

STATECZNOŚĆ PIERŚCIENIA USZTYWNIAJĄCEGO  
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY WALEC ZGINANY

JANUSZ MURZEWSKI (KRAKÓW)

0. Stateczność powłok ortotropowych

Powłoki walcowe usztywnione żebrami poprzecznymi (czyli tzw. wręgami) lub żebrami poprzecznymi i podłużnymi traktuje się zazwyczaj jak powłoki ortotropowe [14].

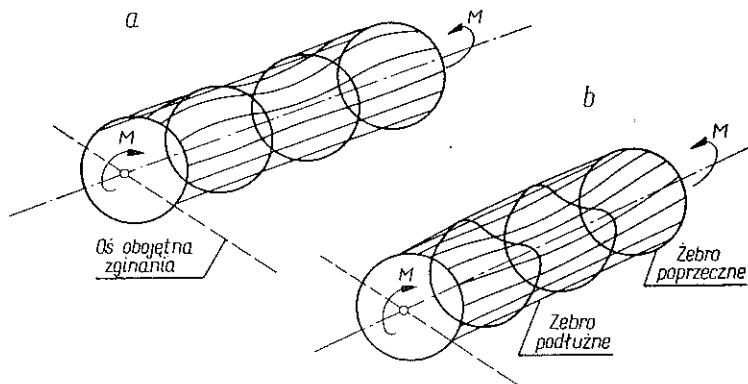
Trzy równania różniczkowe równowagi obrotowego walca ortotropowego w stanie liniowo sprężystym zostały wyprowadzone w latach trzydziestych przez W. FLÜGGEGO [6] jako uogólnienie trzech równań równowagi walca izotropowego. Stosując te równania do powłok żebrowanych zakłada się, że dyskretnie (czyli w pewnych odstępach) stężona powłoka pracuje tak, jakby jej cechy wytrzymałościowe były jednostajnie rozłożone w kierunku osiowym i obwodowym — i oczywiście na ogół różne dla tych dwóch głównych kierunków.

D. D. DSCHOU [5] rozwiązał równania Flüggego dla stateczności walca osiowo-ściskanego. Tenże sam przypadek, ale bez uwzględnienia wpływu współczynnika Poissona (tj. dla  $\nu = 0$ ), rozwiązał inną metodą J. L. TAYLOR [21]. TAYLOR znalazł rozwiązanie dla równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu, które wyprowadził stosując uproszczenia takie, jakie stosował L.H.DONNELL [4] przy wyprowadzaniu swego równania walca izotropowego. Wyniki Taylora uważa się za odnoszące się także dla zginania na podstawie opinii, że naprężenia krytyczne przy ścisaniu osiowym i maksymalne naprężenie ściskające, powodujące zakłębienie rury zginanej, są jednakowe. Twierdzenie to zostało udowodnione [19] dla walca izotropowego, ale w przypadku powłoki ortotropowej brak dowodu.

Naprężenia krytyczne ze wzoru Taylora są kilkakrotnie większe od liczb uzyskanych doświadczalnie na modelach. Mimo to H. BECKER i G. GERARD [2] uważają, że równanie Taylora może być podstawą do obliczenia naprężeń krytycznych przy zginaniu, należy tylko podstawić do wzorów odpowiednio dobrane, sprowadzone grubości i sprowadzone momenty bezwładności powłoki ortotropowej.

N. J. HOFF [10] wyprowadził metodą energetyczną wzór na naprężenie krytyczne dla walca ortotropowego. Ze wzoru tego nie dało się wyeliminować parametrów charakteryzujących przyjęty do obliczeń kształt zakłębienia. Tkwi w nim parametr  $n$ , zdefiniowany w ten sposób, że fala zakłębienia rozciąga się na  $n$ -tą część obwodu w przekroju poprzecznym walca. Konkretniej wartości liczby  $n$  nie udało się ustalić.

Inne podejście reprezentują półempiryczne wzory T. R. SHANLEYA [20] i G. GERARDA [8]. Autorzy ci korzystają z prostego schematu pręta podpartego sprężynami, który ma zastępować powłokę współdziałającą z wręgami. Dążeniem ich jest sformułowanie wzorów dla określenia wymiarów wręgi w ten sposób, by lokalna utrata stateczności (rys. 1a) zachodziła wcześniej niż ogólna utrata stateczności (rys. 1b). Dzięki temu, że współczynniki we wzorach Shanleya i Gerarda dobrane są na podstawie danym empirycznych, wzory te mają większą praktyczną wartość niż wzory teoretyczne Taylora i Hoffa.



Rys. 1

Podstawowe, najliczniejsze wyniki eksperymentalne dotyczące zakłębienia zginanych walców żebrowanych otrzymano w latach czterdziestych w USA [1]. Doświadczenia wykonano w Laboratorium Lotniczym im. Guggenheima Kalifornijskiego Instytutu Technologii (GALCIT) i w Laboratorium Lotniczym Politechniki Brooklińskiej (PIBAL). Badania GALCIT przeprowadzone były na aluminiowych cylindrach żebrowanych, pokrytych ciągłą blachą albo stężonych przekątnymi z drutu lub niestężonych w ogóle. Na podstawie analizy wymiarowej i porównania zachowania się trzech rodzajów modeli określono bezwymiarowy argument  $Q$ , który pozwolił skorelować dane doświadczalne.

Badania PIBAL przeprowadzone były pod kątem określenia parametrów geometrycznych zakłębienia, a w szczególności liczby  $n$  ze wzoru Hoffa, a wyniki zestawione zostały w odpowiednio dobranych współrzędnych. Rzecz ciekawa, że po przeliczeniu tych danych na współrzędne GALCIT naprężenia krytyczne z doświadczeń PIBAL okazały się około 50% mniejsze od naprężeń krytycznych GALCIT dla tego samego  $Q$ . W dyskusji nad możliwymi przyczynami tej rozbieżności [1] zwrócono uwagę na to, że odstęp nitów łączących wręgi z blachą pokrywającą modele PIBAL był większy niż w modelach GALCIT.

Różnice w sposobach połączenia żeber z blachą, a także inne przyczyny (jak np. naprężenia walcownicze, spawalnicze i montażowe, tolerancje odchyłek wymiarów i niedokładności wykonania) wpływają poważnie na nośność konstrukcji. Wydaje się jednak, że główną przyczyną niepowodzeń rozwiązania teoretycznego

należy upatrywać w samym podejściu do zjawiska zakłębnięcia. Być może należy uwzględnić następujące czynniki:

1. Duże przemieszczenia powłoki w stanie zakłębniętym, które mogą odpowiadać o wiele niższemu poziomowi energetycznemu niż małe przemieszczenia w pobliżu stanu bifurkacji równowagi. W ten sposób przy zastosowaniu geometrycznie nieliniowych równań sprężystości L. H. KÁRMÁN i H. TSIEN [13] wytłumaczyli rozbieżności między liniową teorią stateczności i rzeczywistym zachowaniem się izotropowych powłok cylindrycznych.

2. Dyskretne rozmieszczenie stężeń, które kłępiją swobodną deformację blachy, a przez to narażone są na oddziaływanie blachy. Jakkolwiek jest to efekt drugorzędny, to jednak może zadecydować o wyboczeniu wręg i utracie stateczności ogólnej.

Ta ostatnia sprawa, tzn. wyboczenie wręg wywołane oddziaływaniem blachy, jest naszym zdaniem najistotniejsza dla prawidłowego opisu utraty stateczności ogólnej i to zagadnienie jest tematem tej pracy.

Pierwsza sprawa jest szczególnie ważna dla zagadnień stateczności lokalnej (np. rys. 1a). Natomiast problemy stateczności ogólnej (np. rys. 1b) walców z silnymi, rzadko rozmieszczonymi żebrami, wymagają zwrócenia uwagi na drugą sprawę, co wymaga zupełnie odmiennego podejścia do zagadnienia. Do takiego wniosku doszedł autor rozważając stateczność ogólną zginanej rury usztywnionej wręgą [15], a następnie opracował przybliżone metody obliczania długich powłok walcowych obrotowych i nieobrotowych i sprawdził je doświadczalnie w pełnej skali [16] i na modelach [17]. Mimo dość dobrej zgodności wyników można dyskutować nad przyjętymi założeniami, w szczególności nad przyjęciem sprężystego stanu membranowego powłoki w kombinacji z czysto plastycznym stanem giętym. Niniejsza praca ma charakter studium teoretycznego, w którym za pomocą ścisłych metod teorii powłok dochodzi się do wyjaśnienia tego samego w istocie mechanizmu zakłębnięcia powłoki w okolicy wręgi. Dla skoncentrowania uwagi, niezbędne jest ograniczenie się do najprostszego modelu — rury izotropowej (punkt 1) lub ortotropowej (punkt 3) usztywnionej jedną wręgą, a więc pominięcie wzajemnego wpływu sąsiadujących żeber poprzecznych. Abstrahuje się także od możliwości niestateczności lokalnej, tj. wybrzuszenia lub pofalowania powłoki między wręgami. Ten właśnie prosty schemat był wzięty pod uwagę pracy [15]. Pełną analizę przedstawiamy w pracy niniejszej.

### 1. Czyste zginanie rury izotropowej usztywnionej wręgą

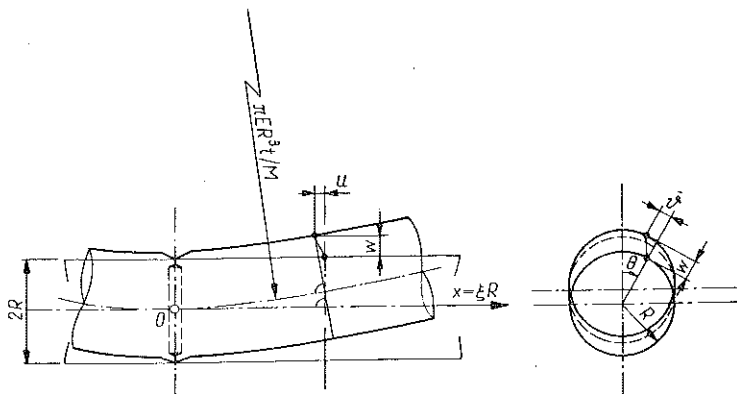
Jako pierwsze zagadnienie, które da podstawę do dalszych rozważań, rozwiążemy zagadnienie czystego zginania nieskończonego długiego izotropowego, obrotowego walca sprężystego, wzmocnionego sztywnym pierścieniem połączonym z powłoką w sposób ciągły.

Układ współrzędnych walcowych  $x, r, \theta$  oraz składowe przemieszczenia punktów powierzchni środkowej powłoki  $u, v, w$  pokazane są na rys. 2. Inne oznaczenia przyjęto następująco:  $R$  oznacza promień powierzchni środkowej powłoki,  $t$  grubość powłoki,  $E$  moduł sprężystości materiału powłoki,  $\nu = 0,3$  współczynnik Poissona,

$D = Et/0,91$  sztywność błonową powłoki,  $B = Et^3/10,92$  sztywność giętą powłoki,  $k = B/DR^2 = t^2/12R^2$  współczynnik charakteryzujący sztywność giętą; jest to liczba bardzo mała, rzędu  $10^{-5}$ – $10^{-7}$ .

Równania równowagi sprężystej powłoki walcowej izotropowej, według klasycznej teorii [7] dla  $\nu = 0,3$  i przy braku obciążeń na powierzchni walca, są następujące:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u'' + 0,35u'' + 0,65v'' + 0,30w' + k(0,35u'' - w'' + 0,35w''') &= 0, \\ 0,65u'' + v'' + 0,35v'' + w' + k(1,05v'' - 1,35w''') &= 0, \\ 0,30u' + v' + w + k(0,35u''' - u''' - 1,35v''' + w^{IV} + 2w'''' + w'''' + 2w'' + w) &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 2

Kreską oznaczono różniczkowanie względem  $\xi = x/R$ , kropką zaś względem  $\theta$ :

$$(1.2) \quad ( )' = \frac{\partial ( )}{\partial \xi}, \quad ( )^\circ = \frac{\partial ( )}{\partial \theta}.$$

Gdyby nie było wręgi, to pod działaniem momentu  $M$  pojawiłyby się w rurze następujące przemieszczenia, spełniające równania (1.1):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_0 &= -\frac{M}{\pi ERt} \frac{\xi \cos \theta}{1 + 3,099k - 0,099k^2}, \\ v_0 &= -\frac{M}{\pi ERt} \frac{0,5\xi^2 \sin \theta}{1 + 3,099k - 0,099k^2}, \\ w_0 &= \frac{M}{\pi ERt} \frac{(0,5\xi^2 + 0,3 + 0,3k) \cos \theta}{1 + 3,099k - 0,099k^2}. \end{aligned}$$

Liczbę  $k$  i jej wyższe potęgi, jako liczby małe wobec jedności, będziemy z reguły opuszczają. Umówmy się przy tym, że dla uproszczenia zapisu nie będziemy zastępować znaku równości znakiem przybliżonej równości.

Stan przemieszczeń (1.3) ulega zaburzeniom w pobliżu wręgi, gdyż ta będąc sztywną nie odkształca się i jej ciągłe połączenie z powłoką nie pozwala na żadne poślizgi blachy po pierścieniu. By spełnić te warunki, poszukujemy rozwiązania w bardziej ogólnej formie. Korzystając z wypróbowanych metod rozwiązania [7] przyjmujemy

$$(1.4) \quad u_1 = Ae^{\lambda\xi} \cos \theta, \quad v_1 = Be^{\lambda\xi} \sin \theta, \quad w_1 = Ce^{\lambda\xi} \cos \theta,$$

gdzie  $A, B, C$  są to nieznane na razie liczby zespolone, a  $\lambda$  jest zespolonym wykładnikiem charakterystycznym, który ustali się tak, aby uzyskać niezerowe rozwiązania jednorodnego układu równań (1.1).

Podstawiamy wyrażenia (1.4) do równań (1.1) i uzyskujemy liniowe jednorodne równania ze względu na  $A, B$  i  $C$ :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\lambda^2 - 0,35) A + 0,65\lambda B + (0,30\lambda - k\lambda^3) C &= 0, \\ 0,65\lambda A + (1 - 0,35\lambda^2) B + (1 - 1,35k\lambda^2) C &= 0, \\ (0,30\lambda - k\lambda^3) A + (1 - 1,35k\lambda^2) B + (1 - 2k\lambda^2 + k\lambda^4) C &= 0. \end{aligned}$$

Niebanalne rozwiązania tego układu równań istnieją, gdy znika wyznacznik ich współczynników, czyli gdy

$$(1.6) \quad \lambda^3 - 3,40\lambda^6 + \frac{0,91}{k} \lambda^4 = 0.$$

Cztery niezerowe pierwiastki tego równania są następujące:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \kappa + \mu i, & \lambda_3 &= -\kappa - \mu i, \\ \lambda_2 &= \kappa - \mu i, & \lambda_4 &= -\kappa + \mu i, \end{aligned}$$

gdzie  $i$  jest jednostką urojoną oraz

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \kappa &= \operatorname{Re} \lambda_1 = 0,69063k^{-1/4} + 0,615k^{1/4}, \\ \mu &= \operatorname{Im} \lambda_1 = 0,69063k^{-1/4} - 0,615k^{1/4}. \end{aligned}$$

Rozwiązując dwa równania dowolnie wybrane z układu trzech równań (1.5), po podstawieniu każdego z rozwiązań (1.7) otrzymujemy kolejno następujące wyniki:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} A_1 &= (\alpha' + \alpha''i) C_1, & B_1 &= (\beta' + \beta''i) C_1, \\ A_2 &= (\alpha' - \alpha''i) C_2, & B_2 &= (\beta' - \beta''i) C_2, \\ A_3 &= (-\alpha' - \alpha''i) C_3, & B_3 &= (\beta' + \beta''i) C_3, \\ A_4 &= (-\alpha' + \alpha''i) C_4, & B_4 &= (\beta' - \beta''i) C_4, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \alpha' &= -0,21720k^{1/4} + 1,7115k^{3/4}, \\ \alpha'' &= 0,21720k^{1/4} + 1,7115k^{3/4}, \\ \beta' &= -1,66099k - 16,0k^2, \\ \beta'' &= -2,41105\sqrt{k} + 8,55k^{3/2}. \end{aligned}$$

Wprowadzamy nowe oznaczenia

$$(1.11) \quad \begin{aligned} C_1 + C_2 &= \bar{C}_1, & C_3 + C_4 &= \bar{C}_3, \\ i(C_1 - C_2) &= \bar{C}_2, & i(C_3 - C_4) &= \bar{C}_4 \end{aligned}$$

i wykorzystujemy znane zależności między funkcjami wykładniczymi i trygonometrycznymi [1.11]. Wzory (1.4) przyjmują wówczas postać

$$(1.12) \quad \begin{aligned} u_1 &= \{e^{\mu\xi} [(a'\bar{C}_1 + a''\bar{C}_2) \cos \mu\xi + (a'\bar{C}_2 - a''\bar{C}_1) \sin \mu\xi] + \\ &\quad - e^{-\mu\xi} [(a'\bar{C}_3 + a''\bar{C}_4) \cos \mu\xi - (a'\bar{C}_4 - a''\bar{C}_3) \sin \mu\xi]\} \cos \theta, \\ v_1 &= \{e^{\mu\xi} [(\beta'\bar{C}_1 + \beta''\bar{C}_2) \cos \mu\xi + (\beta'\bar{C}_2 - \beta''\bar{C}_1) \sin \mu\xi] + \\ &\quad + e^{-\mu\xi} [(\beta'\bar{C}_3 + \beta''\bar{C}_4) \cos \mu\xi - (\beta'\bar{C}_4 - \beta''\bar{C}_3) \sin \mu\xi]\} \sin \theta, \\ w_1 &= \{e^{\mu\xi} [\bar{C}_1 \cos \mu\xi + \bar{C}_2 \sin \mu\xi] + e^{-\mu\xi} [\bar{C}_3 \cos \mu\xi - \bar{C}_4 \sin \mu\xi]\} \cos \theta. \end{aligned}$$

Do powyższych równań, które nazywać będziemy częścią przestępną rozwiązania, dodajemy «część algebraiczną» w formie wielomianów trzeciego stopnia zmiennej  $\xi$ , pomnożonych przez odpowiednią funkcję trygonometryczną zmiennej  $\theta$ . Współczynniki tych wielomianów dla każdej ze składowych przemieszczenia są wzajemnie uzależnione, tak aby spełnić równania (1.1), mianowicie:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} u_2 &= -[C_6 + 13,80C_8 + 2C_7\xi + 3C_8\xi^2] \cos \theta, \\ v_2 &= -[C_5 - 0,60C_7 + (C_6 - 1,80C_8) \xi + C_7\xi^2 + C_8\xi^3] \sin \theta, \\ w_2 &= [C_5 + C_6\xi + C_7\xi^2 + C_8\xi^3] \cos \theta. \end{aligned}$$

Pełne rozwiązanie

$$(1.14) \quad u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2$$

ma osiem stałych całkowania  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4, C_5, C_6, C_7$  i  $C_8$ .

Wyznamy ich wartości z warunków brzegowych. W tym celu założmy początek układu współrzędnych w przekroju wzmocnionym wręgą (rys. 2). Płaszczyzna przekroju wzmocnionego jest płaszczyzną symetrii ustroju i dlatego wystarczy się ograniczyć do rozważania jednej, np. prawej części rury.

Dla rosnącego  $\xi$  przemieszczenia rury zdużają asymptotycznie do przemieszczeń (1.3) rury bez żeber usztywniających:

$$(1.15) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{u}{u_0} = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{v}{v_0} = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{w}{w_0} = 1;$$

stąd

$$(1.16) \quad \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = C_3 = 0 \quad \text{i} \quad C_7 = \varepsilon R/2,$$

gdzie  $\varepsilon = M/\pi ER^2 t$ ; jest to bezwzględnie maksymalne odkształcenie podłużne powierzchni środkowej powłoki u góry ( $\theta = 0$ ) lub u dołu ( $\theta = \pm\pi$ ) w przekroju oddalonym od wręgi ( $\xi \rightarrow \infty$ ).

Dalsze trzy stałe całkowania wyznaczamy z warunku, że przekrój początkowy ( $\xi = 0$ ), połączony ze sztywną wręgą, pozostaje nieodkształcony i nie ulega sztywnemu przesunięciu ani obrotowi;

$$(1.17) \quad [u]_{\xi=0} \equiv 0, \quad [v]_{\xi=0} \equiv 0, \quad [w]_{\xi=0} \equiv 0.$$

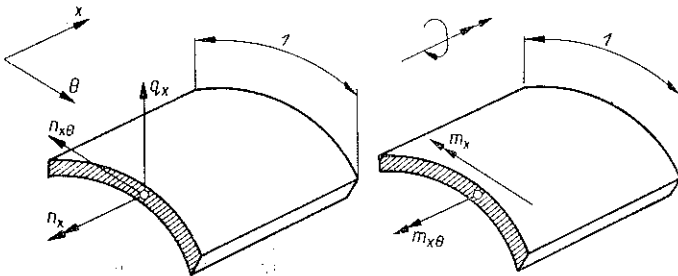
Ponadto, jeśli powłoka podlega tylko odkształceniom sprężystym, to jej powierzchnia środkowa jest regularna, czyli ma wspólną styczną po lewej i prawej stronie przekroju początkowego:

$$(1.18) \quad \varphi = \frac{1}{R} [w' + u]_{\xi=0, \theta=0} = 0.$$

Dla stanu sprężysto-plastycznego albo, ogólniej, dla takiego stanu powłoki, że istnieje załom powłoki, miarodajna wartość kąta załomu  $\varphi$ , czyli kąta między styczną prawostronną i osią  $x$ , będzie wyznaczona w następnym punkcie. Obecnie wyznaczmy wartości pozostałych stałych całkowania pozostawiając kąt  $\varphi$  nieoznaczony:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \bar{C}_3 &= -C_5 = -(0,30 - 0,724 \sqrt{k}) \varepsilon R - (3,49 - 6,37 \sqrt{k}) k^{3/4} \varphi R, \\ \bar{C}_4 &= (0,30 - 0,377 \sqrt{k}) \varepsilon R - (1,448 - 2,65 \sqrt{k}) k^{1/4} \varphi R \\ \bar{C}_6 &= -(0,130 - 0,239 \sqrt{k}) k^{1/4} \varepsilon R + (0,314 - 0,114 \sqrt{k}) k^{1/4} \varphi R. \end{aligned}$$

Okazuje się, że dodatnia wartość liczby Poissona ma tutaj zasadnicze znaczenie. Gdybyśmy przyjęli  $\nu = 0$ , powyższe stałe równałyby się zeru i wszystkie dalsze efekty również sprowadziłyby się do zera.



Rys. 3

Napięcie wewnętrzne w przekroju poprzecznym powłoki, oznaczone na rys. 3, wyznaczmy za pomocą znanych wzorów (1.7):

$$(1.20) \quad \begin{aligned} n_x &= \frac{D}{R} (u' + 0,30v' + 0,30w - kw''), \\ n_{x\theta} &= 0,35 \frac{D}{R} (u' + v' - kw''), \\ m_x &= \frac{B}{R^2} (w'' + 0,35w'' - u' - 0,30v'), \\ m_{x\theta} &= 0,70 \frac{B}{R^2} (w'' - v'), \\ q_x &= \frac{B}{R^3} (w''' + w''' - u'' + 0,35u'' - 0,65v''). \end{aligned}$$

Ze względu na to, że rura podlega czystemu zginaniu, muszą się sprawdzać następujące tożsamości:

$$(1.21) \quad \int_{-\pi}^{\pi} (m_x - n_x R) \cos \theta R d\theta \equiv M,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (q_x \cos \theta + n_{x\theta} \sin \theta) R d\theta \equiv 0.$$

Obciążenia normalne  $p$  i styczne  $s$  węgry (rys. 4a) wynoszą

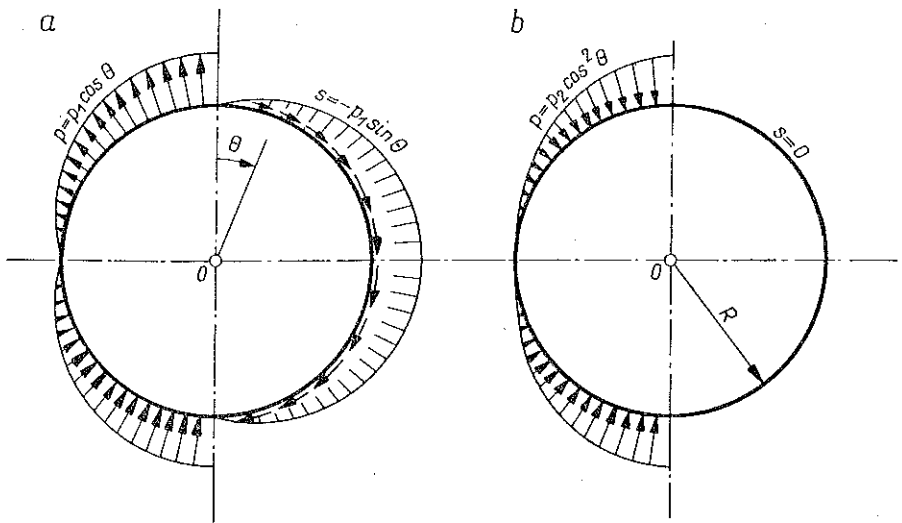
$$(1.22) \quad p = 2 \left[ q_x + \frac{m_{x\theta}}{R} \right]_{\xi=0} = p_1 \cos \theta,$$

$$s = 2 \left[ n_{x\theta} - \frac{m_{x\theta}}{R} \right]_{\xi=0} = -p_1 \sin \theta,$$

gdzie

$$p_1 = -(0,789 - 1,45\sqrt{k}) k^{1/4} \varepsilon D + (1,905 - 0,69\sqrt{k}) \sqrt{k} \varphi D.$$

Spełnienie równości  $s = p \tan \theta$  zapewnia ogólną równowagę pierścienia.



Rys. 4

Gdy istnieje załom plastyczny na obwodzie powłoki połączonej z węgry, to na węgry przenoszą się dodatkowe obciążenia, mianowicie składowe napięć błonowych prostopadłe do osi  $x$  (rys. 4b):

$$(1.23) \quad \Delta p = - \left[ 2n_x \frac{w' + u}{R} \right]_{\xi=0} = p_2 \cos^2 \theta = \frac{p_2}{2} + \frac{p_2}{2} \cos 2\theta,$$

$$\Delta s = - 2 \left[ \frac{m_x - n_x R}{R^2} u' \right]_{\xi=0} = 0,$$

gdzie

$$p_2 = (1,820 - 0,574) \sqrt{k} \varepsilon \varphi D + (2,774 - 5,08\sqrt{k}) k^{1/4} \varphi^2 D.$$



## 2. Stateczność wręgi sprężystej

Rozważmy stateczność pierścienia sprężystego o polu przekroju poprzecznego  $F_w$  i momencie bezwładności  $I_w$  pod obciążeniem «śledzącym». Przez obciążenie śledzące rozumiemy takie obciążenie, że wielkość składowej obciążenia normalnej do osi pierścienia  $p$  i stycznej do osi pierścienia  $s$  nie ulegają zmianie w czasie odkształcenia pierścienia i punkt przyłożenia obciążeń przemieszcza się wraz z przemieszczeniem osi pierścienia.

Równania równowagi pierścienia sprężystego w stanie odkształconym przy założeniu małych przemieszczeń (1.3) są następujące:

$$(2.1) \quad \frac{1}{R} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{N}{\varrho} + p = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{dN}{d\theta} - \frac{Q}{\varrho} + s = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{dZ}{d\theta} - Q = 0,$$

gdzie  $\varrho$  jest to promień krzywizny odkształconego elementu pierścienia, a  $N$ ,  $Q$ ,  $Z$  są to siły wewnętrzne pierścienia objaśnione na rys. 5. Moment zginający oznaczamy literą  $Z$  dla odróżnienia od momentu  $M$  zginającego cały przekrój powłoki.

Dla równań tych dołączymy znany wzór na zmianę krzywizny w stanie sprężystym (1.3)

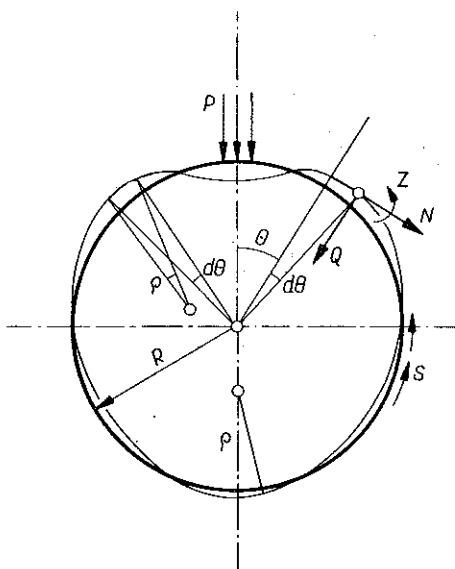
$$(2.2) \quad \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R} = - \frac{Z}{EI_w}.$$

Z równań (2.1) i (2.2) wynika, że gdy

$$(2.3) \quad s = dp/d\theta,$$

to może zachodzić bezgiętny stan pierścienia:

$$(2.4) \quad N = -pR, \quad Q = 0, \quad Z = 0.$$



Rys. 5

A więc bezgiętny stan może mieć miejsce w przypadku obciążeń wręgi spowodowany skrępowanym odkształceniem sprężystym powłoki, gdyż, jak wynika ze wzorów (1.22), spełniony jest warunek (2.3).

Zbadajmy, przy jakich obciążeniach nastąpi bifurkacja równowagi pierścienia, tzn. oprócz kołowej formy pierścienia możliwa będzie także inna, odkształcona forma równowagi pierścienia.

Układ (2.1) po wyrugowaniu  $N$  i  $Q$  sprowadza się do następującego równania:

$$(2.5) \quad \frac{d^2 Z}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{p_1 R^3}{EI_w} \cos \theta\right) Z - \frac{3}{2} \frac{Z^2 R}{EI_w} + \frac{1}{2} \frac{Z^3 R^2}{E^2 I_w^2} = 0,$$

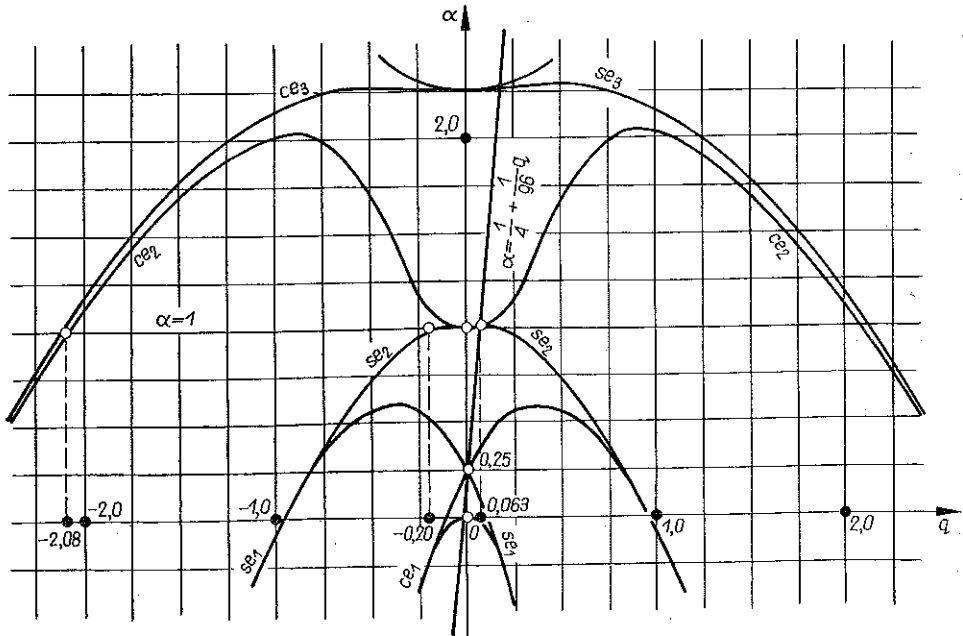
a po pominięciu wyrazów małych wyższego rzędu

$$(2.6) \quad \frac{d^2 Z}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{p_1 R^3}{EI_w} \cos \theta\right) Z = 0.$$

Jest to równanie Mathieu. W celu wykorzystania tablic i wykresów Mathieu [1.11] przekształcamy je do postaci

$$(2.7) \quad \frac{1}{4} \frac{d^2 Z}{dx^2} + (a_1 - 4q_1 \cos 2x) Z = 0,$$

gdzie  $x = \theta/2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $q_1 = -p_1 R^3/4EI_w$ .



Rys. 6

Rozwiązanie trywialne tego równania  $Z = 0$  odpowiada bezgiętnemu stanowi pierścienia (2.4). Poszukujemy takich wartości parametru  $q$ , przy których istnieją nietrywialne, periodyczne całki równania (2.7). Z wykresu wartości własnych periodycznych funkcji Mathieu (rys. 6) odczytujemy następującą ujemną wartość tego parametru:

$$(2.8) \quad q_1 = -0,20.$$

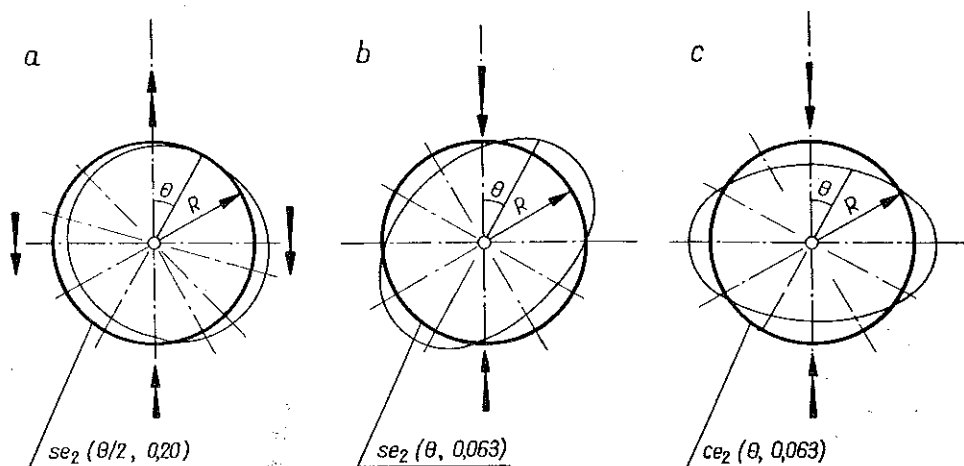
Stąd obciążenie krytyczne wynosi

$$(2.9) \quad p_1 = 0,80 EI_w/R^3,$$

a krytyczna siła podłużna

$$(2.10) \quad N_1 = 0,80 EI_w/R^2.$$

Wartość własna (2.8) pozwala na spełnienie równania (2.7) przez funkcję Mathieu  $ce_2 \theta/2$  (rys. 7a). Funkcja  $ce_2 \theta/2$  również o okresie  $2\pi$  prowadzi do określenia dużo większych, a więc nierealnych, wartości siły krytycznej.



Rys. 7

Porównujemy — zupełnie formalnie — krytyczną siłę podłużną (2.10) dla pierścienia z siłą Eulera dla słupa i w ten sposób obliczamy długość wybocheniową  $l_1$  dla pierścienia obciążonego według «pierwszej harmonicznej», tzn. wg wzorów (1.22),

$$(2.11) \quad l_1 = \pi R / \sqrt{0,80} = 3,52R;$$

a stąd miarodajna smukłość wynosi

$$(2.12) \quad \lambda_1 = l_1 / i_w = 3,52R \sqrt{F_w / I_w}.$$

Wzór (2.12) pozwala na proste określenie stateczności wręgi z uwzględnieniem realnych warunków pracy i ewentualnego wpływu naprężeń własnych i odkształceń plastycznych, mianowicie

$$(2.13) \quad N_1 = \beta_1 F_w K,$$

gdzie  $K$  oznacza granicę plastyczności lub normowe naprężenie graniczne,  $\beta_1 = = f(\lambda_1)$  normowy współczynnik wybocheniowy.

Przystąpimy teraz do określenia siły krytycznej dla wręgi obciążonej pełnym oddziaływaniem blachy w stanie załamanym, tzn. wg wzorów (1.22) i (1.23); znajdziemy

$$(2.14) \quad \begin{aligned} p &= p_1 \cos \theta + p_2 \cos^2 \theta = \frac{p_2}{2} + p_1 \cos \theta + \frac{p_2}{2} \cos 2\theta, \\ s &= -p_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Obciążenia te wywołują siły wewnętrzne  $N, Q, Z$ , które w pierwszym przybliżeniu wyznaczmy ze zlinearyzowanych (za pomocą zamiany  $q$  na  $R$ ) równań (2.1):

$$(2.15) \quad \begin{aligned} N_0 &= -\frac{1}{2} p_2 R - p_1 R \cos \theta + \frac{1}{6} p_2 R \cos 2\theta, \\ Q_0 &= -\frac{1}{3} p_2 R \sin 2\theta, \quad Z_0 = \frac{1}{6} p_2 R^2 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Rozważania nasze ograniczamy do stanów, w których siły wewnętrzne nieznacznie się różnią od powyższych:

$$(2.16) \quad N = N_0 + \Delta N, \quad Q = Q_0 + \Delta Q, \quad Z = Z_0 + \Delta Z,$$

gdzie  $\Delta N, \Delta Q$  i  $\Delta Z$  są to wielkości dostatecznie małe, tak że po przemnożeniu ich przez również małą liczbę  $RZ/EI_w$  dostajemy pomijalne wielkości małe wyższego rzędu. W ten sposób dochodzimy do równania

$$(2.17) \quad \frac{d^3 \Delta Z}{d\theta^3} + \left(1 + \frac{N_0 R^2}{EI_w}\right) \frac{d\Delta Z}{d\theta} + \left(\frac{dN_0}{d\theta} + Q_0\right) \frac{\Delta Z R^2}{EI_w} = - \left(\frac{dN_0}{d\theta} Z_0 + Q_0 Z_0 + N_0 Q_0 R\right) \frac{R^2}{EI_w}.$$

Jest to równanie niejednorodne ze zmiennymi współczynnikami, które ma jednoznaczne rozwiązanie przy uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych. Pierścień podlega zginaniu mimośrodowemu i nie mamy czystego zagadnienia stateczności, a raczej jest to problem wytrzymałości pierścienia. Znajomość wartości własnych odpowiedniego zagadnienia jednorodnego jest jednak potrzebna, gdyż określa granicę, przy której równanie niejednorodne ma całość rozbieżną.

Rozkładamy obciążenia (2.14) na część bezgiętną (oznaczoną gwiazdką) i część czystogiętną (z dwoma gwiazdkami), które spełniają równania różniczkowe

$$(2.18) \quad \frac{dp^*}{d\theta} - s^* = 0, \quad p^{**} + \frac{ds^{**}}{d\theta} = 0.$$

Z równań tych, przy uwzględnieniu że

$$(2.19) \quad p^* + p^{**} = p, \quad s^* + s^{**} = s,$$

otrzymujemy wzory

$$(2.20) \quad \begin{aligned} p^* &= \frac{p_2}{2} + p_1 \cos \theta - \frac{p_2}{6} \cos 2\theta, \\ s^* &= -p_1 \sin \theta + \frac{p_2}{3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

oraz

$$(2.21) \quad p^{**} = \frac{2}{3} p_2 \cos 2\theta, \quad s^{**} = -\frac{1}{3} p_2 \sin 2\theta$$

i wyprowadzamy odpowiednie równanie jednorodne

$$(2.22) \quad \frac{d^3 \Delta Z}{d\theta^3} + \left(1 - \frac{N_0^* R^2}{EI_w}\right) \frac{d\Delta Z}{d\theta} - \frac{dN_0^*}{d\theta} \frac{ZR^2}{EI_w} = 0,$$

gdzie

$$(2.23) \quad N_0^* = -\frac{1}{2} p_2 R - p_1 R \cos \theta + \frac{1}{6} p_2 R \cos 2\theta.$$

Przez jednokrotne scałkowanie (2.23) doprowadzamy je do postaci równania różniczkowego Hilla (1.12)

$$(2.24) \quad \frac{d^2 \Delta Z}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{N_0^* R^2}{EI_w}\right) \Delta Z = \text{const} = 0.$$

Obliczenie periodycznych własności własnych tego równania jest uciążliwe, a poza tym nie będzie potrzebne w zastosowaniach, dlatego ograniczymy się do przypadku

$$(2.25) \quad p_1 = 0, \quad p_2 > 0.$$

Jest to kombinowany przypadek obciążenia hydrostatycznego i obciążenia wg «drugiej harmonicznej»:

$$(2.26) \quad \frac{d^2 \Delta Z}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{p_2 R^3}{2EI_w} - \frac{p_2 R^3}{6EI_w} \cos 2\theta\right) \Delta Z = 0.$$

W tym szczególnym przypadku równanie Hilla redukuje się do równania Mathieu o parametrach

$$a_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{p_2 R^3}{2EI_w}\right), \quad q_2 = \frac{1}{96} \frac{p_2 R^3}{EI_w}.$$

Na wykresie wartości charakterystycznych równania Mathieu wykreślimy prostą

$$a = \frac{1}{4} + 12q$$

i otrzymujemy punkt przecięcia z krzywą  $se_2$  lub  $ce_2$  (odpowiadającą funkcji Mathieu  $se_1 0$  lub  $ce_2 0$ , rys. 7b i c) dla  $q_2 = 0,063$ . Stąd

$$(2.27) \quad p_2 = 6,05 \frac{EI_w}{R^3} \quad \text{i} \quad N_2 = 4,02 \frac{EI_w}{R^2}.$$

Z siłą krytyczną  $N_2$  należy porównywać maksymalną wartość siły podłużnej we wřędze,

$$(2.28) \quad \max |N| = \frac{2}{3} p_2 R.$$

Tego rodzaju porównanie daje pewną ocenę stateczności wřęgi jakkolwiek, jak wiadomo, pręty mimośrodowo ściskane oblicza się w praktyce za pomocą

uproszczonego wzoru wytrzymałościowego, będącego modyfikacją klasycznej formy Naviera. W tym wzorze uwzględnia się współczynnik wybocheniowy  $\beta_2$ . Dlatego potrzebna jest długość wybocheniowa

$$(2.29) \quad l_2 = \frac{\pi}{\sqrt{4,02}} R = 1,57 R.$$

Obliczenie wartości własnej dla  $p_1 = 0$ ,  $p_2 < 0$  daje jeszcze jeden punkt, przez który musi przechodzić krzywa interakcji sił uogólnionych  $p_1$  i  $p_2$ .

Przeprowadźmy teraz rozumowanie, które nas doprowadzi do określenia granic, w których może się wahać kąt  $\varphi$ , co pozwoli nam ustalić obciążenia  $p_1$  i  $p_2$  do obliczeń statycznych. Dolną granicę  $\varphi_1$ , odpowiadającą czysto sprężystemu stanowi blachy, jest  $\varphi_1 = 0$ , stąd ze wzorów (1.22) i (1.23) znajdziemy

$$(2.30) \quad p_1 = -(0,789 - 1,45\sqrt{k}) k^{1/4} \varepsilon D, \quad p_2 = 0.$$

Górną granicę  $\varphi_2$ , która zachodzi po utworzeniu załomu powłoki wzdłuż jej obwodu w przekroju  $\xi = 0$ , oszacujemy z rozważań energetycznych. Mianowicie uważamy, że w wyniku obrotu o kąt  $2\varphi_2$  w tym przegubie zostaje rozładowana całkowicie energia sprężysta związana z koncentracją naprężeń w powłoce w sąsiedztwie wręgi. Innymi słowy, znika różnica  $\Delta\Phi$  między energią wewnętrzną sprężystości zgiętej rury gładkiej a energią rury usztywnionej wręgą. Energia sił wewnętrznych równa się pracy sił zewnętrznych, czyli iloczynowi momentu zginającego  $M$  i kąta obrotu przekroju oddalonego od początku układu. Na mocy prawa płaskich przekrojów (słusznego dla  $\xi \rightarrow \infty$ ) kąt obrotu przekroju wynosi

$$(2.31) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{w'}{R \cos \theta} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{-v'}{R \sin \theta} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{-u}{R \cos \theta}.$$

Powyższe granice są rozbieżne, ale różnica obrotu rury usztywnionej i nieusztywnionej jest skończona

$$(2.32) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{w' - w'_0}{R \cos \theta} = C_6/R \quad \text{i} \quad \Delta\Phi = MC_6/R.$$

Porównując  $\Delta\Phi = 0$  i przedstawiając  $C_6$  wg wzoru (1.19), obliczamy kąt  $\varphi_2$ :

$$(2.33) \quad C_6 = 0, \quad \varphi_2 = (0,414 - 0,612\sqrt{k}) k^{-1/4} \varepsilon,$$

stąd

$$(2.34) \quad p_1 = 0, \quad p_2 = (1,181 - 2,57\sqrt{k}) k^{-1/4} \varepsilon^2 D.$$

Graniczny kąt  $\varphi_2$  został obliczony bez sprawdzania warunku plastyczności wzdłuż załomu blachy. Konieczność spełnienia tego warunku w przegubie plastycznym w pewnym stopniu krępuje swobodę odkształceń, tak że kąt obrotu przegubu plastycznego jest raczej mniejszy od  $\varphi_2$ . Uważamy jednak, że właściwą dla celów projektowania wartością jest właśnie (2.33). Uwzględnia się w ten sposób przypadki szczególnie niekorzystnych rozkładów niejednorodności materiału, naprężeń własnych lub odkształceń wstępnych.

## 3. Walec usztywniony żebrami podłużnymi i poprzecznymi

Weźmy pod uwagę powłokę walcową, która nie jest gładka jak poprzednio, lecz wzmocniona ciągłymi żebrami podłużnymi. Dyskretne rozmieszczenie żeber podłużnych wydaje się nie mieć większego znaczenia dla stateczności ogólnej ustroju. Dlatego jako model teoretyczny przyjmujemy ortotropowy walec obrotowy wzmocniony wręgą.

Przyjmijmy za powierzchnię odniesienia powierzchnię środkową blachy poszycia i wprowadzimy następujące oznaczenia:  $R$  oznacza promień powierzchni odniesienia,  $t$  grubość blachy,  $b$  odstęp żeber podłużnych,  $F_z$  pole przekroju żebra podłużnego,  $I_z$  moment bezwładności żebra podłużnego,  $J_z$  moment na skręcanie żebra podłużnego oraz  $e$  odległość środka ciężkości żebra podłużnego od powierzchni odniesienia.

Korzystając ze wzorów Flüggego [7] określamy sztywność powłoki ortotropowej.

Sztywności błonowe wynoszą

$$(3.1) \quad \begin{aligned} D_\theta &= Et/0,91 = D, & D_\nu &= 0,30 D, \\ D_x &= D + \frac{EF_z}{b}, & D_{x\theta} &= 0,35 D; \end{aligned}$$

momenty sztywności ze względu na przyjętą powierzchnię odniesienia

$$(3.2) \quad S_x = -\frac{EF_z e}{b}, \quad S_\theta = 0,$$

sztywności giętkie zredukowane do przyjętej powierzchni odniesienia

$$(3.3) \quad \begin{aligned} B_\theta &= Et^3/10,92 = B, & B_{\theta x} &= 0,70 B, \\ B_x &= B + E \frac{I_z + F_z e^2}{b}, & B_{x\phi} &= 0,70 B + \frac{GJ_z}{b}, \\ B_\nu &= 0,30 B. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe powłoki ortotropowej Flüggego [7] dla określonych powyżej sztywności przy braku obciążeń powierzchniowych mają postać następującą:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{EF_z}{bD}\right) u'' + 0,35u'' + 0,65v'' + 0,30w' + \frac{eEF_z}{bDR} w''' &= 0, \\ 0,65u'' + v'' + 0,35v'' - \left(k + \frac{GJ_z}{bDR^2}\right) w'' + w' &= 0, \\ \frac{eEF_z}{bDR} u''' + 0,30u' + v' + \left(k + 0,91 \frac{I_z + F_z e^2}{btR^2}\right) w^{IV} + \left(2k + \frac{GJ_z}{bDR^2}\right) w'''' + & \\ + kw'''' + w &= 0. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio  $k = t^2/12R^2$  jest liczbą bardzo małą. Przy braku żeber podłużnych  $A_z = 0$ ,  $J_z = 0$  równania (3.4) sprowadzają się niezupełnie dokładnie do równań (1.1). Różnice spowodowane są tym, że przy wyprowadzeniu równań powłoki ortotropowej FLÜGGE opuścił niektóre małe wyrazy.

Rozwiązań szukać będziemy w formie (1.4).

Podstawiając te wzory do równań (3.4) dostajemy następujący układ równań liniowych jednorodnych:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} [(1 + k_1) \lambda^2 - 0,35] A + 0,65\lambda B + (0,30\lambda - k_2 \lambda^3) C &= 0, \\ 0,65\lambda A + (1 - 0,35\lambda^2) B + [1 - (k + k_3) \lambda^2] C &= 0, \\ (0,30\lambda - k_2 \lambda^3) A + B + [1 - (2k + k_3) \lambda^2 + (k + k_4) \lambda^4] C &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} k &= t^2/12R^2, \\ k_1 &= EF_z/bD, \quad k_2 = -EF_z e/bDR, \\ k_3 &= GJ_z/bDR^2, \quad k_4 = 0,91 (I_z + F_z e^2)/btR^2. \end{aligned}$$

Wyznacznik współczynników tego równania, uporządkowany i przyrównany do zera, daje równanie następujące:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 0,35 [(1+k_1)(k+k_4) - k_2^2] \lambda^8 - [(0,70+k_1)(k+k_4) + \\ + (0,70 + 1,35k_2)k - (0,21+k_2)k_2 + (0,35+k_2)k_3] \lambda^6 + \\ + 0,35 [0,91 + 2,7k + k_1 + 2k_2 - 0,30k_3 + k_4] \lambda^4 = 0. \end{aligned}$$

Cztery niezerowe pierwiastki zespolone tego równania oznaczamy według wzorów (1.7).

Podstawiając  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  i  $\lambda_4$  do równań (3.5) możemy obliczyć z nich po kolei  $A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3; A_4, B_4$  przy niewyznaczonych  $C_1, C_2, C_3$  i  $C_4$ . Wyniki zapisujemy symbolicznie w formie (1.9). Dzięki zastosowaniu tych samych oznaczeń  $\kappa, \mu, \alpha', \alpha'', \beta'$  i  $\beta''$  wzory na część przestępną rozwiązania dla powłoki ortotropowej są identyczne ze wzorami (1.12) dla powłoki izotropowej. Natomiast wzory na część algebraiczną rozwiązania, które spełniałyby równania (3.4), wykazują pewną różnicę w stosunku do wzorów (1.13), mianowicie mamy tutaj

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u_2 &= - [C_6 + (13,800 + 1,714k_1 + 1,714k_2 - 1,113k_3) C_8 + \\ &\quad + 2C_7 \xi + 3 C_8 \xi^2] \cos \theta, \\ v_2 &= - [C_5 - (0,60 + 2k_3) C_7 + C_6 \xi - 6 (0,3 + k_3) C_8 \xi + C_7 \xi^2 + C_8 \xi^3] \sin \theta, \\ w_2 &= [C_5 + C_6 \xi + C_7 \xi^2 + C_8 \xi^3] \cos \theta. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych (1.15), (1.17) i (1.18) dostajemy następujące wzory na przemieszczenia zginanego walca ortotropowego wzmocnionego wręgą:



$$\begin{aligned}
 u &= [(1 - e^{-\kappa\xi} \cos \mu\xi) (\alpha' \bar{C}_3 + \alpha'' \bar{C}_4) + e^{-\kappa\xi} \sin \mu\xi (\alpha' \bar{C}_4 - \alpha'' \bar{C}_3) - \\
 &\quad - \varepsilon R \xi] \cos \theta, \\
 (3.9) \quad v &= - \left[ (1 - e^{-\kappa\xi} \cos \mu\xi) (\beta' \bar{C}_3 + \beta'' \bar{C}_4) + e^{-\kappa\xi} \sin \mu\xi (\beta' \bar{C}_4 - \beta'' \bar{C}_3) + \right. \\
 &\quad \left. + C_6 \xi + \varepsilon \frac{R}{2} \xi^2 \right] \sin \theta, \\
 w &= \left[ - (1 - e^{-\kappa\xi} \cos \mu\xi) \bar{C}_3 - e^{-\kappa\xi} \sin \mu\xi \bar{C}_4 + C_6 \xi + \frac{\varepsilon R}{2} \xi^2 \right] \cos \theta,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \bar{C}_3 &= \frac{0,3 (\alpha'' + \mu) \varepsilon - \beta'' \varphi}{(\alpha' + \kappa) \beta'' - (\alpha'' + \mu) (1 + \beta')} R, \\
 \bar{C}_4 &= \frac{- 0,3 (\alpha' + \kappa) \varepsilon + (1 + \beta') \varphi}{(\alpha' + \kappa) \beta'' - (\alpha'' + \mu) (1 + \beta')} R, \\
 C_6 &= \frac{0,3 (\alpha' \kappa - \alpha' \mu) \varepsilon + [\alpha' \beta'' - \alpha'' (1 + \beta')] \varphi}{(\alpha' + \kappa) \beta'' - (\alpha'' + \mu) (1 + \beta')} R, \\
 \varepsilon &= \frac{M}{\pi E R^2 (t + F_2/b)}.
 \end{aligned}$$

Wzory na napięcie wewnętrzne w przekroju poprzecznym powłoki [1] są następujące:

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad n_x &= \frac{D}{R} [(1 + k_1) u' + 0,30 v' + 0,30 w - k_2 w'], \\
 n_{x\theta} &= 0,35 \frac{D}{R} (u' + v'), \quad m_x = D (k w'' + 0,30 k w'' - k_2 u'), \\
 m_{x\theta} &= D (0,70 k + k_3) w', \quad q_x = \frac{D}{R} (k w''' + k w''' - k_2 u'').
 \end{aligned}$$

Obciążenia wręgi obliczamy analogicznie jak w p. 2 wzory (1.22) i (1.23)

$$(3.12) \quad p = \frac{p_2}{2} + p_1 \cos \theta + \frac{p_2}{2} \cos \theta, \quad s = - p_1 \sin \theta,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 p_1 &= - 0,21 D \left[ \kappa + \mu \frac{\beta'' (\alpha'' + \mu) + (1 + \beta') (\alpha' + \kappa)}{\beta'' (\alpha' + \kappa) - (1 + \beta') (\alpha'' + \mu)} \right] \varepsilon + \\
 &\quad + 0,70 D \left[ 1 + 2,86 k_3 - \frac{\beta''^2 \mu - (1 + \beta')^2 \kappa}{\beta'' (\alpha' + \kappa) - (\alpha'' + \mu) (1 + \beta')} \right] \varphi, \\
 p_2 &= 2 D \left[ 0,3 \frac{(\alpha'' + \mu) (\kappa^2 - \mu^2) - 2 \kappa \mu (\alpha' + \kappa)}{\beta' (\kappa + \alpha') - (1 + \beta') (\alpha'' + \mu)} - 0,91 (1 + k_1) \right] \varepsilon \varphi + \\
 &\quad + 2 k_2 D \frac{(\kappa^2 - \mu^2) \beta'' - 2 \kappa \mu (1 + \beta')}{\beta'' (\kappa + \alpha') - (1 + \beta') (\alpha'' + \mu)} \varphi^2.
 \end{aligned}$$

Wartość kąta  $\varphi$  zależy od tego, czy powierzchnia powłoki jest regularna, czy załamana w przekroju  $\xi = 0$ . W pierwszym przypadku

$$(3.13) \quad \varphi_1 = 0,$$

a w drugim na mocy rozważań energetycznych analogicznych do tych, które były przeprowadzone w p. 2

$$(3.14) \quad \varphi_2 = 0,3 \varepsilon \frac{\alpha' \mu - \alpha'' \kappa}{\alpha' \beta'' - \alpha''(1 + \beta')}.$$

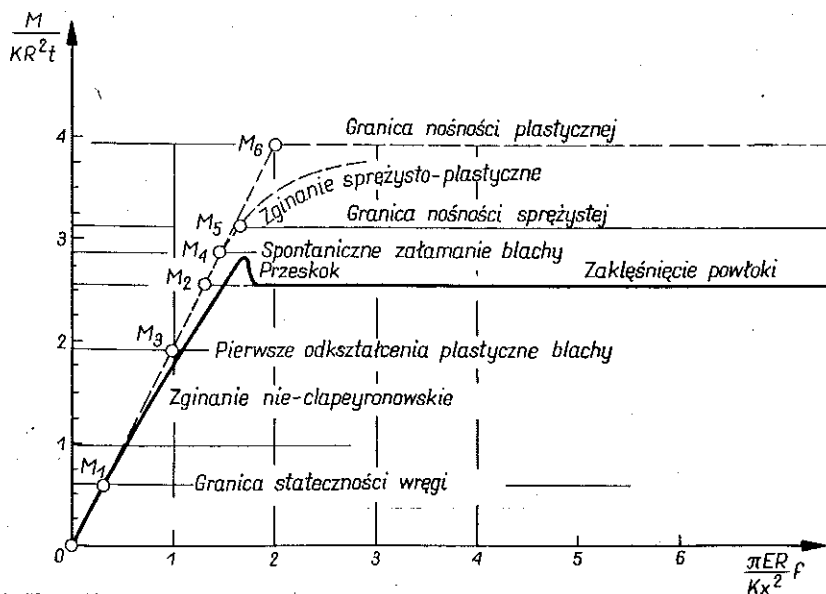
Oddziaływanie przenoszone na wręgę przy powyższych wartościach kąta  $\varphi$  obliczymy ze wzorów (3.12).

#### 4. Nośność graniczna walca cienkościennego

Ogólna utrata stateczności przy zginaniu żebrowanej rury cienkościennej połączona jest z wybočeniami wręgi. Zachodzą dwa rodzaje wyboczenia:

1) wyboczenie antysymetryczne względem płaszczyzny zginania rury, spowodowane oddziaływaniem sprężystym gładkiej (regularnej) powłoki na wręgę (rys. 4a);

2) wyboczenie spowodowane przez składowe pionowe napięcia błonowych powłoki (rys. 4b), które przenoszone są na wręgę, gdy istnieje załom powłoki wzdłuż obwodu połączonego z wręgą (może ono być asymetryczne lub symetryczne).



Rys. 8

Pojęcie o kształcie powłoki zakłęśniętej daje rys. 7. Przedstawia on w nieokreślonej skali wykresy momentów zginających drugiego rzędu w stanie wyboczenia wręgi. Rysunek 7a odnosi się do powłoki gładkiej, a rys. 7b i c do powłoki załamanej.

Z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji zachodzi zasadnicza różnica między wyboczeniem wręgi na skutek oddziaływania powłoki regularnej i powłoki z przegubem wzdłuż obwodu usztywnionego.

W pierwszym przypadku dalsze zwiększanie dużych odkształceń wręgi będzie hamowane przez sprężystą powłokę. W drugim przypadku im większe będą ugięcia wręgi, tym większe będą działać na nią składowe poprzeczne sił błonowych, a więc nastąpi raptownie zakłębienie powłoki. Ten sposób zniszczenia powłoki żebrowanej zaliczamy do problemów niestateczności [16], gdyż teoretyczne jego rozpoznanie wymaga uwzględnienia efektu drugiego rzędu w postaci dodatkowych obciążeń zależnych od stanu odkształcenia.

Wyprowadzone wzory na obciążenie wręgi  $p_1$  i  $p_2$  przy pierwszym i drugim rodzaju wyboczenia, mianowicie dla powłoki gładkiej wzory (2.30) i (2.34), przy użebrowaniu zaś podłużnym wzory (3.12), (3.13) i (3.14) oraz odpowiednie długości wyboczeniowe  $l_1$  wg wzoru (2.12) i  $l_2$  wg wzoru (2.29), prowadzą sposób wymiarowania wręgi do schematu pręta ściskanego. Momenty krytyczne obliczone w ten sposób wynoszą:

dla powłoki regularnej

$$(4.1) \quad M_1 = (1,95 + 3,57 \sqrt{k}) \beta_1 F_w K \sqrt{R^3/t},$$

dla powłoki załamanej

$$(4.2) \quad M_2 = (2,02 + 8,98 \sqrt{k}) (\beta_2 E F_w K)^{1/2} R^{3/4} t^{3/4}.$$

Zasada racjonalnego wymiarowania żeber poprzecznych polega na tym, aby obliczeniowa nośność powłoki nie została zakwestionowana na skutek groźby zakłębienia. Przez obliczeniową nośność powłoki rozumiemy tutaj graniczny moment zginający, który nie wywoła odkształceń plastycznych w przekroju powłoki oddalonym od wręgi.

Przedyskutujemy kwestię, jak wielki jest moment dopuszczalny ze względu na odkształcenia plastyczne, bowiem lokalne przekroczenie granicy plastyczności następuje przy zgoła niedużych obciążeniach, a to na skutek koncentracji naprężeń w powłoce w pobliżu wręgi. Sprawdźmy to obliczając naprężenie zastępcze wg warunku plastyczności Hubera:

$$(4.3) \quad \sigma_{zast} = \frac{E}{1 - \nu^2} \sqrt{(1 + \nu^2) \varepsilon_x^2 + 2 \nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + (1 + \nu^2) \varepsilon_\theta^2 + \frac{3}{4} (1 - \nu)^2 \gamma_{x\theta}^2} = K,$$

gdzie jak poprzednio  $K$  jest granicą plastyczności lub normowym naprężeniem granicznym.

Dla zewnętrznej warstwy powłoki ( $r = R + t/2$ ) i współczynnika Poissona jak dla stali ( $\nu = 0,3$ ) obliczamy odkształcenia  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\gamma_{x\theta}$  z równań geometrycznych teorii powłok cylindrycznych [7]

$$(4.4) \quad \sigma_{zast} = 1,047 E/R \left\{ [(\bar{u}' - \sqrt{3k} \bar{w}'')^2 + 0,550 (\bar{u}' - \sqrt{3k} \bar{w}') (\bar{v} + \bar{w}) + (\bar{v} + \bar{w})^2] \cos^2 \theta + (0,337 - 1,66 \sqrt{k}) [\bar{u} - (1 + 2\sqrt{3k}) \bar{v}' + - (2 + \sqrt{3k}) \sqrt{3k} \bar{w}']^2 \sin^2 \theta \right\}^{1/2},$$

gdzie  $\bar{u} = u/\cos \theta$ ,  $\bar{v} = v/\sin \theta$ ,  $\bar{w} = w/\cos \theta$ .

W przekroju usztywnionym ( $\xi = 0$ ), we włóknie górnym ( $\theta = 0$ ) lub dolnym ( $\theta = \pi$ ) zachodzi największe wyężenie powłoki. W powłoce izotropowej uźbrowanej poprzecznie naprężenie zastępcze w tych warunkach wynosi

$$(4.5) \quad \sigma_{zast} = [(1,407 - 0,897 \sqrt{k}) \varepsilon + (2,76 + 3,56 \sqrt{k}) k^{1/4} \varphi] E.$$

Podstawiając zależność odkształcenia  $\varepsilon$  od momentu  $M$  (1.16), obliczamy dla regularnego stanu powłoki ( $\varphi = 0$ ) i warunku  $\sigma_{zast} = K$  moment  $M_3$ , przy których zachodzą pierwsze odkształcenia plastyczne,

$$(4.6) \quad M_3 = (1,942 + 1,075 \sqrt{k}) tKR^2.$$

W świetle pierwszego twierdzenia (metoda statyczna) teorii plastycznej równowagi granicznej [18] moment  $M_3$  jest kresem dolnym nośności granicznej powłoki. Nazwiemy go dolną granicą załomu plastycznego.

Górną granicę załomu plastycznego  $M_4$ , czyli kres górny nośności granicznej, obliczymy stosując drugie twierdzenie (metoda kinematyczna) teorii plastyczności, jednakże nie dla modelu sztywno-plastycznego lecz dla rury zgiętej sprężystie, w której utworzył się przegub plastyczny wzdłuż całego obwodu w przekroju usztywnionym. Dzięki uwzględnieniu odkształceń sprężystych możemy rozpatrywać wirtualny obrót  $2\delta\varphi \cos \theta$  w tym przegubie i jest to kinematycznie możliwe. Dysypacja energii w przegubie plastycznym wynosi

$$(4.7) \quad \delta W = 2 \delta\varphi R \int_{-\pi}^{+\pi} m_{red} |\cos \theta| d\theta,$$

gdzie  $m_{red}$  jest to moment zredukowany ze względu na siłę podłużną [18]

$$(4.8) \quad m_{red} = m_{pl} \left[ 1 - \left( \frac{n}{n_{pl}} \right)^2 \right].$$

Przy pominięciu zaburzeń, jakie zachodzą w rozkładzie sił podłużnych na skutek sąsiedztwa wręgi, mamy dla czystego zginania rury

$$(4.9) \quad n = D\varepsilon \cos \theta;$$

stąd

$$(4.10) \quad m_{red} = 0,25t^2 K - 0,122 \frac{M^2}{KR^4} \cos^2 \theta,$$

a więc

$$(4.11) \quad \delta W = [t^2 KR - 0,0813 M^2 / KR^3] \delta\varphi.$$

Pracę wirtualną sił zewnętrznych obliczamy mnożąc moment  $M$  przez przyrost kąta ugięcia, a więc wg (2.32) mamy

$$(4.12) \quad \delta\Phi = \frac{M}{R} \delta C_6 = (0,314 - 0,114 \sqrt{k}) \sqrt{k} M \delta\varphi.$$

Porównując  $\delta W = \delta \Phi$  wyprowadzamy równanie określające  $M_4$ :

$$(4.13) \quad M_4^2 - (3,86 - 1,40 \sqrt{k}) \sqrt{k} KR^3 M_4 - 12,29 t^2 K^2 R^4 = 0.$$

Wykorzystując możliwości uproszczeń ze względu na małe  $k$  obliczamy

$$(4.14) \quad M_4 = (2,90 + 0,373 \sqrt{k}) tKR^2.$$

Gdy moment zginający rurę osiągnie wartość krytyczną  $M$ , której kres dolny i kres górny oszacowano, jak następuje  $M_3 \leq M \leq M_4$ , zachodzi spontaniczne załamanie blachy w formie obrotu w przegubie plastycznym. Ruch ten nie jest jednak równoznaczny z «płynięciem plastycznym» powłoki, gdyż wręga, jeśli tylko ma wystarczającą wytrzymałość, pozwala na dalszą pracę powłoki. Zachodzi więc swojego rodzaju «wzmocnienie plastyczne».

Następną z kolei wartością graniczną jest

$$(4.15) \quad M_5 = KI/R = \pi tKR^2;$$

jest to granica zginania sprężystego dla przekrojów oddalonych od wręgi.

Najwyższa, nieprzekraczalna wartość wynosi

$$(4.16) \quad M_6 = 2tKR^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 4tKR^2;$$

jest to granica zginania plastycznego.

Na rysunku 8 przedstawiono stany statecznej i niestatecznej równowagi powłoki. We współrzędnych bezwymiarowych zaznaczono momenty graniczne  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $M_5$  i  $M_6$  w zależności od ugięcia  $f$  osi walca w dowolnym niepoczątkowym przekroju ( $\xi = 0$ ). Momenty krytyczne  $M_1$  i  $M_2$  dla walca sprężystego i sprężysto-plastycznego zależą od wielu parametrów i dlatego odpowiednie punkty naniesione na rys. 8 należy uważać jako przykładowe, przy czym nie zawsze  $M_2 < M_5$ , jak to ma miejsce w tym przykładzie (walec  $\varnothing 4000 \times 4$ , wręga 1/2 I 160). Jest to przykład niewystarczającego usztywnienia powłoki.

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. BECKER, *Handbook of Structural Stability*. Part VI. *Strength of Stiffened Curved Plates and Shells*, NACA TN 3786. Washington 1958.
2. H. BECKER, G. GERARD, *Elastic stability of orthotropic shells*, J. Aerospace Sci., 4, 29 (1962), 105-114.
3. А. Н. ДИННИК, *Устойчивость арок*, Москва-Ленинград 1946.
4. L. H. DONNELL, *A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending*, Trans. ASME, 11, 56 (1934), 795-806.
5. D. D. DSCHOU, *Die Druckfestigkeit versteifter zylindrischer Schalen*, Luftfahrtforschung, 3, 11 (1935), 223-234.
6. W. FLÜGGE, *Die Stabilität der Kreiszylinderschalen*, Ing.-Archiv., 5, 3 (1932), 463-506.
7. W. FLÜGGE, *Stresses in Shells*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1966.
8. G. GERARD, *Minimum Weight Analysis of Compression Structures*, New York 1956.
9. G. GERARD, *Plastic stability theory of geometrically orthotropic plates and cylindrical shells*, J. Aerospace Sci., 8, 29 (1962), 956-962.

10. N. J. HOFF, *General instability of monocoque cylinders*, J. Aerospace Sci., 4, 10 (1943), 105-114.
11. Е. Янкэ и Ф. Емдэ, *Таблицы функции с формулами и кривыми* (tłumacz. gosyjskie), Москва 1959.
12. E. KAMKE, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, 5 wyd., Lipsk 1956.
13. L. H. KÁRMÁN, H. S. TSIEN, *The buckling of thin cylindrical shells under axial compression*, J. Aeron. Sci., 8, 8 (1941), 303-312.
14. H. LUNDGREN, *Powłoki walcowe* [tłum.], Arkady 1963.
15. J. MURZEWSKI, *Stateczność ogólnie żebrowanych powłok walcowych przy zginaniu*, II Konferencja Naukowo-Techniczna, Konstrukcje Metalowe w Budownictwie i Mostownictwie.
16. J. MURZEWSKI, *Badania doświadczalne żebrowanych powłok cylindrycznych na tle klasyfikacji możliwych form niestateczności*, Czasopismo Techniczne, 1, 70 (1965), 1-7.
17. J. MURZEWSKI, *Tests on models of cylindrical shells*, Arch. Inżyn. Ładow., 3, 13 (1967), 375-397.
18. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK i in., *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
19. P. SEIDE i V. J. WEINGARTEN, *On the buckling of circular cylindrical shells under pure bending*, J. Appl. Mech., 1, 28 (1961), 112-116.
20. T. R. SHANLEY, *Weight — Strength Analysis of Aircraft Structures*, New York-Toronto-London 1952.
21. J. L. TAYLOR, *The Stability of a Monocoque in Compression*, R.M. No 1679, British A.R.C., 1935.

### Резюме

#### УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦА ЖЕСТКОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗОГНУТОГО ЦИЛИНДРА

Вопрос общей неустойчивости для ребристой цилиндрической оболочки не был до сих пор достаточно решен, не смотря на многие работы на эту тему [1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 и 21]. Автор исходит из предположения, что хлопок ребристых оболочек наступает другим способом, нежели это выяснено для изотропных оболочек [13 и 19], а именно вследствие концентрации напряжений и пластических деформаций оболочки в месте ее соединения с поперечным ребром. В дополнении, отдельно опубликованных экспериментальных исследований и упрощенного анализа несущей способности [16 и 17], представлено в этой работе теоретический анализ проблемы подкрепления. Он охватывает вопрос изгиба бесконечной трубы, усиленной одним „дискретным” шпангоутом, при предположении изотропной [формулы (1.12), (1.13), (1.14) и (1.20)], а также ортотропной структуры оболочки [формулы (3.2), (3.10) и (3.11)].

Решение основывается на дифференциальных уравнениях для цилиндрической оболочки В. Флюгге, (1.1) или (3.4). Определяются упругие воздействия, передаваемые из оболочки на шпангоут (1.22), а также действие „второго порядка” вертикальных составляющих продольных сил (1.23) в пластическом случае перелома оболочки вдоль кольца. Для этих типов нагрузок (рис. 4) проводятся анализ упругой устойчивости кольцеобразного шпангоута. Для случая регулярной (непереломленной) оболочки автором получены критические значения продольной силы в кольце (2.10), а для случая же переломленной оболочки шпангоуту будет угрожать сжатие и изгиб (2.15) и (2.27). На основании этих результатов описывается поведение изгибаемой трубы, в общем случае (рис. 8). Пределом несущей способности является, как правило, образование пластического изгиба оболочки и выпучивание шпангоута, что вызывает всей трубы. Только в случае очень крепкого поперечного подкрепления может произойти частичное или почти полное приведение в пластическое состояние тонкостенной ребристой оболочки.

## S u m m a r y

THE STABILITY PROBLEM OF A STIFFENING RING  
OF AN ELASTIC-PLASTIC CYLINDER SUBJECT TO BENDING

The problem of general instability of a ribbed cylindrical shell has not yet been solved in a satisfactory manner, although many works have been done in this domain, [1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 and 21].

The present author's considerations are based on the assumption, that the way in which the collapse of a ribbed shell is produced, is different than described for isotropic shells in Refs. [13] and [19], and proceeds by stress concentration and plastic strain of the shell at the place of its connection with a transversal rib. As a complement to the experimental investigations and the simplified analysis of the limit load, published in separate papers, [16, 17], the present work contains a theoretical study of the problem considered. It is concerned with the bending of an infinitely long tube stiffened by a single concentrated ring, assuming that the structure is isotropic [Eqs. (1.12), (1.13), (1.14) and (1.20)] or orthotropic [Eqs. (3.9), (3.10) and (3.11)].

The solution is based on the differential equations of W. Flügge (1.1) or (3.4) for cylindrical shells. The elastic action of the shell on the ring (1.22) is determined as well as the "second order" action of the vertical components of the membrane forces (1.23) in the case of formation of a plastic hinge along the ring. For such type loads (Fig. 4) the stability of the elastic stiffening ring is analysed. In the case of a regular shell (with no plastic hinge) the critical value of the longitudinal force in the ring is obtained. In the case of formation of a plastic hinge the ring is subject to compression and bending, (2.15), (2.27). On the basis of these results the behaviour of a bent tube is described in the general case (Fig. 8).

The load limit is marked, as a rule, by the formation of a plastic hinge and the buckling of the shell which produces the collapse of the tube. Only in the case of very strong transversal ribs a thin-walled ribbed shell can become plastic partially or almost completely.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 listopada 1967 r.*

---