

OBLICZANIE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ SKRĘCANYCH PRĘTÓW  
O DOWOLNEJ NIEJEDNORODNOŚCI POPRZECZNEJ

MARIAN GALOS (KRAKÓW)

1. Wstęp

Plastycznym skęcaniem prętów przyrnatycznych niejednoroonych zajmowano się dotychczas bardzo mało. A. I. KUZNICOW w pracy [7] zajął się plastycznym skęcaniem prętów przyrnatycznych o niejednoroowości zależnej tylko od jednego kierunku. Rozpatrzył on szczegółowo przypadek niejednoroowości typu  $k = k_0 e^{\alpha x}$ . Dlatego bardzo szczególnego przypadku niejednoroowości oraz prostych przekrojów (prostokąt) można było znaleźć w formie zamkniętej wyrażenia na naprężenia jako funkcję współrzędnych oraz wyrażenie na moment graniczny.

Następnymi pracami były prace J. RYCHLEWSKIEGO [11], M. GALOSA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [2] oraz M. GALOSA [3], w których zajęto się pewnymi szczególnymi przypadkami niejednoroowości, mianowicie, gdy granica plastyczności jest tylko zależna od odległości od zewnętrznego konturu pręta. Dla tego przypadku wyprowadzono wzory ogólne oraz otrzymano w formie zamkniętej wzory na moment graniczny dla kilku przykładów.

W pracy [11] J. RYCHLEWSKI rozpatruje także problem skęciania pręta o dowolnej niejednoroowości poprzecznej. Autor szuka naprężeń w postaci szeregów potęgowych, rozwijając funkcję określaającą niejednoroowość wokół brzegu przekroju. Wymagało to, aby funkcja niejednoroowości miała ciągle wszystkie pochodne. Wprowadzono tutaj jako współrzędne rodzinę prostych normalnych do brzegu przekroju oraz rodzinę krzywych do nich ortogonalnych. R. HILL [4] zajmował się problemem plastycznego skęciania prętów niejednoroonych, jednakże nie wyszedł on w swych rozważaniach poza sformułowanie problemu. Problemem plastycznego skęciania prętów przyrnatycznych o dowolnej niejednoroowości poprzecznej zajmował się J. A. KIIKO. W swej pracy [6] wyprowadził on równanie różniczkowe linii poślizgu oraz zajął się zagadnieniami wariacyjnymi przy plastycznym skęciani prętów niejednoroonych. Nie analizował on jednak bliżej problemu linii nieciągłości i nie podał efektywnych metod określenia nośności granicznej. Zagadnieniem plastycznego skęciania prętów o niejednoroowości skokowej zajmował się J. RYCHLEWSKI w pracy [12].

Problemem pokrewnym, mianowicie plastycznym skęcianiem prętów o zmiennej średnicy, zajmowano się dość dużo (np. W. W. SOKOŁOWSKI [14], L. S. KACZANOW [5]).

Należy wspomnieć o problemie skręcania plastycznego wycinka pierścienia kołowego: problemem tym dość szczegółowo zajmowali się W. FREIBERGER i W. PRAGER [1]. Obydwa powyżej przedstawione problemy pokrewne wykazują analogię matematyczną do problemu skręcania pryzmatycznych prętów niejednorodnych, odpowiadającą jednakże przypadkowi niejednorodności zależnej tylko od jednego stałego kierunku.

W niniejszej pracy zajęto się plastycznym, swobodnym skręcaniem prętów pryzmatycznych o dowolnej niejednorodności,  $k = k(x, y)$ , przy czym funkcja niejednorodności (granica plastyczności przy czystym ścinaniu)  $k = k(x, y)$  oraz jej pochodne  $\partial k/\partial x$   $\partial k/\partial y$  są ciągłe w podobszarach przekroju pręta. Na granicach pomiędzy podobszarami dopuszczalne są nieciągłości tak funkcji niejednorodności  $k = k(x, y)$ , jak i pochodnych  $\partial k/\partial x$  i  $\partial k/\partial y$ .

Problem rozwiązywano przez wprowadzenie funkcji naprężeń  $\Phi$ . Wyprowadzono równanie różniczkowe linii największego spadku funkcji naprężeń  $\Phi$  (tak w dalszym ciągu pracy nazywać będziemy rzuty linii największego spadku funkcji naprężeń  $\Phi$  na powierzchnię przekroju), podano wzory na określenie linii nieciągłości oraz wzory potrzebne do określenia momentu granicznego. Przy wyprowadzaniu wzoru na moment graniczny wykorzystano uogólnioną analogię wzgórza płaskowego NÁDAI'a [9], która stwierdza proporcjonalność momentu granicznego i objętości pod powierzchnią  $\Phi(x, y)$ . Obliczanie objętości pod powierzchnią  $\Phi$  (dzięki odpowiedniemu przyjęciu zmiennych krzywoliniowych) sprowadzono do bardzo wygodnego całkowania funkcji dwu zmiennych. Metody stosowane w obecnej pracy wykorzystać można także przy rozwiązywaniu uprzednio przedstawionych problemów pokrewnych, tzn. plastycznego skręcania prętów kołowych o zmiennej średnicy oraz plastycznego skręcania wycinka pierścienia kołowego, jeżeli elementy wykonane są z materiału o dowolnej niejednorodności, zależnej tylko od dwu współrzędnych  $r$  i  $z$  (problem musi pozostać nadal obrotowo-symetrycznym).

## 2. Postawienie problemu

Przy rozwiązywaniu problemu skręcania prętów pryzmatycznych jednorodnych (rys. 1) zakłada się, że składowe stanu naprężeń  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ , natomiast  $\tau_{zx} \neq 0$  i  $\tau_{zy} \neq 0$ .

Problem plastycznego skręcania pryzmatycznych prętów niejednorodnych rozwiązuje (oczywiście przy poddbnym założeniu, jak przy prętach jednorodnych) układ równań:

równanie równowagi wewnętrznej

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0;$$

warunek plastyczności, który przy założeniu dowolnej hipotezy wyężeniowej można dla ciała izotropowego napisać w formie

$$(2.2) \quad \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = k^2(x, y).$$

Jeżeli wprowadzimy funkcję naprężeń  $\Phi$ , taką że

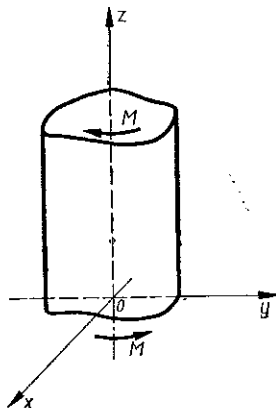
$$(2.3) \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

oraz odpowiedni warunek brzegowy, to układ równań (2.1) i (2.2) sprowadzi się do jednego równania różniczkowego o niewiadomej funkcji  $\Phi$ , mianowicie

$$(2.4) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = k^2(x, y).$$

Funkcja naprężeń  $\Phi$  podobnie jak przy skręcaniu prętów jednorodnych musi spełniać warunek brzegowy  $\Phi = \text{const}$  na konturze przekroju. Z reguły przyjmuje się  $\Phi = 0$  na konturze zewnętrznym oraz  $\Phi = \text{const}$  na konturze wewnętrznym w przypadku obszarów wielospójnych.

Ze zbioru rozwiązań równania (2.4) należy wybrać takie rozwiązanie, które daje maksymalny moment skręcający.

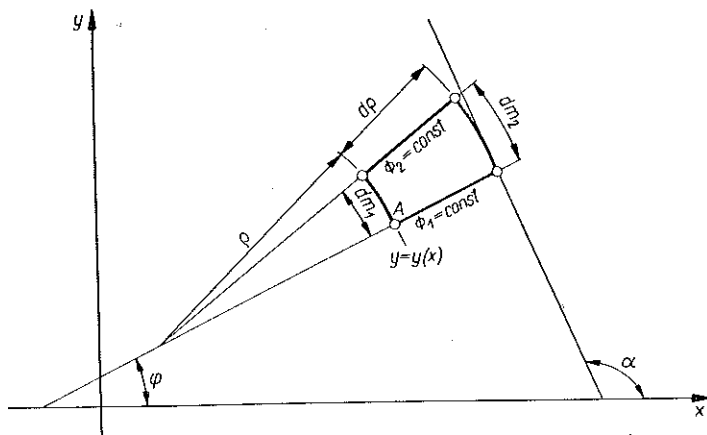


Rys. 1

### 3. Równanie różniczkowe linii największego spadku

Załóżmy, że w rozpatrywanym obszarze przekroju pręta funkcja niejednorodności  $k = k(x, y)$  oraz jej pochodne  $\partial k/\partial x$  i  $\partial k/\partial y$  są ciągłe.

Przez dowolny punkt  $A$  rozpatrywanego obszaru (rys. 2) przeprowadzamy dwie linie wzajemnie prostopadłe, mianowicie:



Rys. 2

1) rzut linii największego spadku funkcji naprężeń  $\Phi$ , którą dalej będziemy nazywali krótko linią największego spadku, zaznaczony jako linia krzywa o promieniu  $\rho$ ;

2) linia  $\Phi_1 = \text{const}$ , poziomica funkcji  $\Phi$ , którą przedstawiono jako odcinek prosty.

W odległości  $d\varrho$  na linii  $\Phi_1 = \text{const}$  znajduje się punkt  $B$ , przez który przechodzi sąsiednia linia największego spadku. Jeżeli rozpatrywane linie największego spadku ograniczymy drugą poziomica funkcji  $\Phi$ , mianowicie  $\Phi_2 = \text{const}$ , to z rys. 2 wynika zależność

$$(3.1) \quad \frac{dm_1}{\varrho} = \frac{dm_2}{\varrho + d\varrho},$$

gdzie przez  $dm_1$  i  $dm_2$  oznaczono długości odpowiednich odcinków linii największego spadku.

Ponieważ równanie (2.4) można napisać w formie

$$(3.2) \quad |\overrightarrow{\text{grad}} \Phi| = \left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = k(x, y),$$

więc równanie (3.1) można przedstawić jako

$$(3.3) \quad \varrho k_A = (\varrho + d\varrho) k_B,$$

gdzie  $k_A$  i  $k_B$  są wartościami funkcji niejednorodności odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$ , przy czym

$$(3.4) \quad k_B = k_A + \left( \left[ \frac{\partial k}{\partial x} \right]_A dx + \left[ \frac{\partial k}{\partial y} \right]_A dy \right).$$

Ponieważ z rys. 2 wynika

$$(3.5) \quad dx = d\varrho \cos \varphi, \quad dy = d\varrho \sin \varphi$$

oraz dalej

$$(3.6) \quad \sin \varphi = -\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos \varphi = \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

(przy czym  $y = y(x)$  jest równaniem linii największego spadku), przeto po przekształceniu równanie (3.4) przyjmie postać

$$(3.7) \quad k_B = k_A + \left( \frac{\partial k}{\partial x} y' - \frac{\partial k}{\partial y} \right) \frac{d\varrho}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Dla linii największego spadku  $y = y(x)$  promień krzywizny jest określony równaniem

$$(3.8) \quad \varrho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Po podstawieniu (3.7) i (3.8) do wyrażenia (3.3), po wykonaniu przekształceń i pominięciu małych wyższego rzędu otrzymujemy równanie różniczkowe linii największego spadku w postaci

$$(3.9) \quad y' \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{y'' k(x, y)}{1+y'^2}.$$

Równanie to jako równanie charakterystyk wyprowadził J. A. KUKO [6], jednak przedstawione powyżej wyprowadzenie równania linii największego spadku, uzyskane niezależnie na innej drodze, było referowane przez autora na konferencji Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk w r. 1966 w Koblbrzegu, przed opublikowaniem pracy [6].

#### 4. Analiza równania różniczkowego linii największego spadku

Równanie różniczkowe linii największego spadku jest równaniem zwyczajnym nieliniowym drugiego rzędu. Rozwiązanie tego równania w sposób ścisły jest możliwe tylko w bardzo szczególnych przypadkach niejednorodności. W obecnym punkcie zajmiemy się tymi szczególnymi przypadkami niejednorodności, dla których można znaleźć ściśle rozwiązanie równania (3.9) lub też kiedy można je sprowadzić do równania różniczkowego rzędu pierwszego.

4.1. Najprostszym przypadkiem jest oczywiście przypadek skrećania pręta jednorodnego, tzn. gdy  $k = k(x, y) = \text{const}$ . Wtedy  $y'' = 0$ , więc równanie linii największego spadku jest równaniem linii prostej  $y = ax + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi wyznaczonymi z warunków brzegowych.

4.2. Drugim prostym przypadkiem jest niejednorodność typu  $k = k(ax + by)$ , tzn. zależna od jednego stałego kierunku. Dla tego przypadku równanie różniczkowe linii największego spadku zapisać możemy w formie

$$(4.1) \quad y' \frac{dk}{du} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dk}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = -y'' \frac{k(u)}{1+(y')^2},$$

gdzie

$$(4.2) \quad u = ax + by.$$

Różniczkując dwukrotnie funkcję (4.2) podług zmiennej  $x$  otrzymujemy

$$(4.3) \quad y' = \frac{u' - a}{b}, \quad y'' = \frac{u''}{b}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności oraz  $\partial u/\partial x = a$  i  $\partial u/\partial y = b$  do (4.1) otrzymujemy

$$(4.4) \quad [u' a - (a^2 + b^2)] \frac{d \ln k(u)}{du} = \frac{-u'' b^2}{a^2 + b^2 + (u')^2 - 2au'}.$$

Równanie to możemy sprowadzić do równania różniczkowego rzędu pierwszego stosując podstawienie typu  $u' = p$ ,  $u'' = p' p$ . Po przekształceniach otrzymujemy

$$(4.5) \quad \ln k = -b^2 \int \frac{p dp}{[pa - (a^2 + b^2)] [p^2 - 2ap + (a^2 + b^2)]} + C.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy rozwiązanie w formie uwikłanej:

$$(4.6) \quad k = \frac{C \sqrt{p^2 - 2ap + (a^2 + b^2)}}{pa - (a^2 + b^2)}.$$

Dalej funkcję tę można rozwickać ze względu na  $p$  i znaleźć rozwiązanie  $u = u(x)$  w kwadraturach.

Szczególnymi przypadkami tego rodzaju niejednorodności są niejednorodności typu  $k = k(x)$  oraz  $k = k(y)$ , dla których rozwiązaniami będą odpowiednio

$$(4.7) \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{Ck^2(x) - 1}}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{Ck^2(y) - 1}.$$

4.3. Równanie różniczkowe linii największego spadku (3.9) możemy napisać w postaci

$$(4.8) \quad y'' + [1 + (y')^2] \left( y' \frac{\partial \ln k}{\partial x} - \frac{\partial \ln k}{\partial y} \right) = 0.$$

Jeżeli dla danej niejednorodności  $k = k(x, y)$  możemy znaleźć taką funkcję  $\Psi = \Psi(x, y)$ , tak że

$$(4.9) \quad \Psi'_x = -\frac{\partial \ln k}{\partial y}, \quad \Psi'_y = \frac{\partial \ln k}{\partial x},$$

to możemy obniżyć rząd równania różniczkowego (4.7) do rzędu pierwszego otrzymując

$$(4.10) \quad y' = -\operatorname{tg} [\Psi(x, y) + C].$$

Ponieważ funkcja  $\Psi(x, y)$  musi spełniać warunki Schwarz'a, więc z zależności:

$$(4.11) \quad \Psi''_{xy} = -\frac{\partial^2 \ln k}{\partial y^2}, \quad \Psi''_{xy} = \frac{\partial^2 \ln k}{\partial x^2}$$

wynika, że aby można było tą metodą obniżyć rząd równania różniczkowego linii największego spadku, niejednorodność musi spełniać warunek

$$(4.12) \quad \nabla^2 (\ln k) = 0,$$

tzn. funkcja  $\ln k$  musi być funkcją harmoniczną  $w$ , zatem

$$(4.13) \quad k(x, y) = e^w.$$

Funkcje harmoniczne mogą być np. wielomianami harmonicznymi

$$(4.14) \quad \begin{aligned} w_0 &= a, \\ w_1 &= a_1 x + a_2 y, \\ w_2 &= a_1 (x^2 - y^2) + a_2 xy, \\ w_3 &= a_1 (x^3 - 3xy^2) + a_2 (y^3 - 3x^2 y), \\ &\dots \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja niejednorodności materiału da się przedstawić wzorem (4.13), to funkcje  $\Psi(x, y)$  znajdziemy całkując zależności (4.9), mianowicie

$$(4.15) \quad \Psi = - \int \frac{\partial w}{\partial y} dx + f(y) \quad \Psi = \int \frac{\partial w}{\partial x} dy + f(x).$$

Po przyrównaniu obu wyrażeń na  $\Psi$  do siebie możemy określić funkcje  $f(x)$  i  $f(y)$  np.:

$$(4.16) \quad k(x, y) = k_0 e^w = k_0 e^{\alpha_1(x^2 - y^2) + \alpha_2 xy},$$

Dla tej niejednorodności mamy

$$(4.17) \quad \Psi'_x = 2\alpha_1 y - \alpha_2 x \quad \Psi'_y = 2\alpha_1 x + \alpha_2 y,$$

skąd

$$\Psi = 2\alpha_1 xy - \frac{\alpha_2 x^2}{2} + f(y),$$

$$\Psi = 2\alpha_1 xy + \frac{\alpha_2 y^2}{2} + f(x).$$

Po przyrównaniu do siebie obu wyrażeń na funkcję  $\Psi$  znajdujemy

$$(4.18) \quad f(x) = -\frac{\alpha_2 x^2}{2}, \quad f(y) = \frac{\alpha_2 y^2}{2}.$$

Równanie różniczkowe linii największego spadku dla tego przykładu da się sprowadzić do postaci

$$(4.19) \quad y' = -\operatorname{tg} \left[ 2\alpha_1 xy + \frac{\alpha_2}{2}(y^2 - x^2) + C_1 \right].$$

Bardzo szczególnym przypadkiem tych rodzajów funkcji niejednorodności jest rozpatrywana przez A. I. KUZNIECOWA w pracy [7] niejednorodność typu  $k(x, y) = k_0 e^{\alpha x}$ , a więc niejednorodność zależna w sposób wykładniczy tylko od jednej współrzędnej. Łatwo znaleźć dla tego typu niejednorodności równanie linii największego spadku:

$$(4.20) \quad \int \frac{dy}{\operatorname{tg}(ay + c_1)} = -x + c_2,$$

skąd

$$(4.21) \quad -x + c_2 = \frac{1}{a} \ln |\sin(ay + c_1)|,$$

co jest zgodne z wynikami pracy A. I. KUZNIECOWA.

Na podstawie tej analizy można stwierdzić że:

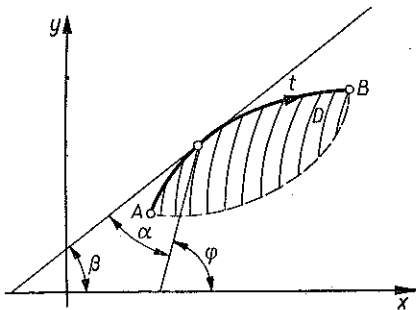
a. Znalezienie rozwiązania równania różniczkowego linii największego spadku w kwadraturach jest możliwe, gdy niejednorodność jest typu  $k = k(ax + by)$ .

b. Obniżenie rzędu równania różniczkowego linii największego spadku jest możliwe, gdy niejednorodność jest typu  $k = k_0 e^w$  ( $w$  oznacza funkcję harmoniczną). Oczywiście w praktyce rzadko będziemy mieli do czynienia z taką niejednorodnością, ale przypadek ten będzie miał wtedy znaczenie, gdy będziemy mieli do czynienia z niejednorodnością, dającą się aproksymować właśnie za pomocą tego typu funkcji, które są zresztą dość szerokiej klasy.

## 5. Warunki brzegowe

Załóżmy, że znamy równanie linii największego spadku w postaci całki ogólnej (zawierającej dwie stałe całkowania) dla danego niejednorodnego obszaru  $D$ . Wobec tego dla każdej linii największego spadku musimy mieć dane dwa warunki brzegowe.

Niechaj na brzegu  $AB$  przekroju o równaniu  $x = x_1(t)$ ,  $y = y_1(t)$  dana jest wartość funkcji naprężeń  $\Phi = \Phi(t)$  ( $t$  jest parametrem konturu). Jakkolwiek w p. 2. stwierdziliśmy, że dla nieobciążonego brzegu przekroju funkcja naprężeń  $\Phi$  jest stała, to obecnie rozpatrzmy szerzej ten problem przyjmując, że funkcja  $\Phi$  na konturze zmienia się (rys. 3). Założenie to ułatwi nam później analizę problemu przy rozpatrywaniu materiałów skokowo niejednorodnych.



Rys. 3

Dla każdego punktu  $M$  na konturze, określonego parametrem  $t = t_M$ , możemy znaleźć pochodną  $d\Phi/dt$ . Jest rzeczą oczywistą, że musi zachodzić związek  $|d\Phi/dt|_M \leq$

$\leq |\text{grad } \Phi|$  (w przeciwnym razie problem byłby błędnie postawiony). Z analizy wektorowej wynika, że pochodna funkcji  $\Phi$  w dowolnym kierunku jest równa rzutowi  $|\text{grad } \Phi|$  na ten kierunek, a więc w naszym przypadku

$$(5.1) \quad \left[ \frac{d\Phi}{dt} \right]_M = |\text{grad } \Phi|_M \cos a_M.$$

W dalszych rozważaniach, w celu uproszczenia zapisu, pominięto indeks podkreślający, że warunki brzegowe są analizowane w punkcie  $M$  konturu. Na podstawie (5.1) możemy wyznaczyć kąt zawarty pomiędzy linią największego spadku funkcji  $\Phi$ , a styczną do konturu w punkcie  $M$ , mianowicie:

$$(5.2) \quad \cos a = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}{|\text{grad } \Phi|}$$

i dalej

$$(5.3) \quad \text{tg } a = \pm \sqrt{\frac{|\text{grad } \Phi|^2}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2} - 1}.$$

Ponieważ  $\varphi = \beta + a$ , więc współczynnik kierunkowy linii największego spadku określimy jako

$$(5.4) \quad \text{tg } \varphi = \text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta} = y';$$



ponieważ jednak

$$(5.5) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{dy_1/dt}{dx_1/dt}$$

oraz

$$(5.6) \quad |\operatorname{grad} \Phi| = k(x, y),$$

więc ostatecznie po przekształceniach znajdziemy

$$(5.7) \quad y'_M = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dy_1}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \sqrt{k^2(x, y) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2}}{\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dx_1}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \sqrt{k^2(x, y) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2}}.$$

Warunki brzegowe dla linii największego spadku będą wyglądać następująco:

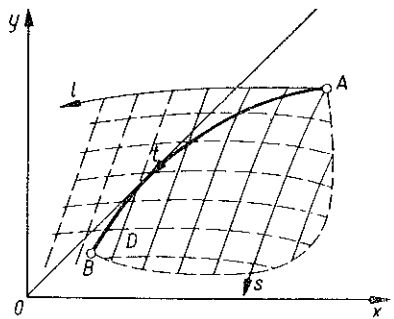
$$(5.8) \quad \text{dla } t = t_M \quad x = x_M, \quad y = y_M, \quad y' = y'_M.$$

Warunki te pozwalają na określenie obu stałych całkowania. W szczególności dla nieobciążonego konturu, tzn. gdy  $\Phi(t) = \text{const}$ , warunki ulegają uproszczeniu do postaci

$$(5.9) \quad \text{dla } t = t_M \quad x = x_M, \quad y = y_M, \quad y' = -\frac{dx_1/dt}{dy_1/dt}.$$

### 6. Określenie funkcji naprężeń

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy z układu współrzędnych krzywoliniowych  $s, l$ . W układzie tym jedna rodzina krzywych  $l = \text{const}$  jest rodziną linii największego spadku, natomiast druga rodzina krzywych  $s = \text{const}$  jest dowolną rodziną krzywych, dobraną oddzielnie dla każdego zadania tak, aby można było rozwiązać je w jak najbardziej dogodny sposób (rys. 4). Może to być np. rodzina prostych  $s = x = \text{const}$ . Na ogół rodziny te przecinając się tworzą siatkę współrzędnych nieortogonalną. Współrzędne te muszą jednoznacznie opisywać rozważany obszar pręta skręcanego. Funkcję naprężeń  $\Phi$  w rozpatrywanym obszarze łatwo określimy, jeżeli znamy funkcję niejednorodności materiału  $k = k(x, y)$ , linie największego spadku w postaci całek ogólnych oraz warunki brzegowe.



Rys. 4

Przedstawimy linie największego spadku w formie parametrycznej (po uwzględnieniu warunków brzegowych) jako rodzinę krzywych

$$(6.1) \quad x = x(s, l), \quad y = y(s, l).$$

Parametr  $l$  będzie przy tym wyznaczał krzywą, natomiast  $s$  poszczególne punkty tej krzywej. W dalszym ciągu rozważań poszukiwać będziemy funkcji naprężeń  $\Phi$  w zależności od parametrów  $s$  i  $l$ .

Do określenia funkcji  $\Phi$  wykorzystamy wzór (3.2), który wyraża, że przyrost funkcji naprężeń na liniach największego spadku jest proporcjonalny do  $|\text{grad } \Phi| = k(x, y)$  oraz przyrostu długości linii największego spadku:

$$\left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = k(x, y).$$

Po przedstawieniu niejednorodności w formie  $k(x, y) = k[x(s, l), y(s, l)]$  wyrażenie na przyrost wartości funkcji  $\Phi$  wzdłuż linii największego spadku możemy napisać w postaci

$$(6.2) \quad \Phi(P) - \Phi(M) = \int_M^P k[x(s, l_M), y(s, l_M)] dm,$$

gdzie  $l_M$  jest ustaloną wartością parametru  $l$  dla danej linii największego spadku. Oczywiście zależność ta słuszna jest w przypadku, gdy w rozpatrywanym obszarze nie mamy do czynienia z liniami nieciągłości. W najprostszym przypadku, jeżeli mamy do czynienia z konturem nieobciążonym obszaru jednorodnego, to przyjmujemy dla prostoty  $\Phi_{(M)} = 0$  na konturze i otrzymujemy

$$(6.3) \quad \Phi(P) = \int_M^P k[x(s, l_M), y(s, l_M)] dm.$$

Ponieważ linie największego spadku są liniami  $l = \text{const}$ , więc elementarna długość łuku linii największego spadku określona będzie znanym wzorem

$$(6.4) \quad dm = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} ds.$$

## 7. Linie nieciągłości

Na ogół możemy mieć do czynienia z dwoma typami nieciągłości występującymi przy rozpatrywaniu problemu plastycznego skręcania prętów niejednorodnych, mianowicie:

a) nieciągłości wynikłe z samego charakteru równania (2.1);

b) nieciągłości wynikłe ze skokowej niejednorodności materiału, tzn. skoku granicy plastyczności lub skoku pochodnych granicy plastyczności.

**7.1.** Zajmiemy się obecnie bliżej niejednorodnością typu a). Załóżmy, że mamy do czynienia z plastycznym skręcaniem pręta niejednorodnego (funkcja niejednorodności klasy  $C^1$ ), nieobciążonego na powierzchni bocznej o przekroju przedstawionym na rys. 5. Poszukiwanie funkcji naprężeń  $\Phi$  jest jednoznaczne z poszukiwaniem powierzchni wzgórza piaskowego, usypanego na danym obszarze przekroju z piasku o zmiennym kącie zsypu. Zmiennosc kąta zsypu piasku odpowiada niejednorodności materiału  $k(x, y)$ . Załóżmy, że w pewnym podobszarze  $D$  pręta będzie istniała linia nieciągłości [odpowiadająca rzutowi grzbietu wzgórza piaskowego na płaszczyznę  $(x, y)$  przekroju]. Linia ta będzie więc rzutem linii przecięcia się dwu powierzchni:  $\Phi_1(s_1, l_1)$  i  $\Phi_2(s_2, l_2)$ , przechodzących przez przeciwległe odcinki konturu.

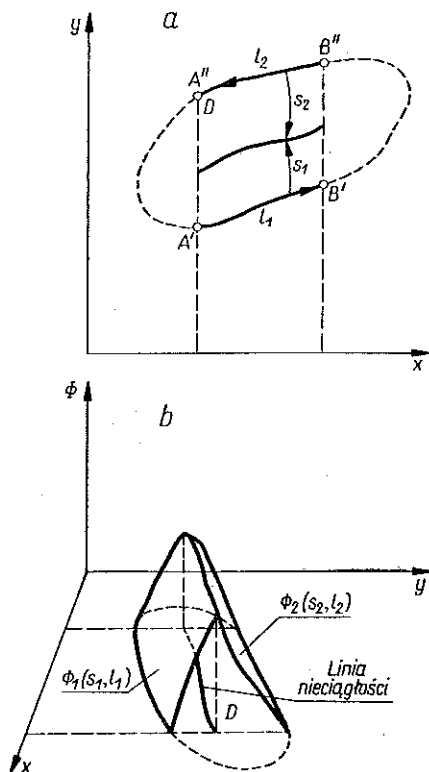
Linie nieciągłości określimy z porównania obu funkcji naprężeń oraz współrzędnych dwu rodzin linii największego spadku:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \Phi_1(s_1, l_1) &= \Phi_2(s_2, l_2), \\ x_1(s_1, l_1) &= x_2(s_2, l_2), \\ y_1(s_1, l_1) &= y_2(s_2, l_2), \end{aligned}$$

gdzie  $x_1(s_1, l_1)$ ,  $y_1(s_1, l_1)$  oraz  $x_2(s_2, l_2)$ ,  $y_2(s_2, l_2)$  są rodzinami linii największego spadku odpowiadającymi częściom  $A'B'$  i  $A''B''$  konturu obszaru  $D$ . Mamy tutaj do czynienia z układem trzech równań o czterech niewiadomych  $s_1, s_2, l_1$  i  $l_2$ . Jedną z tych niewiadomych przyjmujemy jako parametr zmienny, np.  $l_1$ , pozostałe obliczamy, a więc  $s_1 = s_1(l_1)$ ,  $s_2 = s_2(l_1)$ ,  $l_2 = l_2(l_1)$ . Po całkowitym rozwiązaniu układu równań (7.1) możemy napisać równanie linii nieciągłości w postaci

$$(7.2) \quad x_n = x_n(l_1), \quad y_n = y_n(l_1),$$

a funkcję naprężeń  $\Phi$  na liniach nieciągłości jako  $\Phi_n = \Phi_n(l_1)$ .



Rys. 5

7.2. Rozpatrzymy obecnie linie nieciągłości typu b), mianowicie wynikłe ze skokowej niejednorodności materiału.

Założmy, że mamy do czynienia z materiałem niejednorodnym typu

$$(7.3) \quad k = \begin{cases} k_1(x, y) & \text{dla obszaru } D_1, \\ k_2(x, y) & \text{dla obszaru } D_2, \end{cases}$$

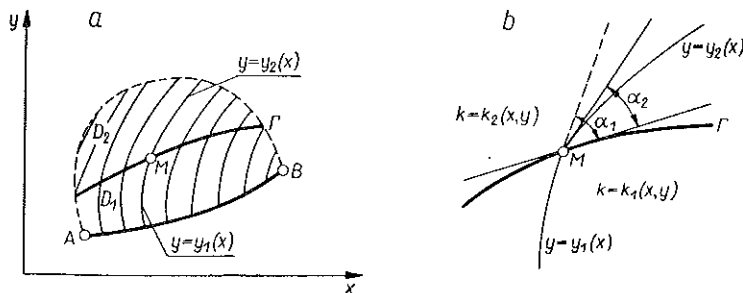
przy czym na linii nieciągłości  $\Gamma$  zachodzą warunki

$$[k_1(x, y)]_{\Gamma} = [k_2(x, y)]_{\Gamma}$$

oraz

$$\left[ \frac{\partial k_1}{\partial x} \right]_{\Gamma} \neq \left[ \frac{\partial k_2}{\partial x} \right]_{\Gamma}, \quad \left[ \frac{\partial k_1}{\partial y} \right]_{\Gamma} \neq \left[ \frac{\partial k_2}{\partial y} \right]_{\Gamma}.$$

Zakładamy dalej, że linia nieciągłości  $\Gamma$  nie leży zbyt daleko od konturu  $AB$ , tak że znajduje się przed linią nieciągłości typu a. Ponieważ na odcinku konturu  $AB$  przekroju dane są warunki brzegowe, więc w obszarze  $D$  można określić linie największego spadku  $y_1(x)$  zgodnie z równaniem różniczkowym (3.9) i warunkami brzegowymi (5.9). Na granicy  $\Gamma$  linie największego spadku  $y_1(x)$  przejdą w linie  $y_2(x)$  (rys. 6a).



Rys. 6

Rozpatrzmy przykładowo przejście  $y_1(x)$  w  $y_2(x)$  w punkcie  $M$  na linii nieciągłości  $\Gamma$ . Ponieważ dla punktu  $M$  zachodzi  $[k_1]_M = [k_2]_M$ , to z ciągłości funkcji  $\Phi$  na linii  $\Gamma$  (która warunkuje równocześnie równanie  $d\Phi_1/dt = d\Phi_2/dt$ ) wynika, że pierwsze pochodne linii największego spadku  $y'_1(x)$  i  $y'_2(x)$  są sobie równe. Na podstawie analizy równania różniczkowego linii największego spadku (3.9) można stwierdzić, że na granicy  $\Gamma$  na ogół nie są ciągłe drugie pochodne linii największego spadku, tzn.  $y''_1 \neq y''_2$ .

Drugim przypadkiem nieciągłości skokowej jest nieciągłość typu

$$k = \begin{cases} k_1(x, y) & \text{dla obszaru } D_1, \\ k_2(x, y) & \text{dla obszaru } D_2, \end{cases}$$

przy czym zachodzi  $[k_1(x, y)]_{\Gamma} \neq [k_2(x, y)]_{\Gamma}$ . Pozostałe założenia jak dla przypadku poprzedniego.

Z warunku ciągłości funkcji  $\Phi$  na granicy  $\Gamma$  oraz z warunku nieciągłości  $[k_1(x, y)]_{\Gamma} \neq [k_2(x, y)]_{\Gamma}$  wynika, że linia największego spadku w rozpatrywanym punkcie  $M$  ma nieciągłe pochodne tak pierwszego jak i drugiego rzędu, tzn.

$$[y'_1]_M \neq [y'_2]_M \text{ oraz } [y''_1]_M \neq [y''_2]_M.$$

Dla tego przypadku (rys. 6b) łatwo można w oparciu o zależność (5.2) określić zmianę współczynnika kierunkowego linii największego spadku

$$\cos \alpha_1 = \frac{d\Phi/dt}{|\text{grad } \Phi_1|}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{d\Phi/dt}{|\text{grad } \Phi_2|}.$$

Po wyrugowaniu  $d\Phi/dt$  otrzymujemy

$$\cos \alpha_2 = \frac{|\text{grad } \Phi_1|}{|\text{grad } \Phi_2|} \cos \alpha_1 = \frac{k_1}{k_2} \cos \alpha_1.$$

W punkcie tym nie rozpatrywano dokładnie różnych specyficznych położenia linii nieciągłości  $\Gamma$ . Różne przypadki rozważał szczegółowo J. RYCHLEWSKI w pracy [12], przy założeniu, że  $k_1(x, y) = k_1 = \text{const}$  i  $k_2(x, y) = k_2 = \text{const}$  oraz  $k_1 \neq k_2$ . Dla tego szczegółowego przypadku linie największego spadku będą oczywiście liniami prostymi.

### 8. Moment graniczny

Po określeniu linii największego spadku, linii nieciągłości oraz funkcji naprężeń  $\Phi$  w całym rozpatrywanym obszarze możemy dalej przejść do obliczania momentu skręcającego potrzebnego do uplastycznienia danego przekroju. Określenie tego momentu jest podobne jak dla prętów wykonanych z materiału jednorodnego. Moment graniczny jest określony wzorem

$$(8.1) \quad \bar{M} = 2 \iint_F \Phi \, dF,$$

identycznym z odpowiednim wzorem dla prętów jednorodnych.

Ponieważ jednak funkcję  $\Phi$  określamy zgodnie z (6.3) na liniach największego spadku jako  $\Phi = \Phi(s, l)$  oraz linie największego spadku dane są najczęściej w formie parametrycznej  $x = x(s, l)$ ,  $y = y(s, l)$ , przeto celowe będzie wykonanie całkowania we współrzędnych  $s, l$ . W tym celu obliczamy

$$(8.2) \quad dF = |J| \, ds \, dl = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial l} \end{array} \right| \, ds \, dl.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (8.1) otrzymujemy wzór ostateczny, przydatny do określenia nośności granicznej niejednorodnego pręta skręcanego:

$$(8.3) \quad \bar{M} = 2 \iint_F \Phi(s, l) \left| \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial x}{\partial s} \right| \, ds \, dl.$$

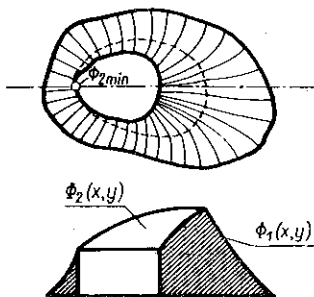
Należy jednak zaznaczyć, że w obszarze  $F$  nie istnieje z reguły jeden układ gładki  $s, l$ .

### 9. Obszary wielospójne

Pręty wielospójne są przypadkiem szczególnym prętów o skokowej niejednorodności, mianowicie otwór odpowiada wkładce wykonanej z materiału o granicy plastyczności  $k = 0$  [2 i 12]. W związku z powyższym wzór (8.3) ma zastosowanie w całym obszarze łącznie z otworami. W obecnym rozdziale przedstawiono sposób rozwiązywania problemu plastycznego skręcania prętów wielospójnych na przykładzie pręta dwuspójnego (rys. 7). Z warunków brzegowych nieobciążonych powierzchni bocznych pręta wiemy, że funkcja naprężeń na brzegach przekroju ma wartość stałą. Dla brzegu zewnętrznego przyjmuje się z reguły  $\Phi = 0$ . Wobec tego

przyjęcia wartości funkcji naprężeń na nieobciążonych brzegach wewnętrznych będą stałe, ale oczywiście różne od 0.

Wartość funkcji naprężeń  $\Phi$  na brzegu wewnętrznym łatwo znajdziemy, jeżeli posłużymy się nieco zmodyfikowaną analogią wzgórza piaskowego Sadowsky'ego [13]. W naszym przykładzie przez brzeg zewnętrzny przekroju przeprowadzamy zgodnie z wyżej stosowanym postępowaniem powierzchnię  $\Phi_1$  (przy uwzględnieniu warunku, że  $\Phi_1=0$  na brzegu zewnętrznym). Łatwo określić dalej wartość funkcji  $\Phi_1$  na konturze wewnętrznej, która to wartość będzie oczywiście różna w różnych punktach konturu wewnętrznego. Następnie na konturze wewnętrznej określamy minimalną wartość funkcji  $\Phi = \Phi_{1 \min}$ . — będzie to zarazem wartość funkcji  $\Phi$  na całym konturze wewnętrznej. Przeprowadzamy następnie przez kontur wewnętrzny powierzchnię  $\Phi_2$  przy warunku brzegowym  $\Phi_2 = \Phi_{1 \min} = \text{const}$  na brzegu wewnętrznym. Dalej szukamy linii nieciągłości naprężeń, porównując wartości funkcji naprężeń  $\Phi_1 = \Phi_2$  oraz współrzędne punktów przecięcia się dwu rodzin linii największego spadku — rodziny  $x_1(s_1, l_1), y_1(s_1, l_1)$ , przechodzącej przez kontur zewnętrzny i rodziny linii  $x_2(s_2, l_2), y_2(s_2, l_2)$  przechodzących przez kontur wewnętrzny (jak z tego widać znajdowanie linii nieciągłości jest tutaj zupełnie podobne jak w p. 7).



Rys. 7

Po określenie w rozpatrywanym przekroju funkcji naprężeń na liniach największego spadku oraz linii nieciągłości otrzymujemy wzór na nośność graniczną, podobny do wzoru analogicznego dla prętów jednorodnych:

$$(9.1) \quad \bar{M} = 2 \int \int_F \Phi(s, l) \left| \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial x}{\partial s} \right| ds dl + 2F_0 \Phi_{1 \min},$$

gdzie  $F_0$  oznacza powierzchnię otworu pręta.

## 10. Określenie spaczenia przekroju

W rozdziałach obecnym i następnym zostaną przedstawione związki określające deformację przekroju pręta. Wzory analogiczne, dotyczące plastycznego skręcania prętów jednorodnych zostały wyprowadzone przez J. MANDELA [8]. W. PRAGER i P. G. HODGE w swej książce [10] podają za pracę [8] sposób określania deformacji przekroju pręta wykonanego z materiału jednorodnego. Problem plastycznego skręcania prętów niejednorodnych różni się od problemu skręcania prętów jednorodnych tym, że linie największego spadku są liniami krzywymi (a nie prostymi). Jakkolwiek wzory końcowe są pozornie identyczne, to jednak sens ich jest nieco inny.

Po określeniu rozkładu naprężeń w skręcanym plastycznie przecie niejednorodnym przez znalezienie linii największego spadku (czy to w postaci  $y = y(x)$ , czy też w postaci parametrycznej  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ) możemy przejść do określania przemieszczeń, a w szczególności spaczenia przekroju  $w$ .

Przy skręcaniu pręta pryzmatycznego zakłada się, że przemieszczenia w płaszczyźnie przekroju  $x, y$  można przedstawić wzorami

$$(10.1) \quad u = \theta yz, \quad v = -\theta xz,$$

a przemieszczenie w kierunku osi pręta (spaczenie przekroju) można wyrazić w postaci nieznannej funkcji

$$(10.2) \quad w = w(x, y).$$

Wykorzystując podane zależności możemy określić interesujące nas odkształcenia

$$(10.3) \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Po rozpisaniu prawa zmiany postaci Hencky'ego-Iliuszyna (lub też Levy'ego-Misesa przy rozważaniu prędkości odkształceń) otrzymujemy następujący układ równań:

$$(10.4) \quad \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x}}{2} = \varphi \tau_{zx}, \quad \frac{\gamma_{zy}}{2} = \frac{-\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y}}{2} = \varphi \tau_{zy}.$$

Po wyrugowaniu niewiadomej  $\varphi$  oraz uwzględnieniu, że zgodnie z rys. 8

$$(10.5) \quad \frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = -y' = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

otrzymujemy jedno równanie o niewiadomej funkcji  $w$ :

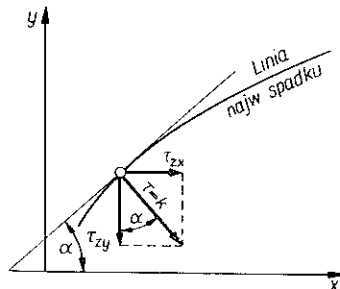
$$(10.6) \quad \vartheta (x \sin \alpha - y \cos \alpha) = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha.$$

Wyrażenie po stronie prawej tego równania można krótko napisać jako  $dw/dm$ , tzn. pochodną kierunkową funkcji spaczenia po linii największego spadku. Po formalnym pomnożeniu równania przez  $dm$  otrzymamy zależność

$$(10.7) \quad dw = \vartheta (x dy - y dx).$$

Jeżeli w pewnym punkcie  $R$  dana jest wartość funkcji spaczenia  $w(x_R, y_R)$ , to spaczenie na linii największego spadku, na której leży punkt  $R$ , możemy określić całkując równanie (10.7) wzdłuż tej linii (całka krzywoliniowa):

$$(10.8) \quad w_{(P)} - w_{(R)} = \vartheta \int_R^P (x dy - y dx).$$



Rys. 8

Jeżeli linia największego spadku dana jest w formie parametrycznej  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , to przemieszczenie na linii największego spadku przyjmie postać

$$(10.9) \quad w_{(P)} - w_{(R)} = \vartheta \int_R^P [x(s) y'(s) - y(s) x'(s)] ds.$$

Ponieważ przy całkowitym uplastycznieniu pręta kąt jednostkowy skręcenia  $\vartheta$  rośnie do nieskończoności, więc także i funkcja spaczenia będzie rosła nieograniczenie. Okazuje się jednak, że podobnie jak przy skręcaniu prętów jednorodnych wyrażenie  $w/\vartheta$  ma wartość skończoną:

$$(10.10) \quad \frac{w_{(P)} - w_{(R)}}{\vartheta} = \int_R^P [x(s) y'(s) - y(s) x'(s)] ds.$$

Jeżeli będziemy mieli do czynienia z przekrojem mającym oś symetrii, to jest rzeczą oczywistą że na osi symetrii, podobnie jak w przypadku prętów jednorodnych, wartość funkcji spaczenia

jest równa zero (przez symetrię rozumiemy tutaj tak symetrię kształtu jak o niejednorodności). Z tej właściwości prętów symetrycznych można określić przemieszczenia wszystkich linii największego spadku, przecinających oś symetrii, przyjmując, że punkty  $R$  dla poszczególnych linii leżą na osi symetrii i dalej  $w_{(R)} = 0$ .

### 11. Przemieszczenia linii nieciągłości naprężeń

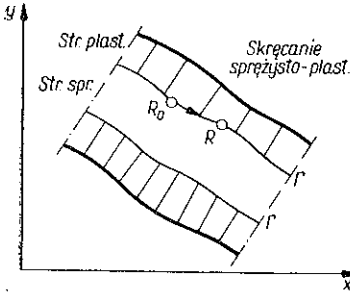
W punkcie poprzednim wyprowadzony został wzór (10.10), przy którego użyciu możemy znaleźć przemieszczenie dowolnego punktu  $P$  przekroju, leżącego na linii największego spadku, jeżeli znane jest przemieszczenie innego punktu np.  $R$ , leżącego na tej samej linii. Wynika stąd, że jeżeli chcemy określić spaczenie całego przekroju, to musimy znać przemieszczenie choćby jednego punktu każdej linii największego spadku. Warunek ten byłby spełniony, gdybyśmy znali przemieszczenia linii nieciągłości naprężeń.

Gdy będziemy rozpatrywali sprężysto-plastyczne skrećanie prętów, to dla strefy sprężystej zachodzi związek

$$(11.1) \quad \frac{\tau_{zx}}{G} = \vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\tau_{zy}}{G} = -\vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Jeżeli badać będziemy przemieszczenia na linii  $\Gamma$  rozgraniczającej strefy sprężystą i plastyczną, to oznaczając element długości tej linii przez  $d\gamma$ , możemy napisać

$$(11.2) \quad \frac{dw}{d\gamma} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\gamma} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{d\gamma}.$$



Rys. 9

Po podstawieniu do (11.2) funkcji (11.1) otrzymamy

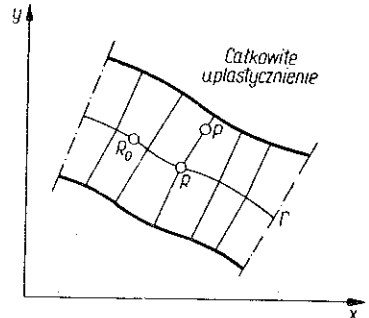
$$(11.3) \quad \frac{dw}{d\gamma} = \vartheta \left( x \frac{dy}{d\gamma} - y \frac{dx}{d\gamma} \right) + \frac{1}{G} \left( \tau_{zx} \frac{dx}{d\gamma} + \tau_{zy} \frac{dy}{d\gamma} \right).$$

Jeżeli przyjmiemy, że dane jest przemieszczenie w pewnym punkcie  $R_0$  leżącym na linii granicznej  $\Gamma$ , to w punkcie  $R$ , leżącym na tej samej granicy (rys. 9), przemieszczenie  $w(R)$  znajdziemy całkując (11.3) wzdłuż granicy  $\Gamma$ , w wyniku czego otrzymujemy

$$(11.4) \quad \frac{w(R) - w(R_0)}{\vartheta} = \int_{R_0}^R (x dy - y dx) + \frac{1}{G\vartheta} \int_{R_0}^R (\tau_{zx} dy + \tau_{zy} dx).$$

Jeżeli wartość momentu  $M \rightarrow \bar{M}$ , to obszar sprężysty maleje do zera, linie międzystrefowe przechodzą w linie nieciągłości naprężeń, wartość  $1/G\vartheta \rightarrow 0$  i ostatecznie wartość przemieszczenia punktu  $R$ , leżącego na linii nieciągłości, możemy określić za pomocą wzoru

$$(11.5) \quad \frac{w(R) - w(R_0)}{\vartheta} = \int_{R_0}^R (x dy - y dx).$$



Rys. 10

Wartość  $w(R_0)$  możemy dla jakiegokolwiek punktu, leżącego na linii nieciągłości naprężeń przyjąć dowolnie. Różne przyjęcie powoduje otrzymanie wyników różniących się między sobą pewnym



sztynym przemieszczeniem powierzchni spaczenia (przesunięciem i obrotem). Otrzymany wzór (11.5), określający przemieszczenia na linii nieciągłości naprężeń, jest identyczny ze wzorem dla pręta jednorodnego (należy tutaj jednak jeszcze raz zaznaczyć, że linie nieciągłości będą w obu wypadkach różne).

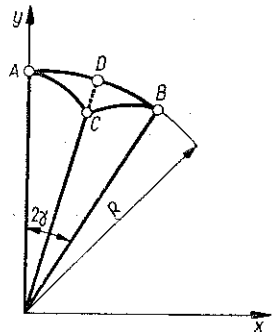
Wzory (10.10) i (11.5) łącznie pozwolą nam na całkowite określenie spaczenia przekroju pręta (rys. 10).

12. Przykład

Rozpatrzone szczegółowo problem plastycznego skręcania pręta o przekroju przedstawionym na rys. 11, który został wykonany z materiału niejednorodnego, przy czym niejednorodność zależna jest w sposób wykładniczy tylko od odległości od punktu o współrzędnych (0, 0):

$$(12.1) \quad k = k_0 e^{\alpha(x^2+y^2)}.$$

Przyjęty kształt przekroju pozwoli na rozpatrywanie połowy przekroju, ponieważ dla danego przekroju oś OD jest osią symetrii tak kształtu, jak i niejednorodności. Ponieważ w obszarze ACD niejednorodność zależna jest tylko od odległości od konturu ADB, przeto można z góry stwierdzić na podstawie [7 i 12], że w tym obszarze linie największego spadku funkcji naprężeń będą liniami prostymi, co w dalszym ciągu uprości nam obliczenia.



Rys. 11

W obecnym punkcie rozpatrzone będą wszystkie zagadnienia dotyczące problemu plastycznego skręcania prętów niejednorodnych, a więc określanie linii największego spadku funkcji naprężeń  $\Phi$ , określanie samej funkcji naprężeń, określanie linii nieciągłości naprężeń, określanie nośności granicznej przekroju oraz określanie spaczenia przekroju.

12.1. Określenie linii największego spadku. Równanie linii największego spadku dla dowolnej niejednorodności określone zostało wzorem (3.9):

$$y' \frac{\partial (\ln k)}{\partial x} - \frac{\partial (\ln k)}{\partial y} = - \frac{y''}{[1+(y')^2]}.$$

Dla naszego przykładu szukać będziemy linii największego spadku w postaci szeregu potęgowego (a więc w sposób przybliżony), ponieważ, jak wynika z analizy przeprowadzonej w p. 4, ściśle rozwiązanie równania różniczkowego (3.9) dla założonej niejednorodności (12.1) jest na ogół niemożliwe. Linie największego spadku przedstawimy ogólnie w postaci szeregu

$$(12.2) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Ponieważ równanie różniczkowe (3.9) jest rzędu drugiego, więc dwie stałe całkowania w powyższym szeregu zostaną określone z warunków brzegowych, pozostałe zaś otrzymamy rozwiązując równanie (3.9) metodą współczynników nieokreślonych.

Po wykonaniu tych działań otrzymujemy

$$(12.3) \quad \begin{aligned} a_2 &= a_0 (1 + a_1^2) a, \\ a_3 &= \frac{4}{3} a_0^2 (1 + a_1^2) a_1 a^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Rozpatrzmy obecnie szczegółowo warunki brzegowe dla poszczególnych konturów przekroju.

Dla odcinka  $ADB$  konturu warunki brzegowe dla linii największego spadku wyglądają następująco: dla  $x = x_0$

$$y = y_0, \quad y' = \frac{y_0}{x_0}.$$

Jeżeli warunki te uwzględnimy w rozwiniętym równaniu linii największego spadku (12.2), to łatwo znajdziemy, że  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = y_0/x_0$  oraz że pozostałe współczynniki  $a_2, a_3, \dots$  będą równe zeru. Wobec tego, równanie linii największego spadku w obszarze  $ACB$  można napisać w postaci

$$y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

W dalszych obliczeniach korzystne jest przyjęcie zamiast współrzędnych  $x, y$  współrzędne  $s, l$  takie, że

$$(12.4) \quad x = (R - s) \cos l, \quad y = (R - s) \sin l;$$

wtedy odcinek  $AB$  konturu przekroju w nowych współrzędnych określimy w sposób następujący:

$$s = 0, \quad l_A \geq l \geq l_D,$$

równania zaś linii największego spadku w obszarze  $ABC$  mają postać  $l = l_0$ .

Dla odcinka  $OA$  konturu przekroju warunki brzegowe dla linii największego spadku będą następujące: dla  $x = 0$

$$y = y_0, \quad y' = 0,$$

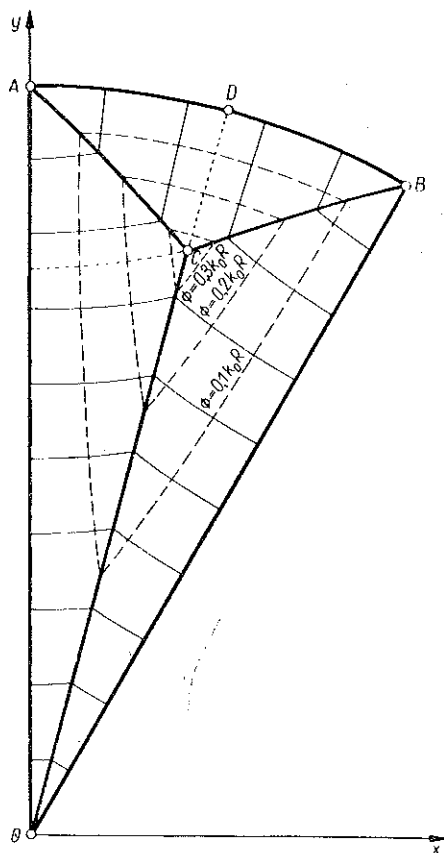
a współczynniki szeregu (12.2) będą równe

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0, & a_1 &= a_3 = a = \dots = a_{2n+1} = 0 \\ a_2 &= y_0 a, & a_4 &= \frac{1}{6} a y_0 (1 - 4a y_0^2), & a_6 &= \dots \end{aligned}$$

Równanie rodziny linii największego spadku, zgodnie z zapisem stosowanym w p. 6 możemy, przyjmując  $y_0 = l$ ,  $x = s$ , napisać w postaci (6.1)

$$(12.5) \quad \begin{aligned} x &= s, \\ y &= 1 + a l s^2 + \frac{a^2 l}{6} (4a l^2 - 1) s^4 + \frac{a^3 l}{15} \left( -\frac{1}{2} + \frac{10}{3} a l^2 + \frac{32}{3} a^2 l^4 \right) s^6 + \dots \end{aligned}$$

Liniami największego spadku będą krzywe  $l = l_0$ , natomiast druga rodzina krzywych  $s = s_0$ , to linie proste  $x = x_0$ . Jak widać na tym przykładzie, dobór siatki współrzędnych był tak przeprowadzony, aby późniejsze obliczenia były jak najprostsze. Układ współrzędnych  $s$  i  $l$  nie jest w tym przypadku układem ortogonalnym.



Rys. 12

W obszarze  $OCB$  na skutek istniejącej symetrii linie największego spadku będą zwierciadlanym odbiciem powyżej rozpatrywanych linii w obszarze  $ACO$ , więc nie będziemy przeprowadzali ich osobnej analizy.

Na rys. 12 przedstawiono charakter linii największego spadku funkcji  $\Phi$ .

**12.2. Określenie funkcji naprężeń  $\Phi$ .** Funkcję naprężeń  $\Phi$  będziemy określać zgodnie z rozważaniami p. 6.

Ponieważ powierzchnia boczna pręta jest nieobciążona, więc musimy posłużyć się wzorem (6.3)

$$\Phi(P) = \int_M^P k [x(s, l_M), y(s, l_M)] dm.$$

Dla obszaru  $ABC$  funkcja niejednorodności w układzie współrzędnych  $s, l$  ma postać

$$k = k_0 e^{\alpha(R-s)^2},$$

przy czym

$$dm = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} ds = ds.$$

Wobec tego

$$\Phi(s, l_M) = \int_0^s k_0 e^{\alpha(R-\xi)^2} d\xi = \Phi(s).$$

Jeżeli funkcję podcałkową rozwiemy w szereg potęgowy w punkcie  $s=0$  oraz wykonamy całkowanie, to otrzymamy wyrażenie na funkcję  $\Phi$  w obszarze  $ABC$ :

$$(12.6) \quad \Phi = k_0 e^{\alpha R^2} \left( 1 - \alpha R s + \frac{2\alpha^2 R^2 + \alpha}{3} s^2 + \frac{2\alpha^3 R^3 - 3\alpha^2 R}{6} s^3 + \dots \right) s.$$

Funkcja  $\Phi$  w obszarze  $ABC$  jest funkcją tylko zmiennej  $s$  (tzn. odległości od konturu), co zresztą łatwo było przewidzieć.

Dla obszaru  $ACO$  funkcja niejednorodności dla warunku plastyczności będzie miała postać

$$k(s, l) = k_0 e^{\alpha l^2} e^{\alpha [s^2(1+2\alpha l^2) + \dots]},$$

ponieważ do (12.1) podstawiono wyrażenie (12.5), określające rodzinę linii największego spadku w obszarze  $ACD$ .

Element długości łuku linii największego spadku  $dm$  jest w tym obszarze równy

$$dm = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} ds = (1 + 2\alpha^2 l^2 s^2 + \dots) ds.$$

Jeżeli podstawimy do (6.3) powyższe wyrażenia odnoszące się do obszaru  $ACO$ , jeżeli rozwiemy dalej wyrażenie podcałkowe w szereg potęgowy wg zmiennej  $s$  względem punktów  $s=0$  i wykonamy całkowanie, to otrzymamy wyrażenie na funkcję naprężeń  $\Phi$  dla obszaru  $ACO$

$$(12.7) \quad \Phi = \Phi(s, l) = k_0 e^{\alpha l^2} s \left( 1 + \frac{4\alpha l^2 + 1}{3} \alpha s^2 + \dots \right).$$

**12.3. Określenie linii nieciągłości naprężeń.** Jak już uprzednio zaznaczono, oś symetrii przekroju na odcinku  $OC$  będzie zarazem linią nieciągłości naprężeń, więc wyznaczanie tej linii nieciągłości jest zbędne. Dlatego w punkcie niniejszym zajmiemy się tylko wyznaczeniem odcinka linii nieciągłości  $AC$ . Przy wyznaczaniu tej linii oprzemy się na rozważaniach p. 7 i wykorzystamy w tym celu warunki (7.1). Wprowadzamy obecnie wskaźniki odróżniające parametry  $s, l$  dla dwu rozpatrywanych obszarów: w obszarze  $ADC$  odpowiednio oznaczmy je  $s_1, l_1$ , natomiast w obszarze  $ACO$  —  $s_2, l_2$  (indeksy odróżniające parametry  $s, l$  w rozważanych prze-

działach zostały wprowadzone tylko przy określaniu linii nieciągłości ze względu na wyrazistość wzorów przy innych rozważaniach). Warunki (7.1) przyjmą teraz postać

$$(12.8) \quad k_0 e^{\alpha l_2^2} s_2 \left( 1 + \frac{4al_2^2 + 1}{3} \alpha s_2^2 + \dots \right) = k_0 e^{\alpha R^2} s_1 \left( 1 - \alpha R s_1 + \frac{2a^2 R^2 + a}{3} s_1^2 + \dots \right)$$

$$s_2 = (R - s_1) \cos l_1,$$

$$l_2 + \alpha s_2^2 l_2 + \frac{\alpha^2 l}{6} (4al_2^2 - 1) s_2^4 + \dots = (R - s_1) \sin l_1.$$

Jeżeli rozwiążemy ten układ równań, to możemy określić linię nieciągłości naprężeń w parametrycznej postaci, uzależniając  $x$  i  $y$  np. od parametru  $s_2$ :

$$x = x(s_2), \quad y = y(s_2).$$

Ponieważ jednak rozwiązanie tego układu równań jest w sposób ścisły niemożliwe, więc dalej ograniczono się do określenia metodą numeryczną współrzędnych punktu  $C$ , mianowicie przyjęto dalej, że kąt  $\gamma = 15^\circ$  oraz  $k_{(0)} = k_{(R)}/2$ , tzn.  $a = 0,6931/R^2$ , wobec tego

$$x_C = 0,208R, \quad y_C = 0,778R,$$

linię zaś nieciągłości  $AC$  będziemy aproksymować odcinkiem paraboli  $y = ax^2 + bx + c$ , od której żądamy, aby przechodziła przez punkty  $A(O, R)$ ,  $C(x_C, y_C)$  oraz aby w punkcie  $A$  dzieliła kąt  $OAB$  na dwie równe części, tzn. aby w tym punkcie  $y' = -1$ . Jeżeli określimy w taki sposób parabolę, to jej równanie będzie miało postać

$$(12.9) \quad y = \frac{x_C + y_C - R}{x_C^2} x^2 - x + R = -0,3236 \frac{x^2}{R} - x + R.$$

Równanie to dla  $0 \leq x \leq x_C$  w sposób przybliżony będzie przedstawiało linię nieciągłości naprężeń  $AC$ .

Ograniczenie się w tym przypadku do aproksymowania linii nieciągłości parabolą drugiego stopnia nie będzie powodowało dużego błędu, ponieważ łuk  $AC$  jest stosunkowo krótki. Łatwo możemy określić linię nieciągłości  $AC$  z większą dokładnością, zwiększając ilość punktów znalezionych numerycznie na tej krzywej i aproksymując ją wielomianem wyższego stopnia.

**12.4. Określenie nośności granicznej pręta.** Dla określenia nośności granicznej przekroju posłużymy się dalej rozważaniami p. 8 i do obliczeń będziemy stosowali wzór (8.3)

$$\bar{M} = 2 \iint_F \Phi(s, l) \left[ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial x}{\partial s} \right] ds dl,$$

przy czym obszar przekroju podzielimy na cztery części:  $ADC$ ,  $ACO$ ,  $DBC$ ,  $BOC$ .

Ze względu na symetrię przekroju będziemy określali wartość momentu odpowiadającego tylko obszarom  $ADC$  i  $ACO$ .

Dla obszaru  $ACD$  mamy

$$(12.10) \quad \bar{M}_{ADC} = 2 \iint_{ACD} \Phi(s, l) (R-s) ds dl,$$

przy czym obszar  $ACD$  jest ograniczony:  $0 \leq s \leq \bar{s}$ ,  $75^\circ \leq l \leq 90^\circ$ .

Wartości  $\bar{s} = \bar{s}(l)$  określimy rozwiązując następujący układ równań

$$y = -0,3236 \frac{x^2}{R} - x + R, \quad x = (R-s) \cos l, \quad y = (R-s) \sin l.$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy:

$$\bar{s}(l) = \frac{1,545}{\cos^2 l} \left\{ \sin l + \cos l + 0,6472 \cos^2 l + [(\sin l + \cos l + 0,6472 \cos^2 l)^2 - 1,2944 \cos^2 l (\sin l + \cos l - 1 + 0,3236 \cos^2 l)]^{1/2} \right\} R.$$

Ponieważ funkcję  $\Phi = \Phi(s)$  w obszarze  $ACD$  przedstawiliśmy w postaci szeregu potęgowego (12.6) przeto możemy teraz wykonać całkowanie względem zmiennej  $s$  i w efekcie otrzymamy

$$\bar{M}_{ADC} = 2 \int_{75^\circ}^{90^\circ} k_0 e^{\alpha R^2} R^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{s}}{R} \right)^2 - \frac{1 + \alpha R^2}{3} \left( \frac{\bar{s}}{R} \right)^3 + \frac{2\alpha^2 R^4 + 4\alpha R^2}{12} \left( \frac{\bar{s}}{R} \right)^4 + \dots \right] dl.$$

Całkowanie względem zmiennej  $l$  ze względu na złożoną funkcję podcałkową wykonano metodami numerycznymi. W tym celu posłużono się wzorem Simpsona przy czym przedział  $75^\circ \leq l \leq 90^\circ$  podzielono na cztery części. Obliczony w ten sposób moment pochodzący od obszaru  $ADC$  jest równy

$$(12.11) \quad \bar{M}_{ADC} = 0,00655 k_0 R^3.$$

Analogicznie postępujemy przy określaniu momentu pochodzącego od obszaru  $ACO$ :

$$(12.12) \quad \bar{M}_{ACO} = 2 \iint_{ACO} \Phi(s, l) [1 + as^2 + \dots] ds dl,$$

przy czym obszar  $ACO$  jest ograniczony:  $0 \leq s \leq \bar{s}$ ,  $0 \leq l \leq R$ , gdzie wartość garnicy  $s(l)$  jest określona przez rozwiązanie odpowiednich równań.

Dla  $0 \leq l \leq l_C$  (parametr  $l_C$  odpowiada linii największego spadku przechodzącej przez punkt  $C$ ) wartość  $s$  określimy rozwiązując układ równań

$$y = ax = 3,73x,$$

$$x = \bar{s},$$

$$y = l + a\bar{s}^2 l + \frac{a^2 l}{6} (4al^2 - 1) \bar{s}^4 + \dots$$

Równanie pierwsze jest równaniem osi symetrii ( $a = \operatorname{tg} 75^\circ = 3,73$ ). Stąd mamy

$$(12.13) \quad \bar{s} = \bar{s}(l) = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4al^2}}{2al},$$

jeżeli ograniczymy się do dwu wyrazów szeregu  $y = y(\bar{s}, l)$ .

Dla przedziału  $l_C \leq l \leq R$  wartość  $s$  określamy rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} y &= -0,3236 \frac{x^2}{R} - x + R, \\ x &= \bar{s}, \\ y &= l + a\bar{s}^2 l + \frac{a^2 l}{6} (4al^2 - 1)\bar{s}^4 + \dots \end{aligned}$$

Równanie pierwsze jest to równanie linii nieciągłości  $AC$ . Skąd w wyniku analogicznego ograniczenia, jak powyżej, otrzymujemy

$$(12.14) \quad \bar{s}(l) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \left(1 - \frac{l}{R}\right) (alR + 0,3236)}}{2(alR + 0,3236)} R.$$

Po scałkowaniu funkcji określającej moment  $\bar{M}_{ACO}$  względem zmiennej  $s$  otrzymujemy

$$\bar{M}_{ACO} = 2 \int_0^R k_0 e^{\alpha l^2} R^2 \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{s}}{R}\right)^2 + \frac{al^2 + 1}{3} \left(\frac{\bar{s}}{R}\right)^4 + \dots \right] dl.$$

Całkowanie podług parametru  $l$  przeprowadzone zostało numerycznie przy wykorzystaniu wzoru Simpsona, przy czym obszar  $0 \leq l \leq l_C$  podzielono na osiem części, natomiast obszar  $l_C \leq l \leq R$  na cztery części. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano

$$(12.15) \quad \bar{M}_{ACO} = 0,02088 k_0 R^3.$$

Ze względu na to, że rozpatrywano tylko połowę przekroju, nośność graniczna na skręcanie całego przekroju wynosi

$$(12.16) \quad \bar{M} = 2(\bar{M}_{ADC} + \bar{M}_{ACO}) = 2(0,00655 + 0,02088) k_0 R^3 = 0,05486 k_0 R^3.$$

W celach porównawczych rozwiązano przypadek plastycznego skręcania pręta o przekroju (rys. 11), jednakże wykonanego z materiału jednorodnego o granicy plastyczności na ścinanie równej  $k$ . W wyniku otrzymano, że moment graniczny  $M = 0,03486 kR^3$ .

Jeżeli przyjmiemy, że granica plastyczności  $k$  równa jest minimalnej granicy plastyczności rozpatrywanego w przykładzie materiału, tzn.  $k = k_0$ , to popełnimy błąd 36,5% «na korzyść pewności». Jeżeli przyjmiemy, że granica plastyczności  $k$  równa jest maksymalnej granicy plastyczności rozpatrywanego w przykładzie materiału, tzn.  $k = 2k_0$ , to popełnimy błąd 27,1% «na niekorzyść pewności».

W końcu przyjęto, że granica plastyczności  $k$  równa jest pewnej średniej granicy plastyczności. Jako średnią przyjęto

$$k_{sr} = \frac{\iint_F k(x, y) dF}{\iint_F dF} = \frac{k_0}{\alpha} \cong 1,443 k_0.$$

Jeżeli obliczymy nośność graniczną pręta rozpatrywanego w przykładzie wykorzystując wzór stosowany dla prętów jednorodnych i przyjmując do obliczeń średnią granicę plastyczności, to nośność graniczna będzie różna około 8,3% od rzeczywistej «na korzyść pewności».

Korzystanie ze wzorów uproszczonych, wyprowadzonych dla średniej granicy plastyczności i materiału jednorodnego będzie prowadziło do różnych błędów, zależnych od rozkładu niejednorodności na przekroju pręta.

**12.5. Określenie spaczenia przekroju.** Określanie spaczenia przekroju rozbijemy zgodnie z p. 10 i 11 na dwa etapy: 1) określenie przemieszczenia ( $w/\vartheta$ ) na liniach nieciągłości naprężeń (zgodnie ze wzorem (11.5)), 2) określenie przemieszczeń ( $w/\vartheta$ ) w pozostałych punktach przekroju (zgodnie ze wzorem (10.10)).

Ze względu na symetrię przekroju można z góry przewidzieć, że przemieszczenia ( $w/\vartheta$ ) punktów leżących na osi symetrii będą równe 0, a więc zgodnie z tym odcinek  $OC$  nie będzie się przemieszczał. Łatwo jest to wykazać, mianowicie jeżeli przyjmiemy, że w punkcie  $O(0, 0)$  przemieszczenie jest równe zeru, to dla dowolnego punktu  $R'$ , leżącego na odcinku  $OC$  linii nieciągłości

$$\left(\frac{w}{\vartheta}\right)_{R'} - \left(\frac{w}{\vartheta}\right)_O = \left(\frac{w}{\vartheta}\right)_{R'} = \int_O^{R'} (x dy - y dx) = 0,$$

ponieważ odcinek  $OC$  możemy przedstawić równaniem  $y = ax$ .

W dalszym ciągu należy określić przemieszczenia odcinków  $CA$  i  $CB$  linii nieciągłości. Jednakże ze względu na symetrię przekroju wystarczy rozpatrywać tylko połowę przekroju (w drugiej połowie spaczenie będzie co do bezwzględnej wartości identyczne lecz znaku przeciwnego).

Przybliżone równanie odcinka  $CA$  linii nieciągłości określone było wzorem (12.9)

$$y = -0,3236 \frac{1}{R} x^2 - x + R,$$

więc odkształcenie dowolnego punktu  $R''$ , leżącego na odcinku  $CA$  linii nieciągłości, możemy określić wzorem (11.5)

$$\left(\frac{w}{\vartheta}\right)_{R''} - \left(\frac{w}{\vartheta}\right)_C = \left(\frac{w}{\vartheta}\right)_{R''} = \int_C^{R''} (x dy - y dx) = -\frac{0,3236}{3R} (x_{R''}^3 - x_C^3) - R(x_{R''} - x_C).$$

Po określeniu przemieszczeń ( $w/\vartheta$ ) całej linii nieciągłości możemy przejść do określenia przemieszczeń pozostałych punktów przekroju.

W obszarze  $ADC$  linie największego spadku określone zostały równaniami

$$x = (R - s) \cos l, \quad y = (R - s) \sin l.$$

Przemieszczenie dowolnego punktu  $P$ , leżącego na danej linii największego spadku (a więc przy ustalonym  $l$ ), będzie określone wzorem

$$\left[\frac{w}{\vartheta}\right]_P = \int_{R''}^P \left[ x(s, l) \frac{\partial y}{\partial s} - y(s, l) \frac{\partial x}{\partial s} \right] ds + D(l) = D(l),$$



tnz. wzdłuż linii największego spadku przemieszczenie osiowe jest wielkością stałą. Niewiadomą funkcję  $D(l)$  określimy z warunków brzegowych, mianowicie dla punktów  $P$  leżących na odcinku  $CA$  linii nieciągłości

$$\left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_P = \left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_{R''};$$

stąd wynika

$$\left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_P = D(l) = -\frac{0,3236}{3R} \left[ x_{R''}^3(l) - x_C^3 \right] - R[x_{R''}(l) - x_C].$$

W obszarze  $ACO$  równanie rodziny linii największego spadku określiliśmy przybliżonym wzorem:

$$x = s, \quad y = l + als^2 + \dots$$

Przemieszczenie  $(w/\vartheta)$  dowolnego punktu  $P$ , leżącego na danej linii największego spadku, określimy wzorem

$$\left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_P = \int_{R'}^P (x dy - y dx) + D(l) = \int_{R'}^P \left[ x(s, l) \frac{\partial y}{\partial s} - y(s, l) \frac{\partial x}{\partial s} \right] ds + D(l),$$

czyli

$$\left( \frac{w}{\vartheta} \right)_P = \left( -ls + al \frac{s^3}{3} + \dots \right) + D(l),$$

przy czym wartość niewiadomej funkcji  $D(l)$  określona zostanie z odpowiednich warunków brzegowych.

Dla  $0 \leq l \leq l_C$  na odcinku  $OC$  linii nieciągłości mamy  $(w/\vartheta)_{R'} = 0$ ; tzn. gdy  $s = \bar{s}(l)$ , to  $(w/\vartheta)_P = 0$  [wartość  $\bar{s}(l)$ , określona wzorem (12.13), odpowiada punktom linii największego spadku, leżącym na odcinku  $OC$  linii nieciągłości].

Po uwzględnieniu tego warunku otrzymujemy

$$\left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_P = -l(s - \bar{s}) + al \frac{s^3 - \bar{s}^3}{3} + \dots$$

Uwzględniając podobny warunek brzegowy dla  $l_C \leq l \leq R$ , otrzymujemy

$$\left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_P = -l(s - \bar{s}) + al \frac{s^3 - \bar{s}^3}{3} - \frac{0,3236}{3R} (\bar{s}^3 - s_C^3) - R(\bar{s} - s_C)$$

[wartość  $s(l)$  odpowiadająca punktom linii największego spadku, leżącym na odcinku  $CA$  linii nieciągłości naprężeń, określona była wzorem (12.14)].

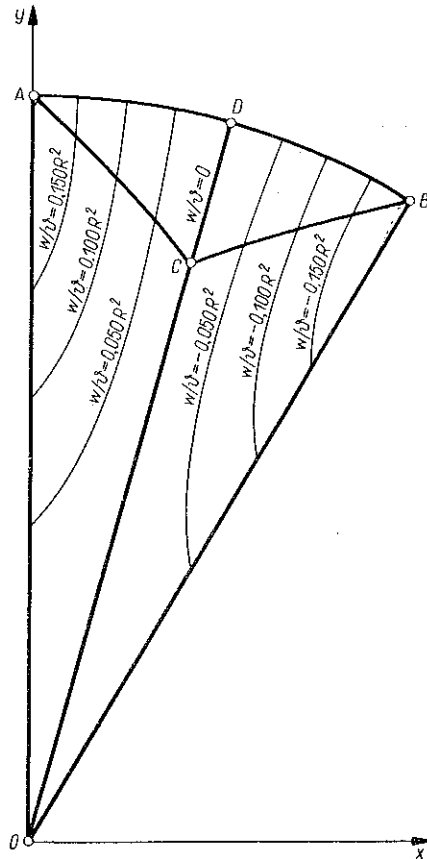
Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono na rys. 13, gdzie naszkicowano poziomicę, wyznaczonej zgodnie z powyższymi wzorami funkcji  $(w/\vartheta)$ .

Na skutek przyjęcia początku układu w punkcie  $O$ , a więc nie w środku skręcania przekroju, otrzymana powierzchnia spaczenia  $(w/\vartheta)$  obrócona jest o pewien kąt

wokoło osi symetrii przekroju. Eliminację tego obrotu łatwo można przeprowadzić korzystając z zależności, która musi być spełniona dla połowy przekroju

$$\iint \left( \frac{w}{\vartheta} - r \bar{x} \right) dF = 0,$$

gdzie  $\bar{x}$  oznacza odległość elementu powierzchni od osi symetrii oraz  $r$  odległość środka skręcania od punktu  $O$ .



Rys. 13

Z powyższego wzoru możemy określić odległość  $r$ :

$$r = \frac{\iint \frac{w}{\vartheta} dF}{\iint \bar{x} dF}$$

i dalej rzeczywiste przemieszczenia:

$$\left[ \frac{w}{\vartheta} \right]_{rz} = \left( \frac{w}{\vartheta} \right) - r \bar{x}.$$

## Literatura cytowana w tekście

1. W. FREIBERGER, W. PRAGER, *Plastic twisting of thick-walled circular ring sectors*, J. Appl. Mech., 23 (1956), 461–463.
2. M. GALOS, M. ŻYCZKÓWSKI, *Analityczna metoda obliczania nośności granicznej prętów skręcanych*, Rozpr. Inżyn., 2, 12 (1964), 267–296. ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 12 (1964), 69–78.
3. M. GALOS, *On analytical calculation of the limit carrying capacity of isotropic and non-homogeneous bars under torsion*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 5, 12 (1964), 241–247.
4. R. HILL, *On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid*, J. Mech. Phys. Solids, 5 (1956), 1–8.
5. Л. М. Качанов, *Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра* Прикл. Мат. Мех. 4, 12, (1948), 375–384.
6. И. А. Кийко, *Кручение стержня из неоднородного идеальнопластического материала*, Инж. Журнал Мех. Тверд. Тела, 2 (1967), 155–157.
7. А. И. КУЗНЕЦОВ, *The problem of torsion and plane strain of non-homogeneous plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 4, 10 (1958), 447–462.
8. J. MANDEL, *Sur les deformations de la torsion plastique*, C. R. Acad. Sci., Paris 222 (1946), 1205–1207.
9. A. NÁDAI, *Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab*, ZAMM, 6, 3 (1923), 442–454.
10. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York 1951. Тум. рос.: ИЛ, Москва 1956.
11. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of non-homogeneous bars analyzed in curvilinear coordinates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, 12 (1964), 469–474.
12. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of bars with jump-non-homogeneity*, Acta Mechanica, 1, 1 (1956), 35–53.
13. M. A. SADOWSKY, *An extension of the sand heap analogy in plastic torsion applicable to cross-section having one or more holes*, J. Appl. Mech., 2, 8 (1941), 166–168.
14. В. В. Соколовский, *Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра*, ПММ., 4, 9 (1945) 343–346.

## Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТЕРЖНЕЙ,  
ПОДВЕРЖЕННЫХ КРУЧЕНИЮ  
С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Рассматривается задача, касающаяся пластического свободного кручения призматических стержней, с произвольной пластической неоднородностью. Предполагается, что функция неоднородности  $k = k(x, y)$  (предел пластичности при чистом сдвиге), и ее производные  $dk/dx$  и  $dk/dy$ , являются не разрывными в подобластях сечения стержня. На границе между подобластями допускаются как на разрывности функции так и ее производных.

Задача решается путем введения функции напряжений  $\Phi$ . В работе дается дифференциальное уравнение линий наибольшего падения функций напряжений  $\Phi$  — уравнение (3.9). Линиями наибольшего падения функции  $\Phi$ , названо в работе их проекции на поверхность сечения стержня. Уравнение (3.9), как уравнения характеристик вывел А. Кийко [6], однако представленное, в настоящей работе, выведение дифференциального уравнения линии наибольшего падения, получено иным путем и было представлено автором на международной конференции Института основных проблем техники ПАН в Колобжеге в 1966 г. т.е. перед опубликованием работы [6].

В работе даются эффективные методы определения линии разрыва напряжений и формулы, необходимые для определения граничного момента. При выведении эффективной

формулы для несущей способности использовалась аналогия Надай [9], которая подтверждает пропорциональность граничного момента и объема под поверхностью  $\Phi(x, y)$ . Определение объема под поверхностью  $\Phi$ , благодаря соответствующему принятию криволинейных переменных, сведено к очень удобному интегрированию функций двух переменных. Методы, применяемые в работе, можно также использовать при решении родственных задач, например задачи пластического кручения круговых стержней переменного диаметра, изготовленных из материала, обладающего осесимметрической неоднородностью и других. Работа иллюстрируется числовым примером: и так для стержня с сечением, показанным на рис. (11), изготовленного из материала, обладающего пластической неоднородностью типа  $k = k_0 \exp[(a - (x^2 + y^2))]$  определяются, на основании раздела 2—11, линии разрывности напряжений, линии наибольшего падения функции  $\Phi$ , самую функцию  $\Phi$ , граничный момент  $\bar{M}$  и деформацию сечения стержня. Дается, также, сравнение определенного значения граничного момента, с аналогичным для стержня, изготовленного из однородного материала.

### Summary

#### COMPUTATION OF THE LIMIT LOAD OF A BAR OF GENERAL TRANSVERSAL NONHOMOGENEITY UNDER CONDITIONS OF TORSION

The problem under consideration is that of free plastic torsion of a prismatic bar characterized by transversal plastic nonhomogeneity of general type. It is assumed that the nonhomogeneity function  $k = k(x, y)$  (the yield limit for pure shear) and its derivatives  $\partial k / \partial x$ ,  $\partial k / \partial y$ , are continuous in component subregions of the cross-section of the bar. The discontinuities admissible at the border are those of the nonhomogeneity function itself and its derivatives.

The problem is solved by introducing the stress function  $\Phi$ . The differential equation (3.9) of the line of greatest slope of the stress function  $\Phi$  is obtained. Strictly speaking the term of line of greatest slope is used to denote not the line itself but its projection on the cross-section of the bar. As an equation of the characteristic lines the Eq. (3.9) was derived by J. A. КИКО, [6]. The differential equation of the line of the greatest slope obtained by another method and discussed in the present paper was communicated by the present author at the International Conference of the IPPT, PAN at KoloBrzeg in 1966, therefore before Ref. [6] was published.

Effective methods are proposed for the determination of discontinuity lines of stress. The paper contains also equations for the determination of the limit moment. The effective equation for the limit load is derived making use of the generalized Nádaи analogy, [9], which states proportionality between the limit moment and the volume below the surface  $\Phi(x, y)$ . By appropriate selection of curvilinear coordinates the computation of the volume below the surface  $\Phi$  is reduced to a very convenient integration procedure of a function of two variables. The methods used can be also made use of for solving associate problems, such as the problem of plastic torsion of circular bars of variable diameter, made of material of circularly symmetric nonhomogeneity and other problems. The work is illustrated by a numerical example concerning a bar, the cross-section of which is shown in Fig. 11. The material is assumed to be of plastic nonhomogeneity of the type  $k = k_0 e^{a - (x^2 + y^2)}$ . The results of Secs. 2 to 11 are used to determine the lines of discontinuity of stress, the lines of greatest slope of the function  $\Phi$ , the function  $\Phi$  itself, the limit torque  $\bar{M}$  and the deformation of the cross-section of the bar. The value of the limit torque is compared with the analogous value for a bar made of a homogeneous material.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1967 r.