ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, **16** (1968)

MIEJSCE TEORII POROWATOŚCI BIOTA W MECHANICE OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

ROMAN SOLECKI (WARSZAWA)

1. W 1941 r. M. A. BIOT opublikował [1] swa liniową teorię deformacji ciała porowatego, zawierającego płyn lepki, a w latach późniejszych zajął się (a za nim i inni autorzy) problemem propagacji akustycznej w takim ośrodku. Z drugiej strony w ostatnim dziesięcioleciu rozwinęła się, zapoczątkowana we współczesnym ujęciu przez C. TRUESDELLA [3], teoria dyfuzji ciał odkształcalnych. Zdawać by się mogło, że zlinearyzowana teoria dyfuzji płynu lepkiego i ciała sprężystego powinna być identyczna z teorią Biota. Tak jednak, jak to stwierdzono [4], nie jest. W niniejszej pracy postaramy się odpowiedzieć na pytanie: jakie jest miejsce teorii Biota w mechanice ośrodków ciągłych? Za kryterium poprawności omawianych związków uważać będziemy zgodność z podstawowymi zasadami, których spełnienia żąda się [5] od równań konstytutywnych opisujących dane ciało.

2. Zaczniemy od krótkiego przypomnienia podstaw liniowej teorii Biota. BIOT zakłada, że każdy punkt przestrzeni jest równocześnie zajęty przez cząstkę ciała sprężystego oraz przez cząstkę płynu. Otrzymany w ten sposób agregat charakteryzuje się energią potencjalną $W = W(\operatorname{grad}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{U})$ gdzie $\mathbf{u}$ i $\mathbf{U}$ oznaczają odpowiednio wektory przemieszczenia ciała stałego i płynu. Wychodząc z takiego założenia wyprowadza BIOT związki konstytutywne, które w przypadku izotropii przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}\sigma^1_{ij} &= Ae^1_{kk}\,\delta_{ij}+2Ne^1_{ij}+Qe^2_{kk}\,\delta_{ij},\\ \sigma^2_{ij} &= -\frac{1}{\beta}(Qe^1_{kk}+Re^2_{kk})\,\delta_{ij}=p\delta_{ij}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Oznaczyliśmy tutaj przez σ^1_{ij}, σ^2_{ij} tensory naprężenia, przez e^1_{ij}, e^2_{ij} — tensory odkształcenia infinitezymalnego odnoszące się do ciała 1 (ciało stałe) lub też do ciała 2 (płyn). Wszystkie składowe odnieśliśmy do współrzędnych kartezjańskich. W dalszym ciągu ograniczymy się do badania ciała jednorodnego zakładając, że wielkości A, N, Q i R są stałe. Zauważymy od razu, że równania konstytutywne (2.1) nie spełniają zasady współobecności. Zasada ta nie wymaga co prawda, aby w ostatecznych związkach występowały te same zmienne, jednakże usunięcie niektórych wielkości może być spowodowane jedynie wymaganiami zasad mechaniki, warunków symetrii czy też zasady produkcji entropii. W pracy Biota związki (2.1) wynikają natomiast z definicji potencjału W oraz z definicji zależności między potencjałem W a σ_{ij}.

Posługując się związkami (2.1) można przedstawić w następującej postaci wyprowadzone przez BIOTA równania ruchu:

$$\sigma^1_{ij,j} = \varrho_{11}\ddot{u}_i + \varrho_{12}\ddot{U}_i, \qquad \sigma^2_{ij,j} = \varrho_{12}\ddot{u}_i + \varrho_{22}\ddot{U}_i, \tag{2.2}$$

gdzie ϱ_{11}, ϱ_{12} i ϱ_{22} są współczynnikami związanymi z gęstościami ciała stałego i płynu.

3. Przytoczymy teraz równania ruchu agregatu dwóch ośrodków dyfundujących pomijając siły masowe i zakładając, że spełniony jest postulat zachowania masy dla każdego z tych ośrodków oddzielnie (por. np. [6]). Mamy

$$-\pi_i = \varrho_1\ddot{u}_i - \sigma^{(1)}_{ji,j}, \qquad \pi_i = \varrho_2\ddot{U}_i - \sigma^{(2)}_{ji,j}, \tag{3.1}$$

gdzie π jest wektorem oporu dyfuzji, $\sigma^{(1)}_{ki}$, $\sigma^{(2)}_{ki}$ zaś naprężeniami cząstkowymi. W celu upodobnienia (2.2) do (3.1) rozwiążemy ten układ równań względem $\ddot{u}_i$ oraz $\ddot{U}_i$. Otrzymane związki mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \varrho_{11}\ddot{u}_i &= \varrho_{11}\bar{A}\sigma^1_{ij,j} + \varrho_{11}\bar{B}\sigma^2_{ij,j}, \\ \varrho_{22}\ddot{U}_i &= \varrho_{22}\bar{B}\sigma^1_{ij,j} + \varrho_{22}\bar{C}\sigma^2_{ij,j}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\bar{A} = \frac{\varrho_{22}}{\varrho^{(2)}}, \qquad \bar{C} = \frac{\varrho_{11}}{\varrho^{(2)}}, \qquad \bar{B} = -\frac{\varrho_{12}}{\varrho^{(2)}}, \qquad \varrho^{(2)} = \varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho^2_{12}. \tag{3.3}$$

Porównując (3.2) z (3.1) widzimy, że należałoby przyjąć w dalszym ciągu

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}_{ji} - \Pi_{ij} &= \varrho_{11}(\bar{A}\sigma^1_{ij} + \bar{B}\sigma^2_{ij}) \equiv \alpha_1 e^1_{kk}\delta_{ij} + \alpha_2 e^1_{ij} + \alpha_3 e^2_{kk}\delta_{ij}, \\ \sigma^{(2)}_{ji} + \Pi_{ij} &= \varrho_{22}(\bar{B}\sigma^1_{ij} + \bar{C}\sigma^2_{ij}) \equiv \beta_1 e^1_{kk}\delta_{ij} + \beta_2 e^1_{ij} + \beta_3 e^2_{kk}\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tutaj $\sigma^{(1)}_{ji}$ i $\sigma^{(2)}_{ji}$ są nowo zdefiniowanymi naprężeniami cząstkowymi, spełniającymi zasadę współobecności, Π_{ij} jest zaś pewną funkcją, której dywergencja jest oporem dyfuzji:

$$\Pi_{ij,j} = \pi. \tag{3.5}$$

Występujące w (3.4) współczynniki fenomenologiczne α i β określone są przez następujące związki:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varrho^{-2}\left(\varrho_{11}\varrho_{22}A + \varrho_{11}\varrho_{12}\frac{Q}{\beta}\right), \qquad \alpha_2 = \frac{2\varrho_{11}\varrho_{22}N}{\varrho^2}, \\ \alpha_3 &= \varrho^{-2}\left(\varrho_{11}\varrho_{22}Q + \varrho_{11}\varrho_{12}\frac{R}{\beta}\right), \\ \beta_1 &= -\varrho^{-2}\left(\varrho_{11}\varrho_{12}A + \varrho_{11}\varrho_{22}\frac{Q}{\beta}\right), \qquad \beta_2 = \frac{2\varrho_{12}\varrho_{22}N}{\varrho^2}, \\ \beta_3 &= -\varrho^{-2}\left(\varrho_{11}\varrho_{22}Q + \varrho_{11}\varrho_{22}\frac{R}{\beta}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Podstawiając (3.4) i (3.5) do (3.2) otrzymujemy

$$-\pi_i = \varrho_{11}\ddot{u}_i - \sigma^{(1)}_{ji,j}, \quad \pi_i = \varrho_{22}\ddot{U}_i - \sigma^{(2)}_{ji,j}. \tag{3.7}$$

Uzyskaliśmy zatem formalną identyczność równań ruchu dwóch ośrodków dyfundujących z równaniami ruchu mieszaniny Biota. Musimy teraz wyjaśnić, czy nie zachodzi sprzeczność między związkami (3.4), wynikającymi z teorii Biota, a uzyskanymi formalnie równaniami ruchu (3.7).

1. Przyjmijmy na razie, że ciało 1 jest izotropowym ciałem sprężystym, ciało 2 zaś płynem. W przypadku ruchu takiej mieszaniny mają zastosowania równania konstytutywne uzyskane przez A. E. Greena i T. R. Steela [7]. Równania te czynią zadość żądaniu niezmienniczości i zasadzie współobecności, a ograniczenia nałożone na występujące w nich współczynniki fenomenologiczne wynikają z zastosowania nierówności entropii. Otóż w przypadku zlinearyzowanym, zgodnie z tą pracą, żadne z naprężeń cząstkowych nie zależy ani od różnicy prędkości składników mieszaniny, ani też od pochodnych tensora odkształcenia; opór dyfuzji natomiast od tych wielkości zależy.

W tym przypadku z rozwiązania równania (3.5) wynika, że i tensor Π_{ij} musi zależeć od tej różnicy, a zatem (w związku z założeniami odnośnie $\sigma^{(1)}_{ji}$ i $\sigma^{(2)}_{ji}$) spełnienie związków (3.4) nie jest możliwe.

2. Jeśliby obydwa ciała były izotropowymi ciałami sprężystymi, to zgodnie z pracą [4] opór dyfuzji zależałby ponownie od podanych poprzednio wielkości, a zatem i w tym przypadku spełnienie związków (3.4) nie jest możliwe.

Doszliśmy w ten sposób do wniosku, że w teorii Biota pominięty jest opór dyfuzji. W konsekwencji związki (3.4) należy uważać za równania konstytutywne dla naprężeń cząstkowych $\sigma^{(1)}_{ji}$ i $\sigma^{(2)}_{ji}$.

3. Należy teraz wyjaśnić, przyjmując za dopuszczalne pominięcie oporu dyfuzji, jakich dwóch ciał mieszaninę można opisać związkami (3.4). Jednym z nich jest niewątpliwie izotropowe, jednorodne ciało sprężyste, przy czym naprężenie w takim ciele opisane jest w przypadku infinitezymalnej deformacji, jak wiadomo, związkiem typu

$$\sigma_{ij} = \lambda_1 e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_1 e^1_{ij}. \tag{3.8}$$

Drugie z tych ciał opisane jest, w przypadku gdy pierwsze z nich nie występuje, związkiem konstytutywnym typu

$$\sigma_{ij} = \lambda_2 e^2_{kk}\delta_{ij}. \tag{3.9}$$

Zachodzą trzy przypadki: I. Ciało 2 może być, zgodnie z założeniami Biota, idealnym (sprężystym) płynem Stokesa o równaniu konstytutywnym

$$\sigma_{ij} = -\bar{\pi}\,\delta_{ij}. \tag{3.10}$$

Jednakże żądanie jednoczesnego spełnienia równania zachowania masy oraz wynikającego z (3.9) i (3.10) związku $\bar{\pi} = -\lambda_2 e^2_{kk}$ wraz z założeniem o nieskończenie małych deformacjach i prędkościach prowadzi, co łatwo sprawdzić, do następującego równania stanu:

$$\bar{\pi} = \lambda_2 \ln \varrho + C, \qquad C = \text{const.} \tag{3.11}$$

Ciało 2 może być więc bardzo szczególnym przypadkiem płynu piezotropowego.

II. Ciało 2 może być również dowolnie poruszającym się ciałem sprężystym, dla którego współczynnik Lamégo $\mu = 0$.

III. Ciało 2 może być wreszcie dowolnym ciałem sprężystym o ograniczeniach nałożonych na stan deformacji.

Załóżmy, że

$$e^2_{ij} = e(x_1, x_2, x_3, t)\,\delta_{ij}, \tag{3.12}$$

gdzie $e = 1/3\, e^2_{jj}$. Wówczas

$$\sigma_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\, e\delta_{ij}, \tag{3.13}$$

a to jest istotnie wzór typu (3.8). Z (3.12) wynika, że

$$U_{i,j} = 0, \quad \text{gdy} \quad i \neq j, \tag{3.14}$$

a więc

$$U_1 = U_1(x_1, t), \qquad U_2 = U_2(x_2, t), \qquad U_3 = U_3(x_3, t) \tag{3.15}$$

oraz

$$e^2_{jj,i} = \frac{\partial^2 U_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \qquad \text{(nie sumować po } i\text{)}. \tag{3.16}$$

Podstawmy teraz (3.4) i (3.16) do (3.7) uwzględniając, że $\pi_i = 0$:

$$\begin{aligned} \varrho_{11}\, \ddot{u}_i &= \alpha_1 e^1_{jj,i} + \alpha_2 e^1_{ij,j} + \alpha_3 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i\, \partial x_i} \qquad \text{(nie sumować po } i\text{)}, \\ \varrho_{22}\, \ddot{U}_i &= \beta_1 e^1_{jj,i} + \beta_2 e^1_{ij,j} + \beta_3 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i\, \partial x_i} \qquad \text{(nie sumować po } i\text{)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Układ równań $(3.17)_2$ jest rozprzężony ze względu na U_i; każde z równań tego układu jest niejednorodnym równaniem falowym. Wielkości U_i można zatem bez trudu wyeliminować z $(3.17)_1$. Zauważmy jednakże, że z (3.15) i z $(3.17)_1$ wynikają dodatkowe ograniczenia, którym podlegają funkcje $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$. Muszą być mianowicie spełnione warunki

$$\beta_1 e^1_{jj,i} + \beta_2 e^1_{ij,j} = f_i(x_i, t) \qquad \text{(nie sumować po } i\text{)}, \tag{3.18}$$

gdzie $f_i(x_i, t)$ są dowolnymi funkcjami swoich argumentów.

Literatura cytowana w tekście

1. M. A. Biot, J. Appl. Phys., **12** (1941), 155, 426, 578.
2. M. A. Biot, J. Appl. Phys., **33** (1962), 1482.
3. C. Truesdell, III simposio di meccanica e matematica applicata, 1961, s. 161.
4. T. R. Steel, The Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1, **20** (1967), 57.
5. C. Truesdell, W. Noll, Handb. d. Physic, III/3, Springer Verlag 1965.
6. A. E. Green, P. M. Naghdi, Int. J. Eng. Sci., 2, **3** (1965), 231.
7. A. E. Green, T. R. Steel, Int. J. Eng. Sci., 4, **4** (1966), 483.
8. A. C. Eringen, *Nonlinear Theory of Continuous Media*, Mc Graw-Hill, New York 1962.

Резюме

МЕСТО ТЕОРИИ БИО В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

В представленной работе дается критическое сравнение теории консолидации Био с более современными теориями, а в особенности теорей Грина и Стиля. Автор покаыввает ограниченную применяемость теории Био, утверждая пренебрежение в ней сопротивлением диффузии.

Summary

THE PLACE OF THE BIOT POROSITY THEORY IN CONTINUUM MECHANICS

The paper contains a critical comparison of the Biot consolidation theory with more modern theories, in particular with Green's theory. The author demonstrates the limited range applicability of the Biot theory, indicating that it neglects the diffusion resistance.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 grudnia 1967 r.