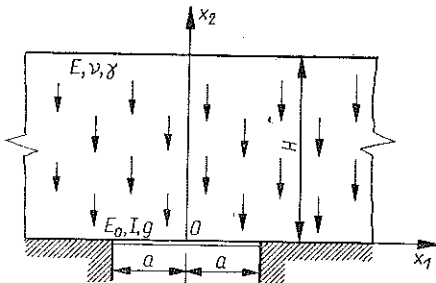


UKŁAD TARCZOWO-PRĘTOWY
PODDANY DZIAŁANIU SIŁ MASOWYCH

ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

1. Wstęp

Rozpatrywać będziemy zagadnienie sprężystego pasma tarczowego o dużej wysokości H . Wzdłuż dolnej krawędzi pasmo jest połączone na odcinku $|x_1| < a$ z belką sprężystą obustronnie utwierdzoną o sztywności giętnej $E_0 I$, a wzdłuż półprostych $|x_1| > a$ jest utwierdzone całkowicie w nieodkształcalnym podłożu. Na układ działają siły masowe: ciężar własny tarczy i belki (rys. 1).



Rys. 1

Zasadniczym celem pracy jest wyznaczenie rozkładu oddziaływań tarczy na belkę. Następnie określony zostanie stan naprężenia w tarczy.

Wyniki uzyskane w tej pracy mogą znaleźć zastosowanie przy analizie obciążeń przekazywanych przez ściany na nadproża (w fazie liniowo-sprężystej) oraz naprężeń występujących w ścianach w okolicach przesklepionych otworów. Postawiony problem ma więc znaczenie praktyczne i może być nazwany «zagadnieniem nadproża».

Tradycyjnie przyjmuje się, że nadproże jest obciążone ciężarem tej części ściany, która znajduje się poniżej hipotetycznej krzywej odłamu, który wytworzyłby się, jeżeli otwór byłby nieprzesklepiony. Ciężar ściany z obszaru powyżej krzywej odłamu, zgodnie z tym poglądem, jest przenoszony przez tzw. sklepienie odciążające na partie ścian poza otworem.

Na hipotezie sklepienia odciążającego oparte są postanowienia Polskiej Normy (PN-64/B-02009) dotyczące obciążenia nadproży. Na hipotezie tej opiera się również teoria pionowego ciśnienia górniczego działającego na strop obudowy chodników górniczych i tuneli opracowana przez M. M. PROTODIAKONOWA [1] i stanowiąca do dzisiaj zasadniczą metodę w budownictwie podziemnym. Z nowszych prac poświęconych temu zagadnieniu należy wymienić publikację M. NIEMIEC i G. SZEFERA [2]. Autorzy wyznaczyli krzywą sklepienia odciążającego na gruncie

teorii sprężystości, traktując tę krzywą jako miejsce geometryczne punktów największego wyężenia materiału.

B. N. ŻEMOCZKIN pierwszy, jak się wydaje, podszedł do zagadnienia odmiennie. W monografii [3] Żemoczkin rozpatruje rygle współpracujące ze stojącą na nich ścianą. Rygle traktuje jako belki ciągłe o nieskończonej wielu równych przesłach, ścianę natomiast jako sprężyste pasmo tarczowe o skończonej wysokości. Okresowy (względem poziomej współrzędnej) charakter obciążeń pozwala budować rozwiązania w postaci szeregów trygonometrycznych. W dalszym ciągu Żemoczkin rozważa nadproża wieloprzesłowe oparte odcinkami na filarach międzyotworowych oraz nadproża jednopresłowe. W rozważaniach swych uwzględniła sprężystą współpracę belki i ściany. Metoda obliczeń opiera się na znanej (i należącej również do B. N. Żemoczkin) koncepcji obliczania belek na podłożu sprężystym, polegającej na zastąpieniu ciągłych więzów łączących belkę z podłożem (typu półprzestrzeni lub półpłaszczyzny sprężystej) więzami wprowadzonymi do skończonej liczby punktów styku. Jak wiadomo, jest to metoda przybliżona i wymagająca bardzo dużego nakładu pracy rachunkowej.

Rozwiązanie zagadnienia, przedstawione w niniejszej pracy, opiera się na metodach ścisłych i pozwala łatwo i małym nakładem pracy wyznaczyć rozkład i wielkość obciążeń przekazywanych na belkę.

Rozważania oparto na założeniach, które wprawdzie obciążają wyniki pewnym błędem, jednakże znacznie upraszczają obliczenia i pozwalają uzyskać efektywne rozwiązanie postawionego problemu.

Przyjęto, że krawędź górna belki przemieszcza się tylko pionowo, przy czym przemieszczenia te są równe przemieszczeniom osi belki. W rzeczywistości będą miały miejsce nieznaczne przemieszczenia poziome związane z obrotami przekrojów poprzecznych belki.

Zakłada się ponadto, że zaburzenia brzegowe spowodowane sprężystą podatnością belki mają charakter lokalny i przy dużym H/a można zaniedbać wpływ warunków brzegowych na krawędzi $x_2 = H$, przyjmując $H = \infty$, co odpowiada tarczy półnieograniczonej. Błąd spowodowany takim uproszczeniem zadania można dość łatwo oszacować.

Warunki brzegowe na krawędzi dolnej $x_2 = 0$ możemy sformułować następująco:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_1(x_1, 0) &= 0, & -\infty < x_1 < \infty; \\ u_2(x_1, 0) &= V(x_1), & \text{jeśli } |x_1| < a; \\ u_2(x_1, 0) &= 0, & \text{jeśli } |x_1| > a. \end{aligned}$$

Tutaj $V(x_1)$ oznacza ugięcie belki.

Wzory określające stan naprężenia i przemieszczenia tarczy można przedstawić jako superpozycję dwóch rozwiązań:

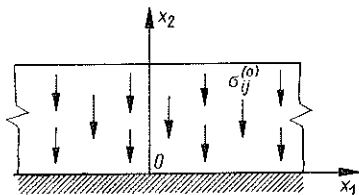
$$(1.2) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(1)}, \quad i, j = 1, 2,$$

gdzie $\sigma_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ oznaczają składowe stanu naprężenia i przemieszczenia pasma tarczowego o skończonej wysokości H , utwierdzonego na całym brzegu $x_2 = 0$, spowodowanego działaniem ciężaru własnego (rys. 2); $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ składowe stanu naprężenia i przemieszczenia w tarczy półnieograniczonej z mieszanymi warunkami na brzegu $x_2 = 0$ (rys. 3a), gdzie

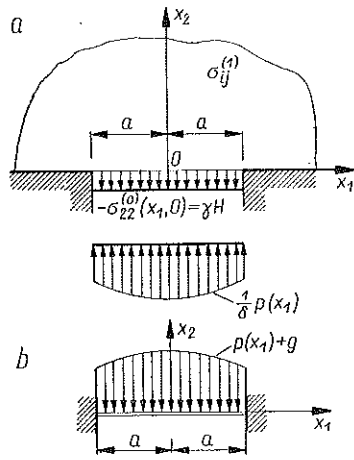
$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_1^{(1)}(x_1, 0) &= 0, & -\infty < x_1 < \infty, \\ u_2^{(1)}(x_1, 0) &= 0, & \text{jeśli } |x_1| > a, \\ \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) &= -\sigma_{22}^{(0)}(x_1, 0) - \frac{1}{\delta} p(x_1), & \text{jeśli } |x_1| < a. \end{aligned}$$

Korzystamy tutaj z drugiego założenia i zamiast pasma bierzemy do dalszych rozważań półpłaszczyznę sprężystą. W równaniach (1.3) $p(x_1)$ jest funkcją wzajemnego oddziaływania belki i tarczy, δ jest grubością tarczy.

Jeżeli teraz funkcję $p(x_1)$ wyznaczymy



Rys. 2



Rys. 3

z warunku ciągłego kontaktu tarczy i belki,

$$(1.4) \quad u_2(x_1, 0) = V(x_1), \quad |x_1| < a,$$

to spełnimy tym samym w sposób ścisły warunki brzegowe (1.1) na dolnej krawędzi pasma. Warunki brzegowe na górnej krawędzi ($x_2 = H$) będą spełnione z błędem wynikającym z drugiego założenia.

Linie ugięcia belki wyznaczymy dla schematu przedstawionego na rys. 3b przy obciążeniu $p(x_1) + g$, gdzie g oznacza ciężar własny belki, przypadający na jednostkę długości.

2. Stan zerowy

Dla pasma tarczowego opartego na nieodkształcalnym podłożu i obciążonego ciężarem własnym (rys. 2) mamy

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} &= -\nu\gamma(H - x_2), \\ \sigma_{22}^{(0)} &= -\gamma(H - x_2), & \sigma_{12}^{(0)} &= 0, \\ u_1^{(0)} &= 0, \end{aligned}$$

$$u_2^{(0)} = -\frac{1-\nu^2}{E} \gamma x_2 \left(H - \frac{x_2}{2} \right).$$

We wzorach tych γ jest ciężarem objętościowym materiału tarczy, E i ν są odpowiednio współczynnikiem sprężystości podłużnej i współczynnikiem Poissona.

Wzory (2.1) odnoszą się do płaskiego stanu naprężenia. Dla płaskiego stanu odkształcenia zamiast ν należy podstawić $\nu/1 - \nu$.

3. Stan pierwszy

Funkcję obciążenia $p(x_1)$ przyjmujemy w postaci kosinusowego szeregu Fouriera

$$(3.1) \quad p(x_1) = \frac{p_0}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi x_1}{a},$$

gdzie

$$(3.2) \quad p_n = \int_0^a p(x_1) \cos \frac{n\pi x_1}{a} dx_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

możemy traktować jako skończoną kosinusową transformatę Fouriera.

Rozwiązujemy dla półnieograniczonej tarczy zadanie z warunkami na brzegu $x_2 = 0$ określonymi przez równania (1.3). Równanie (1.3)₃ przyjmie teraz postać

$$(3.3) \quad \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) = \gamma H - \frac{p_0}{a\delta} - \frac{2}{a\delta} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos \frac{n\pi x_1}{a}, \quad \text{jeśli } |x_1| < a.$$

Do budowy rozwiązania posłużymy się funkcjami NEUBERA i PĄPKOWICZA [4]:

$$(3.4) \quad 2Gu_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{4}{1+\nu} \Phi_i, \\ F = \Phi_0 + x_1 \Phi_1 + x_2 \Phi_2, \quad i = 1, 2, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Wzory (3.4) odnoszą się również do płaskiego stanu naprężenia. We wzorach tych funkcje $\Phi_i(x_1, x_2)$ są funkcjami harmonicznymi. Dla danego zadania można przyjąć $\Phi_1 \equiv 0$, a pozostałe funkcje można przedstawić w postaci całek Fouriera:

$$(3.5) \quad \Phi_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(a) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 \frac{da}{a^2}, \\ \Phi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(a) e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 \frac{da}{a}.$$

Wykorzystując pierwszy z warunków brzegowych (1.3) otrzymuje się

$$(3.6) \quad A(a) = 0.$$

Po wprowadzeniu argumentów bezwymiarowych

$$(3.7) \quad \xi_i = \frac{x_i}{a}, \quad i = 1, 2, \quad \lambda = \alpha a$$

i po uwzględnieniu (3.6) otrzymujemy następujące wzory dla składowych stanu naprężenia i przemieszczenia tarczy:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{2\nu}{1+\nu} - \lambda \xi_2 \right) B(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda, \\ \sigma_{22}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{2}{1+\nu} + \lambda \xi_2 \right) B(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda, \\ \sigma_{12}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \lambda \xi_2 \right) B(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 d\lambda, \\ 2Gu_1^{(1)}(\xi_1, \xi_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi_2 \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 d\lambda, \\ 2Gu_2^{(1)}(\xi_1, \xi_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{3-\nu}{1+\nu} + \lambda \xi_2 \right) B(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

Drugi i trzeci z warunków brzegowych (1.3) prowadzi do dualnych równań całkowych z niewiadomą funkcją $B(\lambda)$ parametru λ :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty B(\lambda) \cos \lambda \xi_1 d\lambda &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\nu}{2} \left(\gamma Ha - \frac{p_0}{\delta} \right) + \\ &+ \frac{1+\nu}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^\infty p_n \cos n\pi \xi_1, \quad 0 < \xi_1 < 1, \\ \int_0^\infty B(\lambda) \lambda^{-1} \cos \lambda \xi_1 d\lambda &= 0, \quad 1 < \xi_1 < \infty. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że

$$\cos \lambda \xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \lambda \xi_1 J_{-1/2}(\lambda \xi_1),$$

gdzie $J_\nu(x)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu ν , i po wprowadzeniu nowej funkcji parametru λ

$$(3.10) \quad F(\lambda) = \lambda^{-1/2} B(\lambda)$$

dualne równania całkowe przyjmą postać:

$$(3.11) \quad \int_0^{\infty} F(\lambda) J_{-1/2}(\lambda \xi_1) \lambda d\lambda = g(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < 1,$$

$$\int_0^{\infty} F(\lambda) J_{-1/2}(\lambda \xi_1) d\lambda = 0, \quad 1 < \xi_1 < \infty,$$

gdzie

$$(3.12) \quad g(\xi_1) = -\frac{1+\nu}{2\sqrt{\xi_1}} \left(\gamma Ha - \frac{p_0}{\delta} \right) + \frac{1+\nu}{\delta \sqrt{\xi_1}} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\pi \xi_1.$$

Rozwiązanie równań (3.11) jest znane [5] i ma postać

$$(3.13) \quad F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_0^1 \eta^{3/2} J_0(\eta\lambda) d\eta \int_0^1 \frac{\sqrt{\zeta} g(\eta\zeta) d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Obliczymy najpierw całkę

$$(3.14) \quad I(\eta) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\zeta} g(\eta\zeta) d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} =$$

$$= -\frac{1+\nu}{2\sqrt{\eta}} \left(\gamma Ha - \frac{p_0}{\delta} \right) \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{1+\nu}{\delta \sqrt{\eta}} \int_0^1 d\zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n \cos(n\pi\eta\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Szereg pod znakiem całki odpowiada szeregowi Fouriera funkcji $p(\xi_1)$ bezwzględnie całkownej w przedziale $[0, 1]$, możemy więc całkować go wyraz po wyrazie. Uwzględniając, że

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{2}$$

oraz [6]

$$\int_0^1 \frac{\cos(n\pi\eta\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta = \frac{\pi}{2} J_0(n\pi\eta),$$

otrzymujemy wartość całki (3.14):

$$(3.15) \quad I(\eta) = \frac{\pi(1+\nu)}{4\delta \sqrt{\eta}} \left[(p_0 - Q) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n J_0(n\pi\eta) \right].$$

Wprowadzono oznaczenie

$$(3.16) \quad Q = \gamma Ha \delta.$$

Wynik (3.15) podstawiamy do (3.13) i wykonujemy następne całkowanie wyraz po wyrazie zakładając, że szereg we wzorze (3.15) jest jednostajnie zbieżny. Mamy więc

$$F(\lambda) = \frac{1+\nu}{\delta} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \lambda \left[\frac{1}{2} (p_0 - Q) \int_0^1 J_0(\eta\lambda) \eta d\eta + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^1 J_0(\eta\lambda) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \right].$$

Uwzględniając, że ([7], t. II, s. 333)

$$\int_0^1 J_0(\eta\lambda) \eta d\eta = \lambda^{-1} J_1(\lambda)$$

oraz (3.10), mamy

$$(3.17) \quad B(\lambda) = \frac{1+\nu}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} (p_0 - Q) J_1(\lambda) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^1 J_0(\eta\lambda) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \right].$$

Przemieszczenia dolnej krawędzi pasma tarczowego można więc wyrazić wzorem

$$(3.18) \quad 2Gu_2(\xi_1, 0) = 2G [u_2^{(0)}(\xi_1, 0) + u_2^{(1)}(\xi_1, 0)] = \\ = \frac{3-\nu}{1+\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda^{-1} B(\lambda) \cos \lambda \xi_1 d\lambda = \frac{3-\nu}{2\delta} (p_0 - Q) \int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_1(\lambda) \cos \lambda \xi_1 d\lambda + \\ + \frac{3-\nu}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^{\infty} \cos \lambda \xi_1 d\lambda \int_0^1 J_0(\eta\lambda) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta.$$

Wyznamy poszczególne całki wchodzące w skład wzoru (3.18). Mamy więc przede wszystkim ([7], t. I, s. 44)

$$\int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_1(\lambda) \cos \lambda \xi_1 d\lambda = \begin{cases} \sqrt{1-\xi_1^2}, & 0 < \xi_1 < 1, \\ 0, & 1 < \xi_1 < \infty. \end{cases}$$

Uwzględniając dalej, że ([7], t. I, s. 43)

$$\int_0^{\infty} J_0(\eta\lambda) \cos \lambda \xi_1 d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - \xi_1^2}}, & 0 < \xi_1 < \eta, \\ 0, & \eta < \xi_1 < \infty, \end{cases}$$

(całka ta jest jednostajnie zbieżna z wyjątkiem punktu $\xi_1 = \eta$) otrzymamy

$$\int_0^{\infty} \cos \lambda \xi_1 d\lambda \int_0^1 J_0(\eta\lambda) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta = \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^{\infty} J_0(\eta\lambda) \cos \lambda \xi_1 d\lambda = \\ = \begin{cases} \int_{\xi_1}^1 \frac{J_0(n\pi\eta) \eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \xi_1^2}}, & 0 \leq \xi_1 \leq 1; \\ 0, & 1 \leq \xi_1 < \infty. \end{cases}$$

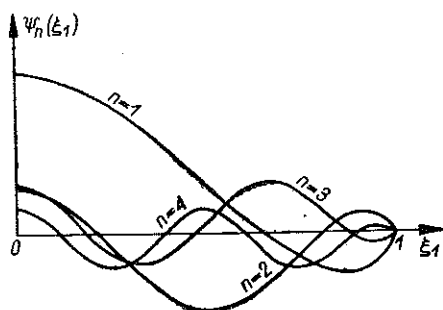
Wprowadzimy funkcję zmiennej ξ_1 określoną w przedziale $[0,1]$ wzorem

$$(3.19) \quad \Psi_n(\xi_1) = \int_{\xi_1}^1 \frac{J_0(n\pi\eta)\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \xi_1^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

i napiszemy ostatecznie

$$(3.20) \quad u_2(\xi_1, 0) = \begin{cases} \frac{3-\nu}{4G\delta} \left[(p_0 - Q)\sqrt{1-\xi_1^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Psi_n(\xi_1) \right], \\ \text{jeśli } 0 \leq \xi_1 \leq 1, \\ 0, \quad \text{jeśli } 1 \leq \xi_1 < \infty. \end{cases}$$

Funkcje $\Psi_n(\xi_1)$ zostały obliczone dla pierwszych pięciu wskaźników ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) i dla $\xi_1 = 0; 0, 1; 0, 2; \dots; 1$. Wykresy tych funkcji dane są na rys. 4.



Rys. 4

Obliczenia wykonano metodą całkowania numerycznego stosując wzór Simpsona. W celu dostosowania wzoru (3.19) do obliczeń numerycznych przekształcono go do postaci

$$(3.21) \quad \Psi_n(\xi_1) = \int_0^u J_0(n\pi\sqrt{z^2 - u^2 + 1}) dz,$$

$$u = \sqrt{1 - \xi_1^2}$$

przez podstawienie $z^2 = \eta^2 - \xi_1^2$. W ten sposób została zlikwidowana osobliwość występująca w całce (3.19) w punkcie $\eta = \xi_1$.

Zauważmy, że ze wzoru (3.19) lub (3.21) wynika, iż $\Psi_n(1) = 0$. Widoczne jest również, że funkcje $\Psi_n(\xi_1)$ są ograniczone w całym przedziale $[0, 1]$. Ponadto wartość funkcji $\Psi_n(\xi_1)$ można wyrazić zamkniętym wzorem w przypadku $\xi_1 = 0$. Istotnie, mamy ([7], t. II, s. 333)

$$(3.22) \quad \Psi_n(0) = \int_0^1 J_0(n\pi\eta) d\eta = J_0(n\pi) + \frac{\pi}{2} [J_1(n\pi) \mathbf{H}_0(n\pi) - J_0(n\pi) \mathbf{H}_1(n\pi)].$$

Tutaj $\mathbf{H}_0(z)$ i $\mathbf{H}_1(z)$ są funkcjami Struvego. Wzór (3.22) pozwala obliczyć $\Psi_n(0)$ z dużą dokładnością i dla dowolnego wskaźnika n , co ma znaczenie dla wyznaczenia maksymalnego przemieszczenia pionowego tarczy. Dla dużych wartości wskaźnika n ($n = 5, 6, \dots$) można posłużyć się wzorami asymptotycznymi

$$(3.23) \quad \begin{aligned} J_0(n\pi) &\approx (-1)^n \frac{1}{\pi\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{8\pi n} \right), \\ J_1(n\pi) &\approx -(-1)^n \frac{1}{\pi\sqrt{n}} \left(1 - \frac{3}{8\pi n} \right), \end{aligned}$$

$$H_0(n\pi) \approx \frac{2}{\pi^2 n} - (-1)^n \frac{1}{\pi \sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{8\pi n}\right),$$

$$H_1(n\pi) \approx \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi^2 n^2}\right) - (-1)^n \frac{1}{\pi \sqrt{n}} \left(1 + \frac{3}{8\pi n}\right),$$

z których wynika, że

$$\Psi_n(0) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{dla } n \rightarrow \infty.$$

Wartość funkcji $\Psi_n(\xi_1)$ zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1. Wartości funkcji $\Psi_n(\xi_1)$

ξ_1	n				
	1	2	3	4	5
0	0,4284	0,1208	0,1265	0,0663	0,0730
0,1	0,4144	0,0896	0,0829	0,0131	0,0052
0,2	0,3707	0,0095	-0,0118	-0,0765	-0,0574
0,3	0,3031	-0,0899	-0,0791	-0,0724	0,0078
0,4	0,2186	-0,1723	-0,0553	0,0071	0,0659
0,5	0,1264	-0,2040	0,0243	0,0636	0,0116
0,6	0,0367	-0,1772	0,1150	0,0076	-0,0515
0,7	-0,0392	-0,1036	0,1307	-0,0839	0,0138
0,8	-0,0904	-0,0142	0,0678	-0,0872	0,0800
0,9	-0,1026	0,0478	-0,0160	-0,0063	0,0221
1	0	0	0	0	0

Otrzymany wynik (3.20) dla przemieszczeń pionowych brzegu dolnego tarczy rozwinemy w przedziale $[0, 1]$ w szereg Fouriera według kosinusów:

$$(3.24) \quad u_2(\xi_1, 0) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos k\pi\xi_1,$$

przy czym

$$(3.25) \quad v_k = \int_0^1 u_2(\xi_1, 0) \cos k\pi\xi_1 d\xi_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Mamy więc

$$v_k = \frac{3-\nu}{4G\delta} \left[(p_0 - Q) \int_0^1 \sqrt{1-\xi_1^2} \cos k\pi\xi_1 d\xi_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^1 \Psi_n(\xi_1) \cos k\pi\xi_1 d\xi_1 \right].$$

Wprowadzimy współczynniki

$$(3.26) \quad C_{kn} = \int_0^1 \Psi_n(\xi_1) \cos k\pi\xi_1 d\xi_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

i uwzględnimy, że ([6] s. 192)

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \xi_1^2} \cos k\pi \xi_1 d\xi_1 = \frac{1}{2k} J_1(k\pi).$$

Wówczas

$$(3.27) \quad v_k = \frac{3 - \nu}{8G\delta} \left[(p_0 - Q) \frac{1}{k} J_1(k\pi) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} p_n C_{kn} \right]$$

oraz

$$(3.28) \quad v_0 = \frac{3 - \nu}{8G\delta} \left[(p_0 - Q) \frac{\pi}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} p_n C_{0n} \right],$$

ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$. Rozwinięcie funkcji $u_2(\xi_1, 0)$ w szereg Fouriera przyjmie ostatecznie postać

$$(3.29) \quad u_2(\xi_1, 0) = \frac{3 - \nu}{8G\delta} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} (p_0 - Q) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} p_n C_{0n} \right] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(p_0 - Q) \frac{1}{k} J_1(k\pi) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} p_n C_{kn} \right] \cos k\pi \xi_1 \right\}, \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1.$$

4. Ugięcie belki

Przejdźmy teraz do wyznaczenia ugięcia belki obustronnie utwierdzonej (rys. 3b). Oznaczmy całkowite obciążenie przypadające na jednostkę długości belki przez $p^*(x_1) = p(x_1) + g$, a funkcję przemieszczeń pionowych osi belki przez $V(x_1)$. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki ma postać

$$(4.1) \quad \frac{d^4 V(x_1)}{dx_1^4} = - \frac{p^*(x_1)}{E_0 I}.$$

Na równaniu (4.1) wykonujemy skończoną transformację kosinusową Fouriera:

$$(4.2) \quad (-1)^k V''''(a) - V''''(0) - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 \left[(-1)^k V'(a) - V'(0) - \right. \\ \left. - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 V_k \right] = - \frac{p_k^*}{E_0 I},$$

$$p_0^* = p_0 + ga, \quad p_k^* = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Z powodu utwierdzenia podpór oraz z uwagi na symetrię występującą w zadaniu $V'(0) = V'(a) = 0$. Zwróćmy uwagę, że

$$V''''(x_1) = \frac{T(x_1)}{E_0 I};$$

$T(x_1)$ oznacza siłę poprzeczną w przekroju belki o odciętej x_1 , oraz że $T(0) = 0$ i $T(a) = -R$, gdzie R jest oddziaływaniem podpory i

$$R = \int_0^a p^*(x_1) dx_1 = p_0^*.$$

Wynika stąd, że

$$V''''(0) = 0, \quad V''''(a) = -\frac{p_0^*}{E_0 I}.$$

Wobec tego przetransformowane równanie linii ugięcia belki (4.2) przyjmie postać

$$(4.2') \quad -(-1)^k \frac{p_0 + ga}{E_0 I} + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^4 V_k = -\frac{p_k^*}{E_0 I}$$

i stąd wyznaczmy transformatę funkcji ugięcia:

$$(4.3) \quad V_k = \left(\frac{a}{k\pi}\right)^4 \frac{(-1)^k (p_0 + ga) - p_k}{E_0 I}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Wykonując transformację odwrotną otrzymamy

$$(4.4) \quad V(x_1) = \frac{V_0}{a} + \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos \frac{k\pi x_1}{a}.$$

We wzorze (4.4) nadal nieznanne jest V_0 [ze wzoru (4.3) otrzymuje się symbol nieoznaczony $0/0$]. Jest to zrozumiałe, jeśli zważymy, że dotychczas nie ustaliliśmy żadnego punktu na belce. Wartość V_0 obliczymy z warunku zerowego ugięcia belki na podporze utwierdzonej:

$$V(a) = \frac{V_0}{a} + \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k V_k = 0.$$

Stąd otrzymamy

$$(4.5) \quad V_0 = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k V_k.$$

Wynik (4.5) podstawiamy do (4.4), wprowadzamy zmienną bezwymiarową ξ_1 , uwzględniamy (4.3) i w sumie wyrażającej V_0 zamieniamy wskaźnik k na n . W rezultacie otrzymujemy wynik następujący:

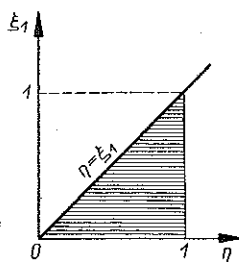
$$(4.6) \quad V(\xi_1) = \frac{2a^3}{\pi^4 E_0 I} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} [(-1)^n p_n - (p_0 + ga)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} [(-1)^k (p_0 + ga) - p_k] \cos k\pi \xi_1 \right\}.$$

Współczynniki p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), wyrażające się wzorem (3.2), są na razie nieznanne, nieznaną jest bowiem w dalszym ciągu funkcja $p(x_1)$. Wyznaczeniem

współczynników p_k i tym samym szeregu Fouriera funkcji $p(x_1)$ zajmiemy się w następnym punkcie.

5. Wyznaczenie współczynników p_k

Zanim przejdziemy do napisania równań określających niewiadome współczynniki p_k zatrzymamy się przy zdefiniowanych już wzorem (3.26) współczynnikach C_{kn} , które w dalszych obliczeniach będą odgrywały istotną rolę.



Rys. 5

Uwzględniając (3.19) w (3.26), otrzymujemy

$$C_{kn} = \int_0^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 \frac{\cos k\pi\xi_1 J_0(n\pi\eta) \eta}{\sqrt{\eta^2 - \xi_1^2}} d\eta.$$

Całka podwójna jest rozciągnięta na obszar trójkąta przedstawionego na rys. 5. Dokonując zmiany kolejności całkowania dostajemy

$$(5.1) \quad C_{kn} = \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\eta \frac{\cos k\pi\xi_1}{\sqrt{\eta^2 - \xi_1^2}} d\xi_1.$$

Po obliczeniu całki wewnętrznej we wzorze (5.1) otrzymuje się

$$(5.2) \quad C_{kn} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 J_0(n\pi\eta) J_0(k\pi\eta) \eta d\eta.$$

Całka we wzorze (5.2) jest znana i ostateczny wynik otrzymuje się w postaci następującej:

$$(5.3) \quad C_{kn} = \frac{1}{2(n^2 - k^2)} [nJ_0(k\pi)J_1(n\pi) - kJ_0(n\pi)J_1(k\pi)], \quad n \neq k,$$

$$C_{kk} = \frac{\pi}{4} [J_0^2(k\pi) + J_1^2(k\pi)], \quad n = k.$$

Dla $k = 0$ mamy prosty wzór

$$(5.3') \quad C_{0n} = \frac{1}{2n} J_1(n\pi).$$

Zauważmy, że $C_{kn} = C_{nk}$. Zwróćmy również uwagę na to, że we wzorze (3.29) zamiast $J_1(k\pi)/2k$ możemy napisać C_{k0} . Ze spostrzeżenia tego skorzystamy w dalszym ciągu rozważań w celu ujednoczenia zapisu równań, które obecnie ułożymy.

Dla wyznaczenia transformaty p_k funkcji $p(x_1)$ wykorzystamy warunek zgodności przemieszczeń pionowych brzegu dolnego tarczy i ugięć belki:

$$(5.4) \quad u_2(\xi_1, 0) = V(\xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1.$$

Przyrównując do siebie współczynniki rozwinięć w szeregi Fouriera obu funkcji [wzory (3.29) i (4.6)] otrzymujemy w rezultacie nieskończony układ algebraicznych równań liniowych z niewiadomymi p_k :

$$(5.5) \quad \frac{\pi}{2} \left(\varkappa + \frac{\pi^3}{45} \right) p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[4\varkappa C_{0n} - \frac{(-1)^n}{n^4} \right] p_n = \frac{\pi}{2} \left(\varkappa Q - \frac{\pi^3}{45} ga \right),$$

$$\left[4\varkappa C_{k0} - \frac{(-1)^k}{k^4} \right] p_0 + 8\varkappa \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} C_{kn} p_n + \left(8\varkappa C_{kk} + \frac{1}{k^4} \right) p_k = 4\varkappa C_{k0} Q +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{k^4} ga, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Otrzymany układ równań okazuje się symetryczny względem głównej przekątnej. Wartości liczbowe współczynników C_{kn} dla $k, n = 0, 1, 2, \dots, 10$ zostały obliczone i są zestawione w tablicy 2. Wprowadzono oznaczenie

$$(5.6) \quad \varkappa = \frac{\pi^4 E_0 I (3 - \nu)}{16 G a^3 \delta}.$$

Współczynnik \varkappa charakteryzuje stosunek sztywności belki i tarczy.

Ograniczając się do skończonej liczby równań możemy rozwiązać z dowolną dokładnością postawione zadanie.

6. Stan naprężenia w tarczy

Przechodząc do stanu naprężenia w tarczy bierzemy pod uwagę wzory (1.2). Podstawiamy do nich wartości $\sigma_{ij}^{(0)}$ z (2.1) oraz $\sigma_{ij}^{(1)}$ z (3.8). We wzorach (3.8) uwzględniamy wyliczoną wartość funkcji $B(\lambda)$ (3.17) i zmieniając porządek całkowania i sumowania otrzymujemy

$$(6.1) \quad \sigma_{11}(\xi_1, \xi_2) = -\nu \gamma a \left(\frac{H}{a} - \xi_2 \right) - \frac{p_0 - Q}{2a\delta} \left[2\nu \int_0^{\infty} J_1(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda - \right.$$

$$\left. - (1+\nu) \xi_2 \int_0^{\infty} \lambda J_1(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda \right] -$$

$$- \frac{1}{a\delta} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[2\nu \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^{\infty} \lambda J_0(\eta\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda - \right.$$

$$\left. - (1+\nu) \xi_2 \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^{\infty} \lambda^2 J_0(\eta\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda \right],$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22}(\xi_1, \xi_2) = & -\gamma a \left(\frac{H}{a} - \xi_2 \right) - \frac{p_0 - Q}{2a\delta} \left[2 \int_0^\infty J_1(\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \cos \lambda\xi_1 d\lambda + \right. \\
 & \left. + (1+\nu) \xi_2 \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \cos \lambda\xi_1 d\lambda \right] - \\
 & - \frac{1}{a\delta} \sum_{n=1}^\infty p_n \left[2 \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda J_0(\eta\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \cos \lambda\xi_1 d\lambda + \right. \\
 & \left. + (1+\nu) \xi_2 \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda^2 J_0(\eta\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \cos \lambda\xi_1 d\lambda \right],
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12}(\xi_1, \xi_2) = & -\frac{p_0 - Q}{2a\delta} \left[(1-\nu) \int_0^\infty J_1(\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \sin \lambda\xi_1 d\lambda + \right. \\
 & \left. + (1+\nu) \xi_2 \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \sin \lambda\xi_1 d\lambda \right] - \\
 & - \frac{1}{a\delta} \sum_{n=1}^\infty p_n \left[(1-\nu) \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda J_0(\eta\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \sin \lambda\xi_1 d\lambda + \right. \\
 & \left. + (1+\nu) \xi_2 \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda^2 J_0(\eta\lambda) e^{-\lambda\xi_2} \sin \lambda\xi_1 d\lambda \right].
 \end{aligned}$$

Obliczmy poszczególne całki wchodzące w skład wzorów (6.1); w tym celu zajmiemy się najpierw całką ([7], t. II, s. 9)

$$\int_0^\infty \lambda^\mu e^{-\lambda z} J_0(\eta\lambda) d\lambda = \frac{\mu!}{\sqrt{(z^2 + \eta^2)^{\mu+1}}} P_\mu \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + \eta^2}} \right).
 \tag{6.2}$$

Dla naszych potrzeb wystarczy rozpatrzyć przypadek $\mu = 1$ i przypadek $\mu = 2$. We wzorze (6.2) $P_\mu(x)$ są wielomianami Legendre'a. Uwzględniając, że $P_1(x) = x$ i $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda z} J_0(\eta\lambda) d\lambda &= z(z^2 + \eta^2)^{-3/2}, \\
 \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda z} J_0(\eta\lambda) d\lambda &= 3z^2(z^2 + \eta^2)^{-5/2} - (z^2 + \eta^2)^{-3/2}.
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Do całki (6.3)₁ podstawmy $z = \xi_2 + i\xi_1$. Oznaczając

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 > 0,
 \tag{6.4}$$

Tablica 2. Wartości współczynników C_{kn}

$\begin{matrix} n \\ K \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	---	0,1423	-0,0531	0,0294	-0,0193	0,0139	-0,0106	0,0084	-0,0069	0,0058	-0,0050
1	0,1423	0,1363	0,0111	-0,0068	0,0048	-0,0036	0,0028	-0,0023	0,0019	-0,0016	0,0014
2	-0,0531	0,0111	0,0735	0,0040	-0,0029	0,0022	-0,0018	0,0015	-0,0012	0,0010	-0,0009
3	0,0294	-0,0068	0,0040	0,0503	0,0020	-0,0016	0,0013	-0,0011	0,0009	-0,0008	0,0007
4	-0,0193	0,0048	-0,0029	0,0020	0,0382	0,0012	-0,0010	0,0008	-0,0007	0,0006	-0,0006
5	0,0139	-0,0036	0,0022	-0,0016	0,0012	0,0308	0,0008	-0,0007	0,0006	-0,0005	0,0005
6	-0,0106	0,0028	0,0022	0,0013	-0,0010	0,0008	0,0258	0,0006	-0,0005	0,0004	-0,0004
7	0,0084	-0,0023	0,0015	-0,0011	0,0008	-0,0007	0,0006	0,0222	0,0004	-0,0004	0,0004
8	-0,0069	0,0019	-0,0012	0,0009	-0,0007	0,0006	-0,0005	0,0004	0,0195	0,0003	-0,0003
9	0,0058	-0,0016	0,0010	-0,0008	0,0006	-0,0005	0,0004	-0,0004	0,0003	0,0173	0,0003
10	-0,0050	0,0014	0,0009	0,0007	-0,0006	0,0005	-0,0004	0,0004	-0,0003	0,0003	0,0156

$$(6.4) \quad r_1 = \sqrt{(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2},$$

$$\text{[c.d.]} \quad \theta_1 = \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2} + \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 > 0, \\ \pi, & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 < 0, \end{cases}$$

napiszemy

$$(6.5) \quad \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2 - i\lambda \xi_1} J_0(\eta \lambda) d\lambda = r r_1^{-3/2} e^{i(\theta - \frac{3}{2}\theta_1)}.$$

Przyrównując po obu stronach równania (6.5) części rzeczywiste i urojone dostajemy

$$(6.6) \quad \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda = r r_1^{-3/2} \cos\left(\theta - \frac{3}{2}\theta_1\right),$$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda = -r r_1^{-3/2} \sin\left(\theta - \frac{3}{2}\theta_1\right)$$

i dalej uwzględniając (6.4)

$$(6.7) \quad \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda =$$

$$= \begin{cases} \xi_1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) + \xi_2 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 > 0; \\ \xi_2 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) - \xi_1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 < 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda =$$

$$= \begin{cases} \xi_2 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) - \xi_1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 > 0; \\ -\xi_1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) - \xi_2 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 < 0. \end{cases}$$

Dla dogodności zapisu wprowadzono następujące oznaczenia dla funkcji elementarnych:

$$(6.8) \quad \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2} \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2}\right)}{\sqrt[4]{[(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2]^3}},$$

$$\bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) = \frac{\cos\left(\frac{3}{2} \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2}\right)}{\sqrt[4]{[(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2]^3}}.$$

Podstawmy teraz $z = \xi_2 + i\xi_1$ do całki (6.3)₂. Otrzymamy wówczas

$$(6.9) \quad \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda \xi_2 - i\lambda \xi_1} J_0(\eta \lambda) d\lambda = 3r^2 r_1^{-5/2} e^{i(2\theta - \frac{5}{2}\theta_1)} - r_1^{-3/2} e^{-i\frac{3}{2}\theta_1}.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone wyrażeń po obu stronach równania (6.9) dostajemy

$$(6.10) \quad \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda = 3r^2 r_1^{-5/2} \cos \left(2\theta - \frac{5}{2} \theta_1 \right) - r_1^{-3/2} \cos \frac{3}{2} \theta_1,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda = -3r^2 r_1^{-5/2} \sin \left(2\theta - \frac{5}{2} \theta_1 \right) - r_1^{-3/2} \sin \frac{3}{2} \theta_1.$$

Po przekształceniach wyniki można napisać w postaci

$$(6.11) \quad \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda = \begin{cases} 6\xi_1 \xi_2 \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) + 3(\xi_2^2 - \xi_1^2) \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) - \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 > 0; \\ -3(\xi_2^2 - \xi_1^2) \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) + 6\xi_1 \xi_2 \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) - \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 < 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda = \begin{cases} 3(\xi_2^2 - \xi_1^2) \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) - 6\xi_1 \xi_2 \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) - \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 > 0; \\ 6\xi_1 \xi_2 \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) + 3(\xi_2^2 - \xi_1^2) \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) + \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2 < 0. \end{cases}$$

We wzorach (6.11)

$$(6.12) \quad \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) = \frac{\sin \left(\frac{5}{2} \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt[4]{[(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2]^5}},$$

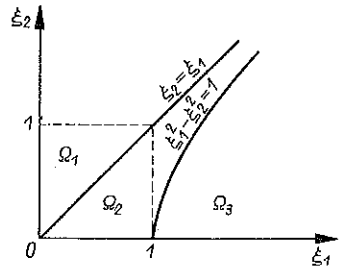
$$\bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) = \frac{\cos \left(\frac{5}{2} \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt[4]{[(\xi_2^2 - \xi_1^2 + \eta^2)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2]^5}}.$$

Teraz możemy rozpatrzyć całkę

$$(6.13) \quad \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda$$

i dalsze podobne. Obszar rozpatrywanej połowy tarczy dzielimy na trzy podobszary Ω_i ($i = 1, 2, 3$) tak, jak to przedstawia rys. 6. Łatwo ustalić, że mamy wówczas

$$(6.14) \quad \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 J_0(\eta \lambda) d\lambda =$$



Rys. 6

$$(6.14) \quad \left[\begin{array}{l} \text{c.d.} \\ \text{e.d.} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \int_0^1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \xi_2 \int_0^1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \\ \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1; \\ \xi_2 \int_0^{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta - \xi_1 \int_0^{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \\ + \xi_1 \int_{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}}^1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \xi_2 \int_{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}}^1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \\ \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_2; \\ \xi_2 \int_0^1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta - \xi_1 \int_0^1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \\ \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3. \end{array} \right.$$

Wprowadzimy nowe funkcje określone następująco:

$$(6.15) \quad \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1, \\ - \int_0^{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \\ + \int_{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}}^1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_2, \\ - \int_0^1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3; \end{array} \right.$$

$$\bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1, \\ \int_0^{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \\ + \int_{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}}^1 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_2, \\ \int_0^1 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3. \end{array} \right.$$

Uwzględniając (6.15) w (6.14) napiszemy krótko:

$$(6.16) \quad \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\xi_2} \cos \lambda\xi_1 J_0(\eta\lambda) d\lambda = \xi_1 \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \xi_2 \bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2).$$

W podobny sposób przedstawimy pozostałe całki:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\xi_2} \sin \lambda\xi_1 J_0(\eta\lambda) d\lambda = \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\xi_1 \bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \xi_2 \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2), \\
 (6.17) \quad & \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda\xi_2} \cos \lambda\xi_1 J_0(\eta\lambda) d\lambda = \\
 & \qquad \qquad \qquad = 6\xi_1 \xi_2 \Psi_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) + 3(\xi_2^2 - \xi_1^2) \bar{\Psi}_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) - \bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2), \\
 & \int_0^1 J_0(n\pi\eta) \eta d\eta \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda\xi_2} \sin \lambda\xi_1 J_0(\eta\lambda) d\lambda = \\
 & \qquad \qquad \qquad = 3(\xi_2^2 - \xi_1^2) \Psi_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) - 6\xi_1 \xi_2 \bar{\Psi}_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) - \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2).
 \end{aligned}$$

Funkcje $\Psi_n^{(2)}$ i $\bar{\Psi}_n^{(2)}$ we wzorach (6.17) są określone następująco:

$$(6.18) \quad \Psi_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \int_0^1 \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1, \\ \int_0^{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \\ + \int_{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}}^1 \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_2, \\ \int_0^1 \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3; \end{cases}$$

$$\bar{\Psi}_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \int_0^1 \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1, \\ - \int_0^{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}} \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta + \\ + \int_{\sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2}}^1 \bar{\varphi}_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_2, \\ - \int_0^1 \varphi_2(\xi_1, \xi_2; \eta) J_0(n\pi\eta) \eta d\eta, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3. \end{cases}$$

Zajmijmy się jeszcze obliczeniem pozostałych całek wchodzących w skład wzorów (6.1). Biorąc za punkt wyjścia znaną całkę

$$\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda = (z^2 + 1)^{-3/2}$$

i postępując w podobny sposób jak uprzednio, otrzymamy

$$(6.19) \quad \int_0^{\infty} \lambda J_1(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda = \begin{cases} \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; 1), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 > 0, \\ \varphi_1(\xi_1, \xi_2; 1), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 < 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda J_1(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 d\lambda = \begin{cases} \varphi_1(\xi_1, \xi_2; 1), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 > 0, \\ -\bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; 1), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 < 0. \end{cases}$$

Uwzględniając, że

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda = 1 - z(z^2 + 1)^{-1/2},$$

obliczymy łatwo dwie ostatnie całki

$$(6.20) \quad \int_0^{\infty} J_1(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \cos \lambda \xi_1 d\lambda = \begin{cases} 1 - \xi_1 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_2 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 > 0, \\ 1 + \xi_2 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_1 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 < 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda) e^{-\lambda \xi_2} \sin \lambda \xi_1 d\lambda = \begin{cases} -\xi_2 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) + \xi_1 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 > 0, \\ -\xi_1 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_2 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2), & \text{jeśli } \xi_2^2 - \xi_1^2 + 1 < 0. \end{cases}$$

We wzorach (6.20) występują następujące funkcje:

$$(6.21) \quad \varphi_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + 1}\right)}{\sqrt[4]{(\xi_2^2 - \xi_1^2 + 1)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2}},$$

$$\bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2\xi_1 \xi_2}{\xi_2^2 - \xi_1^2 + 1}\right)}{\sqrt[4]{(\xi_2^2 - \xi_1^2 + 1)^2 + 4\xi_1^2 \xi_2^2}}.$$

Uwzględniamy wyniki (6.16) i (6.17) oraz (6.19) i (6.20) we wzorach na naprężenia (6.1) i piszemy ostatecznie

$$(6.22) \quad \sigma_{11}(\xi_1, \xi_2) = -\nu \gamma a \left(\frac{H}{a} - \xi_2 \right) - \frac{1}{a \delta} \sum_{n=1}^{\infty} p_n [2\nu \xi_1 \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) +$$

$$+ (1+3\nu) \xi_2 \bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) - 6(1+\nu) \xi_1 \xi_2^2 \Psi_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) -$$

$$- 3(1+\nu) \xi_2 (\xi_2^2 - \xi_1^2) \bar{\Psi}_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2)] - \frac{p_0 - Q}{2a\delta} \times$$

$$\begin{aligned}
 (6.22) \quad & \left. \begin{aligned} & \{2\nu [1 - \xi_1 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_2 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2)] - (1+\nu) \xi_2 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; 1)\}, \\ & \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1 + \Omega_2; \end{aligned} \right\} \\
 & \times \left. \begin{aligned} & \{2\nu [1 + \xi_2 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_1 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2)] - (1+\nu) \xi_2 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; 1)\}, \\ & \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3; \end{aligned} \right\} \\
 \sigma_{22}(\xi_1, \xi_2) = & -\gamma a \left(\frac{H}{a} - \xi_2 \right) - \frac{1}{a\delta} \sum_{n=1}^{\infty} p_n [2\xi_1 \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \\ & + (1-\nu) \xi_2 \bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + 6(1+\nu) \xi_1 \xi_2^2 \Psi_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) + \\ & + 3(1+\nu) \xi_2 (\xi_2^2 - \xi_1^2) \bar{\Psi}_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2)] - \frac{p_0 - Q}{2a\delta} \times \\ & \times \left. \begin{aligned} & \{2 [1 - \xi_1 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_2 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2)] + (1+\nu) \xi_2 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; 1)\}; \\ & \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1 + \Omega_2, \end{aligned} \right\} \\ & \times \left. \begin{aligned} & \{2 [1 + \xi_2 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_1 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2)] + (1+\nu) \xi_2 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; 1)\}, \\ & \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3; \end{aligned} \right\} \\
 \sigma_{12}(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{a\delta} \sum_{n=1}^{\infty} p_n [2\nu \xi_2 \Psi_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) + \\ & + (1-\nu) \xi_1 \bar{\Psi}_n^{(1)}(\xi_1, \xi_2) - 3(1+\nu) \xi_2 (\xi_2^2 - \xi_1^2) \Psi_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2) + \\ & + 6(1+\nu) \xi_1 \xi_2^2 \bar{\Psi}_n^{(2)}(\xi_1, \xi_2)] + \frac{p_0 - Q}{2a\delta} \times \\ & \times \left. \begin{aligned} & \{(1-\nu) [\xi_2 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) - \xi_1 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2)] - (1+\nu) \xi_2 \varphi_1(\xi_1, \xi_2; 1)\}, \\ & \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1 + \Omega_2; \end{aligned} \right\} \\ & \times \left. \begin{aligned} & \{(1-\nu) [\xi_1 \varphi_0(\xi_1, \xi_2) + \xi_2 \bar{\varphi}_0(\xi_1, \xi_2)] + (1+\nu) \xi_2 \bar{\varphi}_1(\xi_1, \xi_2; 1)\}, \\ & \text{jeśli } (\xi_1, \xi_2) \in \Omega_3. \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Uzyskane wzory dla naprężeń (6.22) mają postać nader złożoną. Zasadniczą trudność przedstawia wyliczenie wartości funkcji $\Psi_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2)$ i $\bar{\Psi}_n^{(i)}(\xi_1, \xi_2)$ ($i = 1, 2$), których nie udało się wyrazić w formie zamkniętej przez żadne znane funkcje. Jednakże postać całkowa, w jakiej zostały te funkcje przedstawione, nadaje się dobrze do obliczeń numerycznych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych.

7. Oszacowanie błędu

Otrzymane wyniki obarczone są błędem wynikającym z postępowania opartego na założeniu o lokalnym charakterze wpływu sprężystej podatności belki w pasmie tarczowym o dostatecznie dużej wysokości. W celu uproszczenia zadania rozpatrywaliśmy w stanie (1) półpłaszczyznę a nie pasmo, jak jest w rzeczywistości. W rezultacie otrzymane na brzegu $x_2 = H$ naprężenia σ_{22} i σ_{12} będą miały wartości różne

od zera. Błąd spowodowany takim postępowaniem będzie tym mniejszy, im wyższe będzie pasmo, dokładniej — im większy będzie stosunek H/a . Dla małych wartości H/a zbyt duży błąd będzie przekreślał użyteczność metody. Celem dalszych rozważań będzie oszacowanie wielkości błędu wynikającego z niespełnienia warunków brzegowych na brzegu $x_2 = H$.

W tym celu weźmy pod uwagę układ tarczowy przedstawiony na rysunku 3a. Rozpatrujemy tarczę nieograniczoną w dodatnim kierunku osi x_2 (na którą nie działają siły masowe) z następującymi warunkami na brzegu $x_2 = 0$:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} u'_1(x_1, 0) &= 0, & -\infty < x_1 < \infty, \\ \sigma'_{22}(x_1, 0) &= \sigma'_0 = \text{const}, & \text{jeśli } |x_1| < a; \\ u'_2(x_1, 0) &= 0, & \text{jeśli } |x_1| > a. \end{aligned}$$

Składowe stanu naprężenia i przemieszczenia w tym pomocniczym zadaniu oznaczamy przez σ'_{ij} i u'_i w celu odróżnienia od oznaczeń σ_{ij} i u_i przyjętych we wzorze (1.2) i następnym.

Niech będzie

$$(7.2) \quad \sigma'_0 = \max_{0 \leq x_1 \leq a} \left| \gamma H - \frac{1}{\delta} p(x_1) \right|,$$

wówczas stan naprężenia w tarczy będzie określony z nadmiarem w stosunku do stanu naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ spowodowanego obciążeniem brzegu ($x_2 = 0$, $|x_1| < a$) w wielkości $\gamma H - p(x_1)/\delta$. Przy takich warunkach otrzymamy dla $x_2 = H$ pewien rozkład naprężeń $\sigma'_{22}(x_1, H)$ i $\sigma'_{12}(x_1, H)$ większych odpowiednio od $\sigma_{22}(x_1, H)$ i $\sigma_{12}(x_1, H)$. Wartości σ_{22} i σ_{12} dane są wzorami (6.22).

Przejdźmy teraz do zagadnienia pasma, którego brzeg górny jest wolny od naprężeń. Rozwiązanie dla pasma można zrealizować nakładając na rozwiązanie (6.22) poprawkę, którą oznaczmy przez σ''_{ij} . Stan σ''_{ij} zostanie zrealizowany z nadmiarem, jeżeli będzie dotyczyć pasma tarczowego z następującymi warunkami na brzegach:

$$\begin{aligned} \sigma''_{22}(x_1, H) &= -\sigma'_{22}(x_1, H), & \sigma''_{12}(x_1, H) &= -\sigma'_{12}(x_1, H), \\ u''_1(x_1, 0) &= 0, \\ u''_2(x_1, 0) &= V(x_1), & \text{jeśli } |x_1| < a & \text{ i } u''_2(x_1, 0) = 0, & \text{jeśli } |x_1| > a. \end{aligned}$$

Jest oczywiste, że w pobliżu oparcia tarczy na belce naprężenia $\sigma''_{ij}(x_1, x_2)$ będą tym mniejsze od $\sigma'_{22}(x_1, H)$ i $\sigma'_{12}(x_1, H)$, im większy będzie stosunek H/a . Można więc powiedzieć, że $|\sigma''_{ij}(x_1, x_2)| < |\sigma'_{22}(0, H)|$, ponieważ dla wchodzących w rachubę wartości H mamy

$$\sigma'_{22}(0, H) = \max_{-\infty < x_1 < \infty} \sigma'_{22}(x_1, H)$$

(por. wykresy w pracy [2]). Ale σ''_{ij} stanowi z nadmiarem poprawkę, której nie uwzględniliśmy w naszych obliczeniach, a więc przewyższa błąd bezwzględny popełniony na skutek przyjętego założenia. Wartość $\sigma'_{22}(0, H)$ określa więc tym bardziej z nadmiarem szacowany błąd, natomiast liczba

$$(7.3) \quad 100\Delta = \frac{\sigma'_{22}(0, H)}{\sigma'_0} 100\%$$

określa z nadmiarem błąd procentowy, jakim obarczona jest funkcja $p(x_1)$. Błąd bezwzględny, jakim jest obarczona funkcja $p(x_1)$, będzie szacowany wzorem

$$(7.4) \quad \Delta p < \Delta \max_{0 \leq x_1 \leq a} |\gamma H \delta - p(x_1)|.$$

W dalszym ciągu będziemy badali wielkość Δ w zależności od wartości stosunku H/a . Naprężenia i przemieszczenia możemy wyrazić wzorami (3.8). Drugi i trzeci z warunków brzegowych (7.1) prowadzi do dualnych równań całkowych

$$(7.5) \quad \int_0^{\infty} \lambda F(\lambda) J_{-1/2}(\lambda \xi_1) d\lambda = -\frac{1+\nu}{2} a \sigma'_0 \xi_1^{-1/2}, \quad \text{jeśli } 0 < \xi_1 < 1,$$

$$\int_0^{\infty} F(\lambda) J_{-1/2}(\lambda \xi_1) d\lambda = 0, \quad \text{jeśli } 1 < \xi_1 < \infty,$$

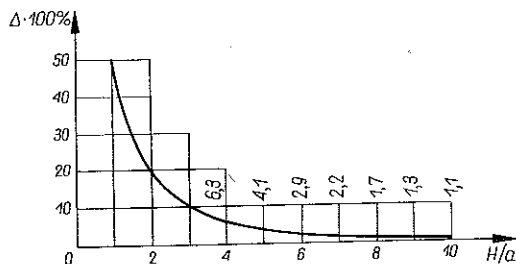
których postać jest taka sama, jaką otrzymuje się w zagadnieniu szczeliny Griffitha, poddanej działaniu wewnętrznego równomiernego ciśnienia [8]. Ostatecznie otrzymujemy

$$(7.6) \quad \sigma'_{22}(0, H) = \frac{1+\nu}{2} \sigma'_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{1+\nu} + \lambda \frac{H}{a} \right) J_1(\lambda) e^{-\lambda \frac{H}{a}} d\lambda,$$

a następnie

$$(7.7) \quad \Delta = 1 - \frac{\frac{H}{a}}{\sqrt{\left(\frac{H}{a}\right)^2 + 1}} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\frac{H}{a}}{\sqrt{\left[\left(\frac{H}{a}\right)^2 + 1\right]^3}}.$$

Na rysunku 7 przedstawiono wykres $\Delta = \Delta(H/a)$. Przyjęto $\nu = 0,2$. Z wykresu widać, że już dla $H/a = 4$, tzn. dla wysokości tarczy dwukrotnie większej od szerokości otworu (rozpiętości belki) błąd jest dostatecznie mały, jeżeli obliczenia mają cel praktyczny.



Rys. 7

8. Przykład liczbowy

Przyjmijmy, że tarczę stanowi ściana murowana z cegły klasy 100 kG cm⁻² na zaprawie marki 30 kG cm⁻². Ścianę murowaną traktujemy jako tarczę jedno-

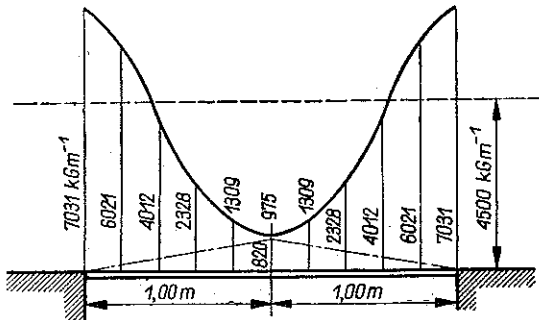
rodną i izotropową z materiału liniowo-sprężystego, co oczywiście tylko w pewnym przybliżeniu odpowiada rzeczywistości. Dla tarczy mamy więc: $\gamma = 1800 \text{ kG m}^{-3}$, $E = 17\,000 \text{ kG cm}^{-2}$, $\nu \approx 0,15$, $G \approx 7400 \text{ kG cm}^{-2}$. Przyjmijmy dalej do obliczeń belkę żelbetową z betonu marki 250 kG cm^{-2} o przekroju $25 \times 30 \text{ cm}$: $E_0 = 200\,000 \text{ kG cm}^{-2}$, $I = 56\,250 \text{ cm}^4$, $g = 187,5 \text{ kG m}^{-1}$. Przyjmijmy w końcu: $H/a = 10$, $a = 1,00 \text{ m}$, $H = 10,00 \text{ m}$, $\delta = 25 \text{ cm}$.

Obliczamy: $Q = 4500 \text{ kG}$, $\kappa = 1,0551$. Układ równań (5.5) redukujemy do sześciu równań z sześcioma niewiadomymi p_n ($n = 0, 1, \dots, 5$). Rozwiązanie dla tego układu jest następujące: $p_0 = 3534,3 \text{ kG}$, $p_1 = -1472,1 \text{ kG}$, $p_2 = 227,9 \text{ kG}$, $p_3 = -41,8 \text{ kG}$, $p_4 = 6,5 \text{ kG}$, $p_5 = 4,2 \text{ kG}$.

Redukując układ równań (5.5) do czterech równań z czterema niewiadomymi otrzymuje się: $p_0 = 3534,0 \text{ kG}$, $p_1 = -1471,8 \text{ kG}$, $p_2 = 227,6 \text{ kG}$, $p_3 = -41,5 \text{ kG}$.

Widoczne jest, że wyniki są bardzo szybko zbieżne i wraz ze zwiększaniem liczby równań ulegają nieznacznym zmianom. Widać ponadto, że liczby p_n tworzą ciąg szybko malejący, wobec czego szereg (3.1) będzie bardzo szybko zbieżny. Z tych względów zupełnie wystarczy wziąć w obliczeniach układ czterech do pięciu równań z taką liczbą niewiadomych.

Funkcja $p(\xi_1)$ została wyznaczona przez sumowanie szeregu (3.1) dla $\xi_1 = 0; 0, 2; \dots; 1$. Wykres obciążenia belki nadprożowej pokazany jest na rys. 8 linią ciągłą. Linią przerywaną oznaczono poziom obciążenia średniego w przedziale



Rys. 8

($0, \infty$), czyli obciążenia, które byłyby przekazywane przez pasmo na podłoże, gdyby belka była nieodkształcalna. Linią «kreska-kropka» zaznaczono wykres obciążeń według PN-64/B-02009.

9. Uwagi końcowe

Z podanego przykładu wynika, że wykres obciążenia nadproża, otrzymany na gruncie płaskiego zadania teorii sprężystości (przy założeniu sprężystej współpracy belki i ściany), różni się zasadniczo pod względem jakościowym jak i ilościowym od wykresu normowego. Przyczyna tkwi w założeniach, które w niniejszej pracy (oraz w [3]) są jakościowo inne niż w teorii sklepienia odciażającego.

Rozstrzygnięcie o słuszności takich lub innych założeń nie jest celem tego artykułu. Wydaje się, że oba schematy pracy układu mają znaczenie praktyczne. W każdym razie wyciąganie wniosku, że postanowienia normy, a w szczególności koncepcja sklepienia odcciążającego jest fałszywa, byłoby — zdaniem autora — niesłuszne i to z trzech względów. Po pierwsze — ściana murowana może być traktowana tylko w przybliżeniu jako ośrodek ciągly liniowo-sprężysty. Istotnym czynnikiem może być tu znikoma wytrzymałość tego materiału na rozciąganie. Po drugie — jeżeli nastąpi przeciążenie nadproża (projektowanego zgodnie z normą), to zwiększone ugięcia belki będą z kolei wywoływać zmniejszenie się nacisku ściany. W rezultacie może wytworzyć się stan graniczny zbliżony do postulowanego przez koncepcję sklepienia odcciążającego. Zjawiska takie nie mieszczą się jednakże w ramach liniowej teorii sprężystości. Po trzecie — doświadczenie wskazuje, że nadproża projektowane w sposób tradycyjny (i obowiązujący) na ogół dobrze spełniają swą rolę.

Celem niniejszej pracy było rozwiązanie określonego zadania teorii sprężystości, które, być może, ułatwi krytyczne ustosunkowanie się do tradycyjnych poglądów na problem istotny dla praktyki inżynierskiej. Wyciągnięcie bardziej szczegółowych wniosków wymaga niewątpliwie dokładniejszej analizy (m.in. opartej na większej liczbie przykładów numerycznych), nie mieszczącej się w ramach tej pracy.

Podane rozwiązanie może, zdaniem autora, być celowe i bezpośrednio zastosowane w przypadku układu złożonego z tarczy żelbetowej lub betonowej i belki żelbetowej lub stalowej.

Literatura cytowana w tekście

1. S. S. DAWYDOW, *Obliczanie i projektowanie konstrukcji podziemnych*, MON, Warszawa 1954.
2. M. NIEMIEC, G. SZEFER, *Koncepcja sklepienia ciśnien w świetle teorii sprężystości*, Czasopismo Techniczne, nr 5, Kraków 1966.
3. Б. Н. ЖЕМОЧКИН, *Расчет раидабалок и перемычек*, Госстройиздат, Москва 1960.
4. Я. С. УФЛЯНД, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Изд. АН СССР, Москва-Ленинград 1963.
5. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York-Toronto-London 1951.
6. И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДИШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гос. Издат. Техничко-Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1951.
7. A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F. G. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York-Toronto-London 1954.
8. I. N. SNEDDON, *Zagadnienia szczelin w matematycznej teorii sprężystości*, PAN, Warszawa 1962.

Резюме

ПЛАСТИНЧАТАЯ СТЕРЖНЕВАЯ СИСТЕМА, ПОДВЕРЖЕННАЯ ДЕЙСТВИЮ МАССОВЫХ СИЛ

Рассматривается вопрос полосы большой высоты H , нижний край которой соединен на отрезке $2a$ с двухсторонне защемленной балкой, а на остальной части недеформируемым основанием. На систему действуют массовые силы: собственный вес полосы и балки.

Функция взаимного воздействия полосы и балки $p(x_1)$ принята в виде ряда Фурье по косинусам. Для составления решения для полосы использовано функции Нейбера и Папковича. Применяя преобразование Фурье по косинусам задачу можно свести к парным интегральным уравнениям. Определенную этим путем функцию $u_2(x_1, 0)$, $|x_1| < a$, разлагается в ряд Фурье по косинусам. Функцию прогибов $V(x_1)$ балки, нагруженной $p(x_1) + g$ (g — собственный вес балки на единицу ее длины) определяется используя конечное преобразование Фурье по конусам. Условие согласованности перемещений полосы и балки

$$u_2(x_1, 0) = V(x_1)$$

приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений с неизвестными p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) [где p_n — коэффициенты ряда Фурье функции $p(x_1)$].

Затем выводятся формулы для напряжений в полосе. Задача иллюстрируется числовым примером. Полученные результаты могут найти применение при анализе нагрузок, передаваемых стенами на перемычку.

Summary

A SHEET-BAR SYSTEM SUBJECT TO BODY-FORCES

The problem under consideration is that of a sheet strip of considerable height H . The lower edge is attached along a segment length $2a$ to a bar clamped at both ends and on the remaining part of the edge — to an undeformable foundation. The system is acted on by body-forces: the weight of the sheet and that of the bar.

The function $p(x_1)$ expressing the interaction between the sheet and the bar is assumed in the form of a Fourier cosine series. To construct the solution for the sheet the Neuber and Papkovich functions are used. Making use of the Fourier cosine transformation, the problem can be reduced to dual integral equations. The function $u_2(x_1, 0)$, $|x_1| < a$ determined in this way is expanded in Fourier cosine series. The deflection function $V(x_1)$ of the bar loaded by the weight $p(x_1) + g$ (where g is the weight of the bar per unit length) is determined by means of the finite cosine Fourier transformation. The compatibility condition of displacement for the sheet and the bar

$$u_2(x_1, 0) = V(x_1)$$

leads to an infinite set of algebraic equations with the Fourier coefficients p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) of the function $p(x_1)$ as unknown.

In further considerations are derived equations expressing the stresses in the sheet. The problem is illustrated by a numerical example. The results obtained may find application for the analysis of the load with which a lintel is acted on by the wall.

KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1968 r.