frac{Q_j \Phi^e}{h_0}$ bezwymiarowe siły podłużne i poprzeczne,
- $\Omega = \rho \omega^2 \bar{h}_0^2 \Phi^e$ bezwymiarowa siła odśrodkowa,
- $p_j = P_j \Phi^e$ bezwymiarowe siły powierzchniowe,
- P_e, P_{ek}, P_k formy kwadratowe Iliuszina,
- ρ_j, r_j promienie głównych krzywizn przed i po deformacji,
- u, v przemieszczenia mierzone w układzie kartezjańskim,
- w_i przemieszczenia mierzone w układzie krzywoliniowym,
- $\xi, \eta; x, y$ współrzędne kartezjańskie typu Lagrange'a i Eulera.

3. Związki geometryczne

Ograniczenie rozważań do przypadku obrotowej symetrii powłoki i obciążenia pozwala na znaczne uproszczenie podstawowych równań, otrzymujemy mianowicie równania z jedną zmienną niezależną. Jako tę zmienną będziemy przyjmowali współrzędną typu Lagrange'a; w zależności od rodzaju powłoki może nią być zmienna odmierzana od środka np. λ_1 lub ξ bądź od osi symetrii, gdy przyjmiemy kąt ψ (rys. 1).



Rys. 1

Na rysunku 1 pokazano linią przerywaną powłokę przed, a linią ciągłą po odkształceniu. Powierzchnię środkową powłoki można opisać bądź w układzie Eulera, bądź też w układzie Lagrange'a. W tym ostatnim przypadku współrzędne kartezjańskie ξ, η lub krzywoliniowe λ_j będą przypisane ustalonym punktom powierzchni środkowej powłoki i ich wartości nie ulegną zmianie w trakcie deformacji powłoki. Współrzędna opisująca warstwę powłoki będzie równa $\lambda_3 = l_3 = z$, gdyż zgodnie z przyjętą teorią małych odkształceń będziemy pomijali zmianę grubości powłoki na skutek deformacji.

Dla obliczenia odkształceń posłużymy się miarą Cauchy'ego. Na podstawie rys. 1 można obliczyć odkształcenie południkowe powierzchni środkowej e_1 przy użyciu różnych zmiennych niezależnych:

$$(3.1) \quad e_1 = \frac{d\bar{l}_1 - d\lambda_1}{d\lambda_1} = \frac{dl_1}{d\lambda_1} - 1 = \frac{r_1 d\varphi}{\varrho_1 d\psi} - 1 = \frac{dl_1}{d\xi} \cos \psi - 1 = \\ = \frac{dl_1}{d\eta} \sin \psi - 1.$$

W związku (3.1) przeszliśmy łatwo do wielkości bezwymiarowych dzięki odniesieniu wszystkich wielkości fizycznych do tej samej wielkości porównawczej. W dalszym ciągu jako taką wielkość będziemy przyjmowali wybraną grubość powłoki \bar{h}_0 ; otrzymamy wtedy $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 \bar{h}_0$, $\bar{r}_1 = r_1 \bar{h}_0$ itd.

Odształcenie e_1 dla dowolnej warstwy w odległości \bar{z} od powierzchni środkowej wyniesie

$$(3.2) \quad e_1 = \frac{(\bar{r}_1 + \bar{z}) d\varphi - (\bar{\varrho}_1 + \bar{z}) d\psi}{(\bar{\varrho}_1 + \bar{z}) d\psi} = e_1 + \frac{\varrho_1 - r_1}{(\varrho_1 + z)} z \frac{d\varphi}{d\psi}.$$

Jeśli przyjmiemy, że $\varrho_1 \gg h$ (założenie to tkwi u podstaw teorii powłok cienkich), to otrzymamy związek dla odkształcenia promieniowego — związek zgodny z hipotezą Love'a-Kirchhoffa:

$$(3.3) \quad e_1 = e_1 + k_1 z.$$

Odształcenie e_1 będziemy przyjmowali w postaci (3.1), natomiast parametr zakrzywienia powierzchni środkowej będzie wynosił

$$(3.4) \quad k_1 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{r_1 d\varphi}{\varrho_1 d\psi} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{dl_1}{d\lambda_1} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1} \right) (1 + e_1).$$

W podobny sposób możemy wyprowadzić wzór na odkształcenie obwodowe e_2 . Przyjmując $\varrho_2 \gg h$ otrzymamy

$$(3.5) \quad e_2 = e_2 + k_2 z,$$

gdzie parametry deformacji powierzchni środkowej będą wynosiły

$$(3.6) \quad e_2 = \frac{x - \xi}{\xi} = \frac{u}{\xi}, \\ k_2 = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \frac{r_2 \sin \varphi}{\varrho_2 \sin \psi} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \frac{x}{\xi} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\varrho_2} \right) (1 + e_2).$$

Łącznie można napisać związki dla odkształceń w ogólnej postaci

$$(3.7) \quad e_j = e_j + k_j z, \quad j = 1, 2,$$

gdzie

$$(3.8) \quad k_j = \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{\varrho_j} \right) (1 + e_j),$$

a e_1 i e_2 należy przyjąć odpowiednio według (3.1) i (3.6)₁.

W podstawowych równaniach (3.8) parametry e_1 i e_2 są odkształceniami powierzchni środkowej, natomiast k_1 i k_2 zostały nazwane parametrami zakrzywienia powierzchni środkowej. Jeśli przyjmiemy $e_j \ll 1$, to k_j będzie zmianą krzywizn (zgodnie z oznaczeniami w [8] $k_j \approx \kappa_j$). Należy jeszcze dodać, że wzór (3.7) został wyprowadzony przy ograniczeniu pierwotnych promieni krzywizn do $\varrho_j \ll h$; ograniczenie wartości promieni r_j po deformacji powłoki będzie wprowadzone dopiero w związkach fizycznych.

Spośród nieznanych funkcji jako podstawowe niewiadome przyjmiemy przemieszczenie u i kąt φ . W tym celu wyrazimy wszystkie funkcje przez te dwie wybrane niewiadome. Jako zmienną niezależną przyjmiemy λ_1 odmierzaną wzdłuż południka od osi symetrii powłoki, bądź ξ będącą promieniem koła równoleżnikowego.

Wypiszemy teraz oczywiste związki wynikające z rys. 1:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x &= \xi + u, & y &= \eta + v, \\ dx &= dl_1 \cos \varphi, & dy &= dl_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Jeśli zrózniczkujemy (3.9)₁ względem λ_1 i porównamy z pochodną obliczoną z (3.9)₂, to otrzymamy równania (będą to równania nierozdzielności dla odkształceń)

$$(3.10) \quad \frac{dl_1}{d\lambda_1} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\cos \varphi + \frac{du}{d\lambda_1} \right), \quad \frac{dl_1}{d\xi} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{du}{d\xi} \right).$$

Odwrotności promieni krzywizn występujące w (3.8) możemy teraz łatwo obliczyć, gdyż

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{d\varphi}{dl_1} = \frac{d\varphi}{d\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dl_1} = \frac{d\varphi}{d\lambda_1} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi + \frac{du}{d\lambda_1}} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dl_1}, \\ \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{d\varphi}{d\lambda_1} = \frac{d\varphi}{d\xi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

natomiast

$$(3.12) \quad \frac{1}{r_2} = \frac{x}{\sin \varphi}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\xi}{\sin \varphi}.$$

Współrzedną x występującą w (3.12) obliczymy przez scałkowanie równania (3.9)₂ bądź z (3.9)₁ po obliczeniu przemieszczenia u .

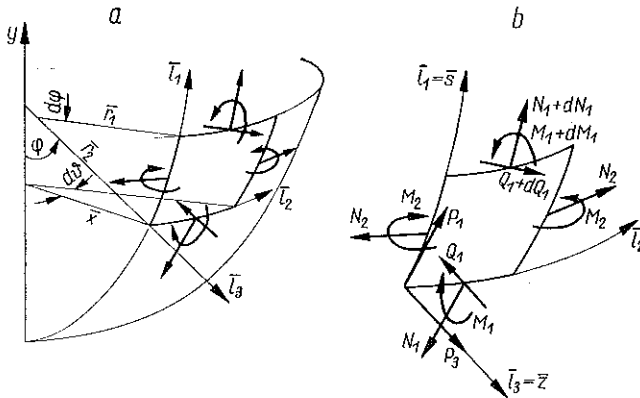
W powłokach liczymy zazwyczaj przemieszczenia normalne i styczne w odniesieniu do nieodkształconej powierzchni środkowej. Przemieszczenia te łatwo obliczymy na podstawie znajomości przemieszczeń u i v (rys. 1):

$$(3.13) \quad w_1 = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad w_3 = u \sin \varphi - v \cos \varphi.$$

W szczególnym przypadku płyt kołowo-symetrycznych należy przyjąć $\varphi = 0$, $1/\varrho_2 = 0$ i otrzymamy wtedy równania wyprowadzone w [26].

4 Równania równowagi

Równania równowagi można otrzymać wprost z klasycznej teorii cienkich powłok obrotowo-symetrycznych. Należy wtedy przyjąć, że równania te odnoszą się do odkształconej powłoki (rys. 3a). Przy przyjęciu znakowania z rys. 3b (1) równania równowagi przyjmują postać [11]



Rys. 3

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\varphi} (N_1 \bar{x}) - N_2 \bar{r}_1 \cos \varphi + Q_1 \bar{x} + P_1 \bar{x} \bar{r}_1 = 0, \\
 (4.1) \quad & \frac{d}{d\varphi} (Q_1 \bar{x}) - N_1 \bar{x} - N_2 \bar{r}_1 \sin \varphi + P_3 \bar{x} \bar{r}_1 = 0, \\
 & \frac{d}{d\varphi} (M_1 \bar{x}) - M_2 \bar{r}_1 \cos \varphi - Q_1 \bar{x} \bar{r}_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy wielkości bezwymiarowe, a kreseczkami oznaczymy różniczkowanie względem zmiennej niezależnej λ_1 lub ξ , to równania (4.1) można napisać w postaci

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & (n_1 x)' = (n_2 \cos \varphi - p_1 x) s' - (q_1 x) \varphi', \\
 & (q_1 x)' = (n_2 \sin \varphi - p_3 x) s' + (n_1 x) \varphi', \\
 & (m_1 x)' = (m_2 \cos \varphi + 6q_1 x) s',
 \end{aligned}$$

gdzie dla skrócenia zapisu przyjęto $l_1 = s$. Dla obliczeń numerycznych wygodniej jest czasami wykonać różniczkowanie po lewej stronie równań (4.2) i przedstawić je w postaci

(1) Przyjęto kierunek dodatni osi $l_3 = z$ zgodnie z normalną zewnętrzną. Dodatnie zwroty wypadkowych sił wewnętrznych przyjęto zgodnie ze znakowaniem stosowanym w teorii sprężystości [11]. Znakowanie takie będziemy w dalszym ciągu stosowali zarówno dla powłoki jak też i dla płyt (brak jednolitości oznaczeń występuje w źródłowych monografiach [25 i 27]).

$$\begin{aligned}
 n'_1 &= (n_2 - n_1) \cos \varphi \frac{s'}{x} - p_1 s' - q_1 \varphi', \\
 (4.3) \quad q'_1 &= (n_2 \sin \varphi - q_1 \cos \varphi) \frac{s'}{x} - p_3 s' + n_1 \varphi', \\
 m'_1 &= (m_2 - m_1) \cos \varphi \frac{s'}{x} + 6q_1 s'.
 \end{aligned}$$

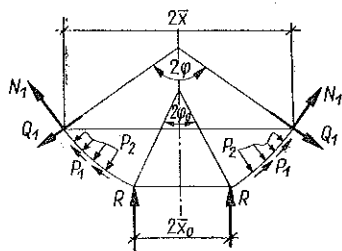
Przy niektórych typach obciążeń zamiast układu równań różniczkowych (4.2) i (4.3) wygodniej jest posługiwać się układem równań różniczkowo-całkowych. Można mianowicie scałkować równanie (4.3)₂; wtedy siła poprzeczna q_1 będzie wynosiła

$$(4.4) \quad q_1 = n_1 \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{\cos \varphi}.$$

W równaniu tym wyprowadzono funkcję obciążenia (takiego terminu używa się w [27 i 28])

$$(4.5) \quad g \equiv \frac{G\Phi^e}{\bar{h}_0} = \frac{\Phi^e}{\bar{h}_0 x} \left(-R x_0 + \bar{h}_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} Y x r_1 d\varphi \right),$$

gdzie obok liniowych obciążeń zewnętrznych R , przyłożonych wzdłuż koła o promieniu x_0 , występuje składowa sił powierzchniowych, równoległa do osi symetrii $Y = P_3 \cos \varphi - P_1 \sin \varphi$.



Rys. 4

Wprowadzenie (4.4) pozwala wyrugować siłę q_1 i umożliwia prowadzenie obliczeń bez jej wyliczania, oczywiście kosztem obliczania funkcji obciążenia g według (4.5). W niektórych przypadkach okazuje się to korzystne, np. jeśli wszystkie siły zewnętrzne są prostopadłe do osi symetrii. Dla płyt przykłady takich obciążeń podano w [26]; dla powłok takim obciążeniem mogą być np. siły odśrodkowe.

Mianowicie w przypadku powłoki o gęstości ρ wirującej ze stałą prędkością kątową ω (jeśli przyjmiemy, że jedynym obciążeniem jest siła odśrodkowa $X = \rho \omega^2 \bar{x} \bar{h}$), to $g = 0$ i równania równowagi przyjmą prostszą postać

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad n'_1 &= (n_2 - n_1 - \Omega x^2 \chi) \cos \varphi \frac{s'}{x} - n_1 \operatorname{tg} \varphi \cdot \varphi', \\
 m'_1 &= (m_2 - m_1) \cos \varphi \frac{s'}{x} + 6n_1 \operatorname{tg} \varphi \cdot s',
 \end{aligned}$$

gdzie $\Omega = \rho \omega^2 \bar{h}_0^2 \Phi^e$, a $\chi = \bar{h}/\bar{h}_0$.

Przy posługiwaniu się przybliżonymi równaniami geometrycznymi, np. równaniami Kármána, pomija się wyrazy $q_1 \varphi'$ i $n_1 \varphi'$ w równaniach (4.3)₁ i (4.3)₂. W liniowej teorii płyt pomija się ponadto wyrażenie $6q_1 s'$ w (4.3)₃.

5. Równania fizyczne

W pracy oprzemy się na teorii deformacyjnej. Znane równania Nádai'a-Hencky'ego-Iliuszina przekształcimy w ten sposób, aby obejmowały one materiał pierwotnie ortotropowy, którego własności w zakresie sprężystym i plastycznym są różne. Zgodnie z przyjętymi założeniami kierunki główne ortotropii będą pokrywały się z liniami głównych krzywizn, tj. liniami $\lambda_j = \text{const}$ przed i $l_j = \text{const}$ po odkształceniu.

Pełne odkształcenia składające się z części sprężystej i odkształcenia trwałego,

$$(5.1) \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

napiżemy zgodnie ze wzorami A. NÁDAI'A [19] i L. W. HU [7] w postaci odpowiadającej materiałowi sprężysto-plastycznemu:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (a_{11}^e \sigma_1 - a_{12}^e \sigma_2) \Phi^e + (a_{11}^p \sigma_1 - a_{12}^p \sigma_2) \Phi^p, \\ \varepsilon_2 &= (-a_{21}^e \sigma_1 + a_{22}^e \sigma_2) \Phi^e + (-a_{21}^p \sigma_1 + a_{22}^p \sigma_2) \Phi^p, \\ \varepsilon_3 &= (-a_{31}^e \sigma_1 - a_{32}^e \sigma_2) \Phi^e + (-a_{31}^p \sigma_1 - a_{32}^p \sigma_2) \Phi^p. \end{aligned}$$

W odkształceniach głównych (5.2) przyjęto $\sigma_3 = 0$ zgodnie z założeniami teorii cienkich powłok. W dalszym ciągu będziemy zajmowali się tylko odkształceniami południkowymi ε_1 i obwodowymi ε_2 .

Podobnie jak to uczynił A. NÁDAI w [19] wyprowadzimy łączne wzory na odkształcenia (przez analogię do teorii sprężystości):

$$(5.3) \quad \varepsilon_1 = (a_{11} \sigma_1 - a_{12} \sigma_2) \Phi, \quad \varepsilon_2 = (-a_{21} \sigma_1 + a_{22} \sigma_2) \Phi,$$

gdzie wypadkowe współczynniki anizotropii a_{ij} oraz funkcja plastyczności Φ będą wynosiły:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{\Phi} (a_{ij}^e \Phi^e + a_{ij}^p \Phi^p), \quad i, j = 1, 2, \\ \Phi &= \Phi^e + \Phi^p. \end{aligned}$$

Związki (5.3) można odwrócić. Wyrazimy w ten sposób naprężenia przez odkształcenia:

$$(5.5) \quad \sigma_1 = \frac{1}{A\Phi} (a_{22} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{1}{A\Phi} (a_{21} \varepsilon_1 + a_{11} \varepsilon_2),$$

gdzie w wyznaczniku A

$$(5.6) \quad A = \det |a_{ij}| = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

uwzględniono już symetrię tensora anizotropii, tj. $a_{ij} = a_{ji}$.

Posługiwanie się intensywnością $\tilde{\epsilon}_i$ jest bardzo niewygodne, gdyż w (5.12) występują współczynniki α_{ij} , które zgodnie z (5.4)₁ są funkcjami Φ . W praktyce wygodniej jest zdefiniować intensywność odkształceń tak, aby po prawej stronie (5.12) występowały stałe współczynniki przy ϵ_j . W dalszym ciągu będziemy określali intensywność według wzoru

$$(5.13) \quad \epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{A^e}} \sqrt{\beta_{22} \epsilon_1^2 + \beta_{12} \epsilon_1 \epsilon_2 + \beta_{11} \epsilon_2^2},$$

gdzie współczynniki β_{ij} będą wynosiły

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \beta_{22} &= \frac{1}{A^e} (a_{11}^p a_{22}^e - 2a_{12}^p a_{12}^e a_{22}^e + a_{22}^p a_{11}^e), \\ \beta_{12} &= \frac{1}{A^e} [a_{11}^p a_{12}^e a_{22}^e - a_{12}^p (a_{11}^e a_{22}^e + a_{12}^e) + a_{22}^p a_{12}^e a_{11}^e], \\ \beta_{11} &= \frac{1}{A^e} (a_{11}^p a_{12}^e - 2a_{12}^p a_{12}^e a_{11}^e + a_{22}^p a_{11}^e). \end{aligned}$$

Współczynniki te będą teraz wartościami stałymi, które można obliczyć na podstawie znajomości α_{ij}^e i α_{ij}^p ; podobnie jak w (5.6) $A^e = \alpha_{11}^e a_{22}^e - \alpha_{12}^e$.

Aby otrzymać poprawną wartość Φ , pierwotną krzywą doświadczalną narysowaną w układzie σ_i, ϵ_i (linia cienka na rys. 5) należy poprawić. Można ją otrzymać przez odpowiednie przeskalowanie osi ϵ_i . Przeliczenia najwygodniej jest wykonywać na drodze kolejnych przybliżeń posługując się np. metodą podaną przez R. A. MIEŻŁUMJANA [18]. W dalszym ciągu będziemy zajmowali się tylko procesem aktywnym i będziemy przyjmowali, że funkcja $\Phi(\epsilon_i)$ jest znana (linia gruba na rys. 5).

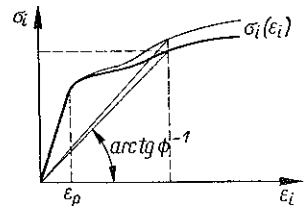
Przyjęcie intensywności w postaci (5.13) charakteryzuje się ponadto tym, że dla $\epsilon_i \leq \epsilon_p$ otrzymujemy $\epsilon_i = \tilde{\epsilon}_i$, gdyż dla zakresu sprężystego $\Phi^p = 0$; skąd $\Phi = \Phi^e$ i $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^e$ zgodnie z (5.4).

W szczególnym przypadku jednakowych własności anizotropowych w zakresie sprężystym i plastycznym $\alpha_{ij}^e = \alpha_{ij}^p = \alpha_{ij}$ (materiał taki jest przyjmowany w [21]) otrzymamy znaczne uproszczenie współczynników β_{ij} , mianowicie $\beta_{11} = \alpha_{11}$, $\beta_{12} = 2\alpha_{12}$, $\beta_{22} = \alpha_{22}$. Jeśli materiał będzie izotropowy i nieściśliwy, to $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$, $\alpha_{12} = 1/2$ i wzór (5.13) na intensywność przyjmuje znaną postać

$$(5.15) \quad \epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2^2}.$$

Dla wygody dalszych obliczeń intensywność ϵ_i przedstawimy w postaci

$$(5.16) \quad \epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{A^e}} \sqrt{P_e + P_{ek} z + P_k z^2},$$



Rys. 5

którą otrzymamy przez podstawienie (3.7) do (5.13). Otrzymamy wtedy formy kwadratowe ILIUSZINA [8], zmodyfikowane dla ciała ortotropowego:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} P_e &= \beta_{22} e_1^2 + \beta_{12} e_1 e_2 + \beta_{11} e_2^2, \\ P_{ek} &= \beta_{22} e_1 k_1 + \beta_{11} e_2 k_2 + \frac{\beta_{12}}{2} (e_1 k_2 + e_2 k_1), \\ P_k &= \beta_{22} k_1^2 + \beta_{12} k_1 k_2 + \beta_{11} k_2^2. \end{aligned}$$

Możemy teraz obliczyć wypadkowe sił wewnętrznych. Siłę podłużną i moment będziemy obliczać z przybliżonych wzorów (3)

$$(5.18) \quad N_j = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2} \sigma_j \bar{d}\bar{z}, \quad M_j = \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2} \sigma_j \bar{z} \bar{d}\bar{z}, \quad j = 1, 2.$$

Skorzystamy ze wzorów (5.5), a po wprowadzeniu bezwymiarowych wielkości $n_j = N_j \Phi^e / \bar{h}_0$, $m_j = 6M_j \Phi^e / \bar{h}_0^2$ otrzymamy następujący układ równań fizycznych:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} n_1 &= B_{22(1)} e_1 + B_{12(1)} e_2 + B_{22(2)} k_1 + B_{12(2)} k_2, \\ \frac{m_1}{6} &= B_{22(2)} e_1 + B_{12(2)} e_2 + B_{22(3)} k_1 + B_{12(3)} k_2, \\ n_2 &= B_{12(1)} e_1 + B_{11(1)} e_2 + B_{12(2)} k_1 + B_{11(2)} k_2, \\ \frac{m_2}{6} &= B_{12(2)} e_1 + B_{11(2)} e_2 + B_{12(3)} k_1 + B_{11(3)} k_2. \end{aligned}$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzono macierz całek \mathbf{B} , której elementy wynoszą

$$(5.20) \quad B_{ij(k)} = \alpha_{ij}^p J_k + (\alpha_{ij}^e - \alpha_{ij}^p) I_k, \quad i, j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$J_k = \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \frac{\Phi^e}{\Phi} \frac{z^{k-1}}{A} dz, \quad I_k = \int_{-\chi/2}^{\chi/2} \left(\frac{\Phi^e}{\Phi} \right)^2 \frac{z^{k-1}}{A} dz.$$

W całkach J_k i I_k w granicach całkowania występuje $\chi = \bar{h}/\bar{h}_0$, pozwalające uwzględnić zmienną grubość powłoki (dla ujednoczenia obliczeń jako \bar{h}_0 należy przyjąć tę samą porównawczą grubość powłoki, jaką przyjmowaliśmy w równaniach geometrycznych i równowagi); w przypadku stałej grubości $\chi = 1$.

Podobnie jak przy obliczaniu ε_i w szczególnych przypadkach postać związków fizycznych może ulec znacznemu uproszczeniu. Tak więc w przypadku $\alpha_{ij}^e = \alpha_{ij}^p = \alpha_{ij}$ nie ma potrzeby obliczania całek I_k , gdyż $B_{ij(k)} = \alpha_{ij} J_k$ zgodnie z (5.20). Dla materiału izotropowego, nieściśliwego i stałej grubości powłoki otrzymamy

$$(5.21) \quad J_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \Omega_1, \quad J_2 = -\frac{\Omega_2}{3}, \quad J_3 = \frac{2}{18} - \frac{\Omega_3}{6},$$

(3) Wzory te przyjmuje się w teorii powłok cienkich, dla których $\bar{r}_j \gg \bar{h}$.

gdzie przez Ω_k oznaczono funkcje Lepika, wyprowadzone w pracy [13] dla materiału sprężysto-plastycznego z jednokrotnym liniowym wzmocnieniem. Po podstawieniu (5.21) do (5.19) otrzymujemy układ równań fizycznych, wyprowadzony w [26].

W przypadku ciała liniowo sprężystego $\Phi^e/\Phi = 1$ i $B_{ij(k)} = \alpha_{ij}^e J_k$, gdzie całki J_k wynoszą

$$(5.22) \quad J_1 = \frac{\chi}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \frac{E_2}{E_1}, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = \frac{\chi^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{E_2}{E_1}.$$

Całki te odpowiadają sztywnościom płytowym odpowiednio dla rozciągania oraz zginania i mają stałe wartości niezależnie od wielkości odkształceń. Dzięki temu, że $J_2 = 0$, układ równań fizycznych rozprzega się, tj. $n_j = n_j(e_1, e_2)$, $m_j = m_j(k_1, k_2)$ dla $j = 1, 2$.

6. Metoda rozwiązywania

Wyprowadzony układ równań, złożony ze związków geometrycznych (3.7), równań równowagi wewnętrznej (4.2) i równań fizycznych (5.19) można w ogólnym przypadku sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowo-całkowych z niewiadomymi funkcjami u i φ . Taka droga jest celowa tylko w nielicznych, szczególnych przypadkach [kiedy można obliczyć całki (5.20) w równaniach fizycznych], a ponadto przy uproszczonych równaniach (np. w teorii Kármána). Tak otrzymany układ równań można dalej rozwiązywać tylko metodami przybliżonymi. Najczęściej stosuje się metody oparte na rachunku wariacyjnym; obiera się przy tym postać odkształconej powłoki przez przyjęcie funkcji spełniających warunki brzegowe. Połączenie tych metod z obliczeniami numerycznymi wykonywanymi na maszynach cyfrowych (J. R. LEPIK w [13] łączy metody wariacyjne z metodą «sprężystych rozwiązań» Iliuszina, a W. I. FIEDOSJEW w [4] w metodzie Ritza numerycznie rozwiązuje nieliniowy układ równań algebraicznych) pozwoliło na zwiększenie swobody dobierania funkcji.

Znaczne trudności występujące w podanych metodach, nawet przy prostych przypadkach, skłaniają do stosowania metod czysto numerycznych, wygodnych do zaprogramowania na maszynach cyfrowych.

Taką metodą jest metoda półodwrotna polegająca na zamianie zadania brzegowego na zadanie z warunkami początkowymi typu Cauchy'ego. Metoda ta jest obecnie powszechnie stosowana ze względu na dużą prostotę. Przyjmujemy mianowicie tyle wartości początkowych w wyjściowym punkcie, ile jest nieznanych funkcji (oczywiście tylko część wartości będzie niezależna ze względu na konieczność spełnienia warunków brzegowych w tym punkcie), następnie na drodze numerycznego całkowania dochodzimy do następnego brzegu. Warunki początkowe należy tak dobrać, aby były spełnione wszystkie warunki brzegowe.

Cała trudność metody polega na odpowiednim dobraniu warunków początkowych. Na ogół wartości te dobiera się na drodze kolejnych prób (metoda «wstrzeliwania się») przez coraz to lepsze spełnianie warunków brzegowych, a następnie lepsze dobranie wartości początkowych [3]. Upowszechnienie tej metody było możliwe dopiero

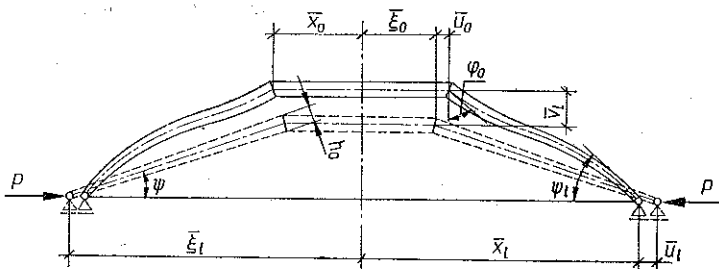
przypadku, gdy $\varepsilon_i \leq \varepsilon_p$ w całym przekroju, pierwsze przybliżenie jest rozwiązaniem ścisłym.

Numeryczne obliczanie całek $B_{ij}(k)$ nawet w prostszych przypadkach okazuje się znacznie łatwiejsze do zaprogramowania na maszyny elektroniczne niż wykorzystanie ścisłych wzorów. I tak w przypadku materiału izotropowego z liniowym wzmocnieniem korzystniejsze jest stosowanie wzorów kwadraturowych niż stosowanie funkcji Lepika Ω_j . Nie trzeba wtedy (por. [13]) rozróżniać jednostronnego czy też dwustronnego uplastycznienia ani też wprowadzać funkcję \ln . W przykładzie numerycznym dalej podanym uzyskano odpowiednią dokładność (rzędu 1%) przez podział przekroju na 8 odcinków i przyjęcie wzoru Simpsona.

Wyjściowy układ równań można scałkować dowolną metodą numeryczną. W [23] zastosowano metodę Eulera, a w [26] jej ulepszoną wersję; w pracy [22] zastosowano metodę Adamsa. W dalszym ciągu będziemy stosowali metodę Rungego-Kutty. Zaletą tej metody jest duża dokładność przy stosunkowo dużych krokach całkowania, dalej możliwość łatwego zaprogramowania przy małym obciążeniu pamięci maszyny. Zaletą tej metody jest ponadto możliwość przerywania obliczeń w dowolnym punkcie oraz możliwość zmiany kroku całkowania. Ta ostatnia własność ma duże znaczenie w pobliżu przewidywanych osobliwości, np. w przypadku obciążeń skupionych możemy odpowiednio zagęścić krok całkowania dla otrzymania dobrej dokładności obliczeń.

7. Obliczenie skończonych ugięć powłoki stożkowej

Podaną teorię zilustrujemy na przykładzie powłoki stożkowej pokazanej na rys. 6. Ze względu na małą wyniosłość powłoki jako zmienną niezależną przyjęto ξ .



Rys. 6

Powłoka jest obciążona jedynie pierścieniem sił przyłożonych do zewnętrznego konturu. Podstawowy układ równań przyjmie teraz postać:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} e_2 &= \frac{u}{\xi}, & x &= u + \xi, \\ k_2 &= \left(\frac{\sin \varphi}{x} - \frac{\sin \psi}{\xi} \right) (1 + e_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1(e_2, k_2, n_1, m_1) \\ k_1(e_2, k_2, n_1, m_1) \end{aligned} \quad \text{według (6.1),}$$

$$\begin{aligned} n_2(e_1, e_2, k_1, k_2) \\ m_2(e_1, e_2, k_1, k_2) \end{aligned} \quad \text{według (5.19),}$$

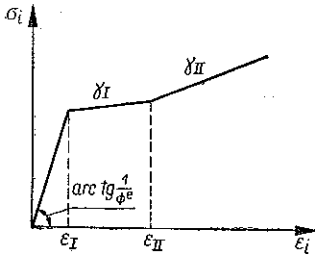
$$u' = s' \cos \varphi - 1, \quad s' = \frac{1+e_1}{\cos \varphi},$$

(7.1)
[c.d.]

$$\varphi' = \frac{k_1}{\cos \varphi},$$

$$n'_1 = (n_2 - n_1) \cos \varphi \frac{s'}{x} - n_1 \operatorname{tg} \varphi \cdot \varphi', \quad q_1 = n_1 \operatorname{tg} \varphi,$$

$$m'_1 = (m_2 - m_1) \cos \varphi \frac{s'}{x} + 6n_1 \operatorname{tg} \varphi \cdot s'.$$



Rys. 7

Przyjęto, że materiał powłoki jest izotropowy, ściśliwy; tak więc współczynniki anizotropii przyjmą wartości

$$(7.2) \quad \begin{aligned} a_{11}^e = a_{22}^e = a_{11}^p = a_{22}^p = 1, \\ a_{12}^e = \nu, \quad a_{12}^p = 0,5. \end{aligned}$$

Funkcję Φ przyjęto na podstawie wykresu podanego na rys. 7; będzie to idealizacja wykresu dla miękkiej stali. Ażeby można było wygodnie liczyć

całki J_k i I_k znajdziemy

$$(7.3) \quad \frac{\Phi^e}{\Phi} = \begin{cases} 1, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_I; \\ 1 - \gamma_I \left(1 - \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_I \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{II}; \\ 1 - \gamma_I \left(\frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_I}{\varepsilon_i}\right) - \gamma_{II} \left(1 - \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_i}\right), & \varepsilon_{II} \leq \varepsilon_i, \end{cases}$$

gdzie γ_I i γ_{II} są współczynnikami wzmocnienia (dla ciała idealnie sprężystego $\gamma = 0$, dla idealnie plastycznego $\gamma = 1$). Przyrównując intensywność ε_i do wartości ε_I a następnie ε_{II} , otrzymamy z (5.16) współrzędne

$$(7.4) \quad z_{\pm}^{(m)} = z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - \frac{P_e - \varepsilon_m^2 A^e}{P_k}}, \quad z_0 = -\frac{P_{ek}}{P_k}$$

dla $m = I, II$. Obliczone z (7.4) z_+^I i z_-^I oznaczają współrzędne warstw powłoki, oddzielające część sprężystą od uplastycznionej części powłoki; podobnie z_+^{II} i z_-^{II} oznaczają współrzędne warstw, w których występuje wzmocnienie. Współrzędna z_0 określa warstwę powłoki, w której intensywność osiąga minimalną wartość.

Jeśli cały przekrój ulega uplastycznieniu, to pod pierwiastkiem w (7.4)₁ mamy ujemną liczbę i należy przyjąć $z_+^I = z_-^I = z_0$.

Jak wspomnieliśmy w p. 6, całki J_k i I_k , a stąd też całki $B_{i(f_k)}$, będziemy obliczali numerycznie; zastosujemy wzór Simpsona przy podziale przekroju na 8 równych części, np. J_k będziemy obliczali wzorem

$$(7.5) \quad J_k = \frac{\chi}{24} \left\{ f_k\left(\frac{\chi}{2}\right) + f_k\left(-\frac{\chi}{2}\right) + 2 \left[f_k\left(\frac{\chi}{4}\right) + f_k(0) + f_k\left(-\frac{\chi}{4}\right) \right] + \right. \\ \left. + 4 \left[f_k\left(\frac{3}{8}\chi\right) + f_k\left(\frac{\chi}{8}\right) + f_k\left(-\frac{\chi}{8}\right) + f_k\left(-\frac{3}{8}\chi\right) \right] \right\}.$$

We wzorze (7.4) $f_k(z_i)$ oznacza wartości funkcji pod całką (5.20)₂ dla ustalonych wartości $z = z_i$. Całki I_k obliczymy analogicznie podstawiając zamiast $f_k(z)$ funkcję $F_k(z) = f_k(z) \Phi^e/\Phi$.

Pierwsza część układu równań (7.1) pozwala obliczyć wszystkie potrzebne wartości służące do obliczenia pochodnych u' , φ' , n'_1 , m'_1 w ustalonym punkcie ξ_r . Przy przejściu do następnego punktu $\xi_{r+1} = \xi_r + \Delta\xi$ odpowiednie wartości obliczymy ze wzoru czwartego rzędu Rungego-Kutty

$$(7.6) \quad w_{r+1} = w_r + \frac{1}{6} (k_1^{(r)} + 2k_2^{(r)} + 2k_3^{(r)} + k_4^{(r)}),$$

gdzie $w = u, \varphi, n_1, m_1$, a $k^{(r)}$ oznacza odpowiednie przyrosty liczone dla punktu ξ_r (por. [1]).

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla powłoki z otworem w środku o promieniu $\bar{\xi}_0 = 10 \bar{h}_0$. Grubość porównawczą \bar{h}_0 przyjęto na wewnętrznym konturnie, tj. dla $\xi_0 = 10$. Przyjmujemy liniowo zmienną grubość powłoki według równania $\chi = 1 + 0,02(10 - \xi)$, a kąt nachylenia tworzącej powierzchni środkowej przed odkształceniem $\psi = 4^\circ$.

Materiał powłoki będzie scharakteryzowany współczynnikami (7.2), przy czym przyjmujemy, że w zakresie sprężystym współczynnik Poissona wynosi $\nu = 0,3$, a $\varepsilon_I = 1 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_{II} = 10 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_I = 1,0$, $\gamma_{II} = 0,9$.

Całkowanie numeryczne zaczęto od brzegu wewnętrznego $\xi_0 = 10$, na którym przyjęto wartości początkowe $u_0 = 22,5 \cdot 10^{-3}$, $\varphi_0 = 7^\circ$, $\dot{u} = \dot{q}_1 = \dot{m}_1 = 0$ odpowiadające swobodnemu brzegowi. Całkowanie numeryczne prowadzono aż do punktu $\xi_t = 28,1$, w którym $u_t = -221,8 \cdot 10^{-3}$, $v_t = 1,723$, $\varphi_t = 0,28215 = = 16^\circ 10'$. Wartości $m_t = 0$ i $u_t \neq 0$ odpowiadają podparciu przegubowo-przesuw-nemu. Pozostałe siły wewnętrzne odczytane przy $\xi_t = 28,1$, wynoszą $n_1 = = -0,1546 \cdot 10^{-3}$, $q_1 = -0,0447 \cdot 10^{-3}$, $n_2 = -0,7942 \cdot 10^{-3}$, $m_2 = 0,0678 \cdot 10^{-3}$. Powłoka będzie obciążona siłą poziomą $p = P/E\bar{h}_0 = -0,1609 \cdot 10^{-3}$. Na rys. 8 podano rozkład obliczonych wielkości; przemieszczenie v obliczono względem punktu ξ_0 . Na rys. 8a podano rozkład stref sprężystych i uplastycznionych. Po-czawszy od punktu $\xi \approx 20$ cała powłoka jest uplastyczniona; odkształcenia są tak duże, że pojawia się strefa wzmocnienia ograniczona krzywą z_{II}^I .

Równaniami fizycznymi teorii małych sprężysto-plastycznych odkształceń objęliśmy materiały anizotropowe wykorzystując koncepcje A. NÁDAIA [19] i L. W. HU [7]. Taka metoda jest wygodniejsza do wykonania obliczeń numerycznych niż np. wykorzystanie wzorów I. I. GOLDENBLATA [6], w których wyprowadza się nowe niezmienniki stanu naprężenia i odkształcenia. Wzmocnienie materiału zostało, podobnie jak w [7], uwzględnione na płaszczyźnie σ_i, ε_i przez wprowadzenie do obliczeń funkcji $\Phi(\varepsilon_i)$, wziętej z doświadczeń.

Zaproponowana metoda rozwiązywania jest bardzo ogólna. Numeryczna postać metody półdrotnej daje się łatwo ująć w postaci algorytmu, który można stosunkowo prosto zaprogramować na elektronowe maszyny cyfrowe. Duża szybkość obliczeń jest tutaj niezbędnym warunkiem efektywności metody, gdyż wartości początkowe można określić tylko na drodze kolejnych prób, wykonując odpowiednią liczbę przeliczeń. W samej metodzie nie ma większego znaczenia, czy operujemy mniej, czy też bardziej złożonymi równaniami. Dla metody nie ma znaczenia, czy liczymy duże, czy małe ugięcia, czy materiał jest ortotropowy, czy też izotropowy, ściśliwy itp. Grubość powłoki może być zmienna w sposób ciągły lub też skokowy (warunki ciągłości są zapewnione w przyjętym sposobie całkowania), a obciążenie dowolne obrotowo-symetryczne.

Przyjęcie numerycznego całkowania wzdłuż południka powłoki i numeryczne obliczenia całek $B_{ij(k)}$ wzdłuż normalnej do powierzchni środkowej pozwala na uwzględnienie niejednorodności materiału w obydwu kierunkach. Problem ten jest szczególnie ważny w niektórych konstrukcjach; np. w powłokach silników rakietowych wymiarowanych przy uwzględnieniu dużych ugięć (por. [2]) własności materiału są funkcjami temperatury i zmieniają się we wskazanych kierunkach (oczywiście nasze równania należy wtedy jeszcze uzupełnić odpowiednimi wyrazami uwzględniającymi zmiany temperatury).

Metodę półdrotną można dostosować do rozwiązywania problemów kształtowania (np. dobranej odpowiedniej zmiany grubości czy też zaprogramowanie cech materiału formowanych temperaturą lub napromieniowaniem) przy dopuszczeniu dużych ugięć.

Metodą nadaje się szczególnie dobrze do badania stanów pokrytycznych płyt i powłok, gdyż równania równowagi upraszczają się i zmniejsza się liczba niezależnych warunków początkowych [26].

Literatura cytowana w tekście

1. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова, *Численные методы анализа* [tłumacz. polskie, t. 2, PWN, Warszawa 1965].
2. В. И. Феодосьев, *Прочность теплонапряженных узлов жидкостных ракетных двигателей*, Оборонгиз, Москва 1963.
3. В. И. Феодосьев, *Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем*, Прикл. Мат. Мех., 2, 27 (1963), 265–274.
4. W. I. FEODOSJEW, *Some methods of approach to the solution of nonlinear boundary-value problems by means of digital computers*, Arch. Mech. Stos., 4, 19 (1967), 603–616.

5. В. И. Феодосьев, С. М. Черняков, *О передаче сосредоточенных сил на тонкостенную оболочку*, Инж. Ж., Мех. Тв. Тела, 6 (1966), 57–63.
6. И. И. Гольденблат, *Некоторые вопросы упругопластических деформаций*, Исслед. прочности, пласт. и полз. строит. мат., ЦНИИС, Москва 1955, 5–32.
7. L. W. HU, *Studies on plastic flow of anisotropic metals*, JAM, 8, 23 (1956), 444–450.
8. А. А. Ильющин, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва–Ленинград 1948.
9. М. Ф. Ершов, *Ривновага гнучных пружно-пластичных оболочек и пластин*, Прикл. Мех., 5, 8 (1962), 489–499.
10. Л. А. Колесников, *К установлению пределов применимости уравнений Кармана изгиба пластин*, Расчет пространств. констр., в. VII, Гостройиздат, Москва 1962.
11. Н. В. Колкунов, *Основы расчета упругих оболочек*, Госиздат «Высшая Школа», Москва 1963.
12. С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Гостехиздат, Москва–Ленинград 1950.
13. Ю. Р. Лепик, *О равновесии гибких пластинок за пределом упругости*, Прикл. Мат. и Мех., 6, 21 (1957), 833–842.
14. Ю. Р. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек*, Инж. Журнал, 3, 4 (1964), 601–616.
15. П. А. Лукаш, *Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности*, Труды ЦНИИСК, вып. 7 (1961), 268–318.
16. *Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи пластин и оболочек»*, Тарту 1966.
17. М. Ш. Микеладзе, *Статика анизотропных пластических оболочек*, Изд. АН ГССР, Тбилиси 1963.
18. Р. А. Межлумян, *О функции поперечной деформации*, Прикл. Мат. и Мех., 4, 16 (1952), 491–494.
19. A. NÁDAI, *Theory of flow and fracture of solids*, V. 1, w. 2, Mc Graw-Hill, NY-Toronto-London 1950.
20. Y. OHASHI, S. MURAKAMI, *The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate*, Proceeding of the 11-th Intern. Congress of Appl. Mech., München (1964), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NY 1966.
21. W. OLSZAK, J. MURZEWSKI, *Elastic-plastic bending of non-homogeneous orthotropic circular plates*, Arch. Mech. Stos., 5, 9 (1957), 467–485; Arch. Mech. Stos., 6, 9 (1957), 605–630.
22. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich, osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału* [Praca habilitacyjna], Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Podstawowe nauki tech., Z. 2, 11 (1967).
23. О. М. Паллий, В. С. Чувиковский, *Упруго-пластический изгиб круговой цилиндрической оболочки*, Прикл. Мех., 6, 2 (1966), 49–54.
24. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *Zagadnienia powłok niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, 1 (1963), 37–73.
25. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, w.2, Mc Graw-Hill, NY-Toronto-London 1959 (wyd. polskie «Arkady», Warszawa 1962).
26. Z. WASZCZYSZYN, *Skończone sprężysto-plastyczne ugięcia płyt kołowo-symetrycznych*, Rozpr. Inżyn., 1, 15 (1967), 123–141.
27. А. С. Волямир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.
28. А. С. Волямир, *Устойчивость деформируемых систем*, вып. 2, Издат. «Наука», Москва 1967.

Резюме

ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАСЧЕТ
КОНЕЧНЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ ОРТОТРОПНЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Выводятся точные геометрические уравнения и уравнение внутреннего равновесия на основе предположений теории тонких оболочек и введенных координатных систем Лагранжа и Эйлера. В качестве основных функций принято функцию перемещения u и угол φ , определенный между касательной к меридиану деформированной оболочки и осью вращения; в качестве независимой переменной принято координаты Лагранжа ξ или криволинейную λ_1 .

Физические уравнения теории деформации распространяются на предварительно ортотропный упруго-пластический материал. Коэффициенты анизотропии α_{ij} являются результирующими коэффициентами α_{ij}^e и α_{ij}^p соответственно для упругого и идеально-пластического материалов. Упрочнение учитывается на плоскости σ_i, ε_i принимая произвольную функцию $\Phi(\varepsilon_i)$, определенную по экспериментам. Продольные силы n_j и моменты m_j связаны с деформациями ε_i посредством интегралов $B_{ij}(k)$.

Предлагается полуобратный метод решения путем замены краевой задачи задачей типа Коши. Алгоритм разработанный в [26] распространяется на расчеты конечных упруго-пластических прогибов ортотропных оболочек переменной толщины. Физические зависимости обращаются путем итерации, вычисляя интегралы $B_{ij}(k)$ с помощью квадратур; применяется метод интегрирования Рунге-Кутты.

Теория иллюстрируется численным примером расчета пологой, конусной оболочки с переменной толщиной стенки.

Summary

EXACT EQUATIONS AND COMPUTATION OF FINITE
ELASTIC-PLASTIC DEFLECTIONS OF ORTHOTROPIC SHELLS OF REVOLUTION

Exact geometric equations and those of internal equilibrium are derived on the grounds of the assumptions of the theory of thin shells by introducing Lagrangian and Eulerian coordinates. As the fundamental functions are assumed the displacement u and the angle φ between the tangent to the meridian of the deformed shell and the geometric axis of the shell. The independent variable is a Lagrangian coordinate ξ or curvilinear coordinate λ_1 .

The physical equations of the strain theory are generalized to the case of an initially orthotropic elastic plastic material. The coefficients of anisotropy α_{ij} are resultants of the coefficients α_{ij}^e and α_{ij}^p for the elastic and perfectly plastic material, respectively. The strain-hardening is taken into consideration, in the σ_i, ε_i -plane by assuming an arbitrary function $\Phi(\varepsilon_i)$ taken from experiment. The longitudinal forces n_j and moments m_j are related to the strains ε_i by means of the integrals $B_{ij}(k)$.

A semi-inverse solution method is proposed in which the boundary-value problem is replaced by a Cauchy problem. The algorithm proposed in [26] is generalized to the computation of finite elastic-plastic deflections of orthotropic shells of variable thickness. The physical relations are inverted by the iteration method, by evaluating the integrals $B_{ij}(k)$ by means of quadrature formulae. The set of differential equations thus obtained is solved numerically by the Runge-Kutta method.

The theory is illustrated by a numerical example of computation of a conical shell, of small rise and variable wall thickness.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 stycznia 1968 r.