

**O ROZWIĄZYWANIU DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIĘŃ
TEORII NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH**

JAN FILIPKOWSKI (GDAŃSK)

1. Uwagi wstępne

W pracy [2] wyprowadzono i przedyskutowano ogólne (zespolone) rozwiązanie równań teorii naprężeń cieplnych dla przypadku dwuwymiarowego oraz wskazano możliwość zastosowania go do rozwiązania konkretnych zagadnień brzegowych. Obecnie zajmujemy się dalszym zastosowaniem podanych w pracy [2] zależności przy rozwiązywaniu szczególnych dwuwymiarowych zagadnień teorii naprężeń cieplnych.

Najpierw rozpatrzmy zagadnienie rozkładu naprężeń w półprzestrzeni sprężystej, na którą działa skupione liniowe źródło ciepła o stałej intensywności, położone równoległe do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń. Z przypadku tego, uwzględniając właściwe wielkości ν , k (płaski stan naprężenia), otrzymamy rozwiązanie dla tarczy o kształcie półpłaszczyzny poddanej działaniu skupionego źródła ciepła i posiadającej doskonałą izolację termiczną na powierzchniach bocznych. Poniżej rozwiązanie to zostanie określone jako rozwiązanie dla półpłaszczyzny poddanej działaniu skupionego źródła ciepła.

Następnie zajmujemy się rozkładem naprężeń w przestrzeni sprężystej, w której działają dwa skupione liniowe źródła ciepła również o stałej intensywności, przy czym jedno z nich posiada intensywność ujemną, a drugie dodatnią. Przypadek ten rozpatrzmy jeszcze przy założeniu, że w przestrzeni sprężystej istnieje pustka w kształcie walca, którego pobocznica jest równoległa do linii działania źródeł ciepła. Rozwiązanie przeprowadzimy dla przypadku, gdy przekrój poprzeczny walca jest elipsą, która przy granicznym przejściu może przyjąć kształt koła lub szczeliny.

Podobnie jak w pierwszym zagadnieniu tak i tutaj z otrzymanego rozwiązania przez zmianę odpowiednich stałych dochodzi się do rozwiązania dla tarczy nieskończonej, posiadającej na brzegu doskonałą izolację termiczną i poddaną działaniu skupionych źródeł ciepła. W rozważaniach szczegółowych przypadek ten zostanie określony jako rozwiązanie dla płaszczyzny nieskończonej z otworem eliptycznym.

W zakończeniu pracy zostaną podane sugestie odnośnie rozwiązania innych zagadnień z teorii naprężeń cieplnych ze szczególnym podkreśleniem przypadku, gdy pole temperatur jest nieciągłą funkcją.

2. Rozwiązanie dla półpłaszczyzny

Niech w ciele mającym kształt dolnej półpłaszczyzny działa w punkcie \bar{z}_0 skupione źródło ciepła o stałej intensywności i niech na brzegu półpłaszczyzny $y = 0$ panuje stała temperatura $T_0 = 0$. Temperaturę wewnątrz ciała wyznaczamy za pomocą zespolonego potencjału przepływu cieplnego. W rozpatrywanym przypadku temperaturę określa wzór

$$(2.1) \quad T(x, y) = \frac{W}{2\lambda\pi} \ln \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}$$

lub wzór

$$(2.2) \quad T(z, \bar{z}) = \frac{W}{4\lambda\pi} [\ln(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) - \ln(z - \bar{z}_0)(\bar{z} - z_0)].$$

Naprężenie i przemieszczenia w ciele wyznaczamy z formuł

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\Phi^-(z) + \overline{\Phi^-(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 [(\bar{z} - z) \Phi'^-(z) - \Phi^-(z) - \overline{\Phi^+(z)}] - 2k \frac{\partial I(z, \bar{z})}{\partial z}, \\ 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= \kappa \Phi^-(z) + \overline{\Phi^+(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'^-(z)} + k \frac{\partial I(z, \bar{z})}{\partial x}, \end{aligned}$$

gdzie $I(z, \bar{z}) = \int T(z, \bar{z}) dz$.

Funkcję $I(z, \bar{z})$ obliczamy zgodnie z uwagami podanymi w p. 11 pracy [2]; w wyniku otrzymamy

$$(2.4) \quad I(z, \bar{z}) = \frac{W}{4\lambda\pi} [(z - z_0) \ln(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) - (z - \bar{z}_0) \ln(z - \bar{z}_0)(\bar{z} - z_0) + z_0 - \bar{z}_0],$$

skąd następnie dochodzimy do wzorów

$$(2.5) \quad \begin{aligned} K(z, z) &= \frac{\partial I(z, \bar{z})}{\partial z} = \frac{W}{4\lambda\pi} \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} - \frac{\bar{z} - z_0}{z - \bar{z}_0} \right), \\ \overline{K(z, \bar{z})} &= \frac{\partial I(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{W}{4\lambda\pi} \left(\frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} - \frac{z - \bar{z}_0}{\bar{z} - z_0} \right), \\ \left[\frac{\partial I(z, \bar{z})}{\partial x} \right]_{z=t} &= \overline{K(t, t)} = -\frac{W}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left(\frac{1}{t - \bar{z}_0} + \frac{1}{t - z_0} \right). \end{aligned}$$

Mając określone powyższe wielkości stosunkowo prosto wyznacza się stan naprężenia w ciele przy następujących warunkach brzegowych (rys. 1).

1. Brzeg ciała na całym konturze L jest wolny od naprężeń. Warunek brzegowy napiszemy wykorzystując zależność

$$(2.6) \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi^-(z) - \overline{\Phi^+(z)} + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'^-(z)} - kT(z, \bar{z}) - k\overline{K(z, \bar{z})}.$$

W rozpatrywanym przypadku przyjmie on postać

$$(2.7) \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{W}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left(\frac{1}{t - \bar{z}_0} + \frac{1}{t - z_0} \right).$$

Rozwiązaniem równania (2.7) jest funkcja

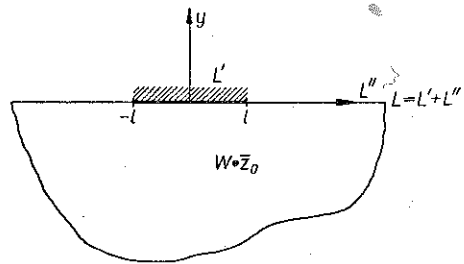
$$(2.8) \quad \Phi(z) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - \bar{z}_0} + \frac{1}{t - z_0} \right) \frac{dt}{t - z_0},$$

która po obliczeniu całki daje

$$(2.9) \quad \Phi^+(z) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_0}, \quad \Phi^-(z) = -\frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0}.$$

Do obliczenia naprężeń potrzebne będą jeszcze funkcje

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \overline{\Phi^-(z)} &= -\frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0}, \\ \Phi^{-\prime}(z) &= \frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, \\ \overline{\Phi^+(z)} &= -\frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}. \end{aligned}$$



Rys. 1

Tak więc postawione zagadnienie można uważać za rozwiązane ze względu na to, że dalsza czynność sprowadza się do podstawienia funkcji (2.9) i (2.10) do wzorów (2.3)₁ i (2.3)₂ oraz wydzielenia części rzeczywistej i urojonej odpowiednich funkcji, a więc do czynności, która zawsze daje się wykonać.

W naszym przypadku wzory na naprężenia będą miały postać:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{Wk}{2\lambda\pi} \left\{ \ln \frac{r_2}{r_1} + x^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - \frac{2y_0}{r_2^4} [(y - 2y_0)r_2^2 + 2x^2y] \right\}, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Wk}{2\lambda\pi} \left\{ \ln \frac{r_2}{r_1} - x^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - \frac{2yy_0}{r_2^4} [(y + y_0)^2 - x^2] \right\}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{Wk}{2\lambda\pi} \left[\frac{x(y - y_0)}{r_1^2} - \frac{x(y + y_0)}{r_2^2} + \frac{2xy(x^2 + y_0^2 - y^2)}{r_2^4} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_2 &= |z - z_0| = |z - iy_0| = [x^2 + (y + y_0)^2]^{1/2}, \\ r_1 &= |z - \bar{z}_0| = |z + iy_0| = [x^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Naprężenia określone wzorami (2.11) przy wartości $k = E\alpha_T/2$ (płaski stan naprężenia) są identyczne z naprężeniami, jakie można spotkać dla tego przypadku w pracy [4].

2. Brzeg ciała na całym konturze L jest utwierdzony. W tym przypadku związek brzegowy otrzymamy wykorzystując wzór (2.3)₃. Będzie on miał postać

$$(2.12) \quad \Phi^-(t) + \varkappa \Phi^-(t) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left(\frac{1}{t - \bar{z}_0} + \frac{1}{t - z_0} \right).$$

Po podstawieniu $\Phi^+(t) = \Omega^+(t)$ i $\varkappa \Phi^-(t) = -\Omega^-(t)$ zależność (2.12) przyjmie postać

$$(2.13) \quad \Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left(\frac{1}{t - \bar{z}_0} + \frac{1}{t - z_0} \right).$$

Widzimy więc, że związek (2.13) jest identyczny z (2.7) i dlatego od razu można podać postać funkcji $\Omega(z)$, a tym samym i postać funkcji $\Phi(z)$.

Potrzebne do obliczenia naprężeń funkcje odpowiednio wynoszą:

$$(2.14) \quad \Phi^+(z) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_0}, \quad \Phi^-(z) = \frac{Wk}{4\varkappa\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0}, \quad \overline{\Phi^-(z)} = \frac{Wk}{4\varkappa\lambda\pi} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$

$$\Phi^{-'}(z) = -\frac{Wk}{4\varkappa\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, \quad \overline{\Phi^+'(z)} = -\frac{Wk}{4\lambda\pi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0}.$$

Obliczone na podstawie związków (2.3)₁, (2.3)₂ i (2.14) naprężenia są następujące:

$$(2.15) \quad \sigma_{xx} = -\frac{Wk}{2\lambda\pi} \left\{ \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{y_0}{\varkappa r_2^4} [(5 - \varkappa) x^2 y + (1 - \varkappa) y^3 + (5 - 3\varkappa) y^2 y_0 + (7 - 3\varkappa) y y_0^2 + (3 - \varkappa) y_0 (x^2 + y_0^2)] + x^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right\},$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Wk}{2\lambda\pi} \left\{ \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{y_0}{\varkappa r_2^4} [(\varkappa - 1) x^2 y + (\varkappa + 3) y^3 + (3\varkappa + 7) y^2 y_0 + (3\varkappa + 5) y y_0^2 + (\varkappa + 1) x^2 y_0 + (\varkappa + 1) y_0^3] - x^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right\},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{Wk}{2\lambda\pi} \left\{ \frac{xy_0}{\varkappa r_2^4} [(\varkappa - 1) x^2 + (\varkappa + 3) y^2 + 2(\varkappa + 1) y y_0 + (\varkappa - 1) y_0^2] + \frac{x(y - y_0)}{r_1^2} - \frac{x(y + y_0)}{r_2^2} \right\}.$$

Tutaj r_1 i r_2 przyjmują wartości te same co we wzorach (2.11). Łatwo zauważyć, że związki (2.15) w przypadku $\varkappa = 1$ przechodzą w zależności (2.11), co jest zgodne z uwagami zawartymi w pracy [2].

3. Brzeg ciała na części konturu L' utwierdzony, a na pozostałej części konturu L'' jest wolny od naprężeń. Warunek brzegowy na podstawie (2.6) i (2.3)₃ przyjmuje postać

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \Phi^-(t) - \overline{\Phi^-(t)} &= -k\overline{K(t, t)} \quad \text{na } L'', \\ \Phi^+(t) + \varkappa \overline{\Phi^-(t)} &= -k\overline{K(t, t)} \quad \text{na } L'. \end{aligned}$$

Tak postawione zagadnienie brzegowe możemy rozwiązać od razu lub w dwu etapach: najpierw rozpatrzyć przypadek, gdy na całym brzegu L naprężenia są równe zeru, później, gdy na odcinku L' dane są przemieszczenia odwrotnie skierowane do tych, które otrzymamy z rozwiązania pierwszego przypadku. Poniżej przeprowadzimy rozwiązanie w dwu etapach. Jest rzeczą oczywistą, że suma tych rozwiązań da nam rozwiązanie układu (2.16).

Przypadek, gdy na całym brzegu L obszaru naprężenia są równe zeru, został rozpatrzony powyżej i obecnie funkcje odpowiadającą temu rozwiązaniu oznaczmy przez $\Phi_1(z)$. Podstawiając $\Phi_1(z)$ do wzoru (2.3)₃ otrzymamy następujące wyrażenie na pochodne funkcji przemieszczeń:

$$(2.17) \quad g'(t) = 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + i \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = - \frac{Wk}{4A\pi} (z_0 - \bar{z}_0) (1 + \kappa) \frac{1}{t - z_0}.$$

Wobec tego związki brzegowe w przypadku, gdy na brzegu L'' naprężenia są równe zeru, a na brzegu L' są dane przemieszczenia, przyjmą następującą postać:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \Phi_2^-(t) - \Phi_2^+(t) &= 0 && \text{na } L'', \\ \Phi_2^+(t) + \kappa \Phi_2^-(t) &= -g'(t) && \text{na } L'. \end{aligned}$$

Ze związków (2.18) widać, że zagadnienie to sprowadza się do wyznaczenia funkcji $\Phi_2(z)$ regularnej na płaszczyźnie z z cięciem wzdłuż odcinka L' i ograniczonej w nieskończoności. W zagadnieniach brzegowych funkcji analitycznych dowodzi się, że rozwiązaniem tak postawionego problemu jest funkcja

$$(2.19) \quad \Phi_2(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{g'(t) dt}{X(t)(t-z)} + C_0 X(z),$$

przy czym $X(z) = (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta}$, gdzie $\beta = \ln \kappa / 2\pi$. Występująca po prawej stronie (2.19) wielkość C_0 jest dowolną stałą; w naszym przypadku $C_0 = 0$ ze względu na to, że wektor sił przyłożonych do łuku L' musi się równać zeru ([3], § 114). Z postaci funkcji $X(z)$ widać, że jest to funkcja dwuznaczna, z której przez narzucenie odpowiedniego warunku wyznacza się funkcję jednozyczną. Najczęściej żąda się, aby zachodziła zależność $\lim_{z \rightarrow \infty} [zX(z)] = 1$, co równoznaczne jest temu, że dana gałąź funkcji $X(z)$ dla dużych $|z|$ posiada rozwinięcie w szereg

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots +$$

Biorąc pod uwagę powyższy warunek oraz fakt, że funkcja $\Phi_2(z)$ jest regularna na płaszczyźnie z z cięciem wzdłuż odcinka L' z wyjątkiem punktu $z = z_0$, w którym posiada biegun pierwszego rzędu, występującą we wzorze (2.19) całkę możemy obliczyć (por. praca [3], §70, §110) i przedstawić następująco:

$$(2.20) \quad \int_{-l}^l \frac{g'(t)}{X(t)} \frac{dt}{(t-z)} = \frac{2\pi i}{\kappa+1} \left(\frac{g'(z)}{X(z)} - G_1 - G_\infty \right).$$

Tutaj

$$\begin{aligned}\frac{g'(z)}{X(z)} &= \frac{Wk}{4\lambda\pi} (1+\varkappa) (z_0 - \bar{z}_0) \frac{1}{z - z_0} (z+l)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z-l)^{\frac{1}{2}+i\beta}, \\ G_1 &= \frac{Wk}{4\lambda\pi} (1+\varkappa) (z_0 - \bar{z}_0) \frac{1}{z - z_0} (z_0+l)^{\frac{1}{2}-i\beta} (z_0-l)^{\frac{1}{2}+i\beta}, \\ G_\infty &= \frac{Wk}{4\lambda\pi} (1+\varkappa) (z_0 - \bar{z}_0).\end{aligned}$$

Mając obliczoną całkę (2.20) możemy teraz funkcję $\Phi_2(z)$ napisać w postaci

$$(2.21) \quad \Phi_2(z) = \frac{Wk}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left[\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z_0+l}{z+l} \right)^{\frac{1}{2}-i\beta} \left(\frac{z_0-l}{z-l} \right)^{-\frac{1}{2}+i\beta} - \right. \\ \left. - (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \right].$$

Otrzymaliśmy zatem ostateczne rozwiązanie problemu (2.18). Superpozycje rozwiązań, którym odpowiadają funkcje $\Phi_1(z)$ i $\Phi_2(z)$ dają rozwiązanie rozważanego zagadnienia. Ma ono postać

$$(2.22) \quad \begin{aligned}\Phi^+(z) &= \frac{Wk}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left[\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_0} \left(\frac{z_0+l}{z+l} \right)^{\frac{1}{2}-i\beta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{z_0-l}{z-l} \right)^{-\frac{1}{2}+i\beta} - (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \right], \\ \Phi^-(z) &= -\frac{Wk}{4\lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left[\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z_0+l}{z+l} \right)^{\frac{1}{2}-i\beta} \left(\frac{z_0-l}{z-l} \right)^{\frac{1}{2}-i\beta} + \right. \\ &\quad \left. + (z+l)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-l)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \right].\end{aligned}$$

Z podanego rozwiązania otrzymać można przez przejście graniczne, gdy $l \rightarrow 0$ rozwiązanie dla półpłaszczyzny o brzegu wolnym od naprężeń, a gdy $l \rightarrow \infty$ rozwiązanie dla półpłaszczyzny o brzegu utwierdzonym.

Naprężenia i przemieszczenia wyznaczamy ze wzorów (2.3). W tej pracy ograniczymy się do podania związków w jawnej postaci jedynie na naprężenie wzdłuż odcinka L' , tj. części zamocowanej, gdyż te naprężenia najbardziej mogą nas interesować.

Funkcję naprężeń wzdłuż zamocowanego odcinka wyznaczamy w oparciu o wzór (2.6). Związek ten w tym przypadku wskutek istnienia zależności $z = \bar{z} = t$ przyjmuje prostszą postać

$$(2.23) \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi^-(t) - \Phi^+(t) - k\overline{K(t, t)}.$$

Na części zamocowanej L' i przy uwzględnieniu (2.16)₂ dochodzimy do wzoru

$$(2.24) \quad \Phi^-(t) = -\frac{k}{\varkappa} \overline{K(t, t)} - \frac{1}{\varkappa} \Phi^+(t).$$

Wobec tego wzór (2.23) możemy teraz napisać następująco:

$$(2.25) \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = -\frac{1+\kappa}{\kappa} [\Phi^+(t) + \overline{K(t, t)}].$$

Ostateczna postać wzoru na naprężenie wzdłuż zamocowanego odcinka brzegu półpłaszczyzny po uwzględnieniu zależności (2.5)₃ i (2.22)₁ wynosi

$$(2.26) \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \frac{Wk(1+\kappa)}{4\kappa\Lambda\pi} (z_0 - \bar{z}_0) \left[\frac{1}{t - z_0} \left(\frac{z_0 + l}{t + l} \right)^{\frac{1}{2} + i\beta} \left(\frac{z_0 - l}{t - l} \right)^{\frac{1}{2} + i\beta} + \right. \\ \left. + (t+l)^{-\frac{1}{2} + i\beta} (t-l)^{-\frac{1}{2} - i\beta} \right].$$

Tak więc otrzymaliśmy stosunkowo prosty wzór na określenie naprężeń wzdłuż zamocowanego odcinka półpłaszczyzny sprężystej, na którą działa skupione źródło ciepła przyłożone w punkcie z_0 . Wyznaczenie naprężeń σ_{yy} i σ_{xy} sprowadza się teraz do wydzielenia części rzeczywistej i urojonej funkcji (2.26). Czynność ta nie jest zbyt trudna w i wyniku prowadzi do następujących formuł.

Przypadek gdy źródło ciepła przyłożone jest w punkcie $z_0 = x_0 - iy_0$:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} &= N(n \cos \gamma - m \sin \gamma) + M \cos \gamma, \\ \sigma_{xy} &= -N(n \sin \gamma + m \cos \gamma) - M \sin \gamma. \end{aligned}$$

Tutaj wielkości N, M, n, m i γ odpowiednio wynoszą

$$(2.28) \quad \begin{aligned} N &= \frac{Wk(1+\kappa)}{2\sqrt{\kappa}\Lambda\pi} y_0 e^{\beta \arg \frac{z_0+l}{z_0-l}} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{l^2 - t^2}}, \\ M &= \frac{Wk(1+\kappa)}{2\sqrt{\kappa}\Lambda\pi} \frac{y_0}{\sqrt{l^2 - t^2}}, \\ n &= \frac{t - x_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} \cos \left[\beta \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2} \arg (z_0 - l)(z_0 + l) \right] - \\ &\quad - \frac{y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} \sin \left[\beta \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2} \arg (z_0 - l)(z_0 + l) \right], \\ m &= \frac{t - x_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} \sin \left[\beta \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2} \arg (z_0 - l)(z_0 + l) \right] + \\ &\quad + \frac{y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2} \cos \left[\beta \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2} \arg (z_0 - l)(z_0 + l) \right], \\ \gamma &= \beta \ln \frac{l+t}{l-t}, \end{aligned}$$

przy czym $r_1 = |z_0 - l| = [(x_0 - l)^2 + y_0^2]^{1/2}$, a $r_2 = |z_0 + l| = [(x_0 + l)^2 + y_0^2]^{1/2}$.

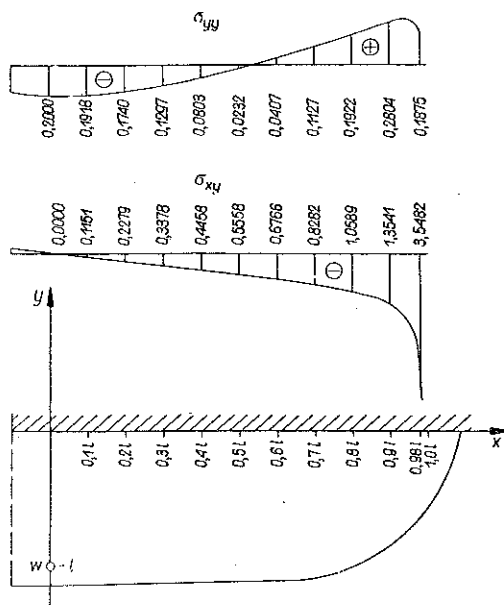
Przypadek gdy źródło ciepła działa w punkcie $z_0 = -il$:

$$(2.29) \quad \sigma_{yy} = \frac{Wk(1+\kappa)l}{2\sqrt{\kappa}\Lambda\pi\sqrt{l^2-t^2}} \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \left[\frac{l^2}{l^2+t^2} \cos\left(\beta \ln \frac{l+t}{l-t}\right) + \frac{lt}{l^2+t^2} \sin\left(\beta \ln \frac{l+t}{l-t}\right) \right] + \cos\left(\beta \ln \frac{l+t}{l-t}\right) \right\},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{Wk(1+\kappa)l}{2\sqrt{\kappa}\Lambda\pi\sqrt{l^2-t^2}} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} \left[\frac{l^2}{l^2+t^2} \sin\left(\beta \ln \frac{l+t}{l-t}\right) - \frac{lt}{l^2+t^2} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \cos\left(\beta \ln \frac{l+t}{l-t}\right) \right] - \sin\left(\beta \ln \frac{l+t}{l-t}\right) \right\}.$$

Ze wzorów (2.27) i (2.29) wynika, że wielkości σ_{yy} i σ_{xy} zmieniają znak nieskończenie wiele razy, gdy zmienna t zbliża się do wartości $-l$ lub l . Zjawisko to zachodzi na bardzo małym odcinku części utwierdzonej półpłaszczyzny sprężystej. Podobnie jest w przypadku działania stempla na półpłaszczyźnie ([3], § 114).



Rys. 2

Rozważania nasze dla przypadku półpłaszczyzny sprężystej zakończymy podaniem wykresów funkcji σ_{yy} i σ_{xy} (rys. 2) wzdłuż zamocowanego brzegu przy przyjęciu $\nu = 0,3$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (płaski stan naprężenia) i $Wk(1+\kappa)/2\sqrt{\kappa}\Lambda = 1$.

3. Rozwiązanie dla płaszczyzny nieskończonej z otworem eliptycznym

Przyjmujemy, że w ciele mającym kształt płaszczyzny nieograniczonej działa w punkcie z_0 skupione źródło ciepła o intensywności W , a w punkcie \bar{z}_0 o intensywności $-W$. Poza tym założymy, że ciało posiada wycięcie w kształcie elipsy o osiach

$a = R(1+m)$, $b = R(1-m)$, gdzie m spełnia warunek $0 \leq m \leq 1$. Otwór w płaszczyźnie jest na tyle mały, że nie powoduje zmian w rozkładzie temperatur w stosunku do płaszczyzny bez otworu.

Temperaturę wewnątrz ciała określa wzór (2.2) ze znakiem ujemnym. Naprężenie i przemieszczenia w układzie xy wyznaczamy ze wzorów

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}] - 2kT(z, \bar{z}), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 [\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] - 2kK(z, \bar{z}), \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - kI(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

gdzie

$$I(z, \bar{z}) = \int T(z, \bar{z}) dz, \quad a \quad K(z, \bar{z}) = \int \frac{\partial T(z, \bar{z}) \partial \bar{z}}{dz}$$

lub w przypadku krzywoliniowego układu $\rho\nu$ związanego z konforemnym odwzorowaniem zewnątrz elipsy na zewnętrzne koła jednostkowe za pomocą zależności $z = \omega(\zeta)$ ze wzorów

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\nu\nu} &= 2 [\Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}] - 2kT_1(\zeta, \bar{\zeta}), \\ \sigma_{\nu\nu} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\sigma_{\rho\nu} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1(\zeta) + \omega'(\zeta) \psi_1(\zeta) - k\omega(\zeta) K_1(\zeta, \bar{\zeta})], \\ 2\mu(u_\rho + iu_\nu) &= \frac{\zeta \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho^2 |\omega'(\zeta)|} \left[\kappa\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1(\zeta)} + kI_1(\zeta, \bar{\zeta}) \right]. \end{aligned}$$

Tutaj występujące funkcje z indeksem 1 oznaczają odpowiednie wielkości ze związków (3.1) po podstawieniu $z = \omega(\zeta)$ [3].

Widzimy więc, że postawione powyżej zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia postaci funkcji $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ lub $\varphi_1(\zeta)$ i $\psi_1(\zeta)$. Zanim przejdziemy do określenia funkcji $\varphi_1(\zeta)$ i $\psi_1(\zeta)$, które w dalszym ciągu pracy będziemy wprost oznaczać przez $\varphi(\zeta)$ i $\psi(\zeta)$ zwróćmy uwagę, że w przypadku, gdy te funkcje równają się tożsamościowo zeru, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie dla nieskończonej płaszczyzny sprężystej, na którą działają dwa źródła ciepła, jedno w punkcie z_0 o intensywności W , a drugie w punkcie \bar{z}_0 o intensywności $-W$.

Teraz zajmiemy się określeniem funkcji $\varphi(\zeta)$ i $\psi(\zeta)$ w przypadku istnienia otworu w kształcie elipsy, przy czym założymy, że brzeg wycięcia (elipsy) jest utwierdzony.

Z rozwiązania jakie otrzymamy przez przyjęcie $\kappa = -1$ dojdziemy do rozwiązania, gdy na brzegu wycięcia naprężenia są równe zeru. O tej zależności była mowa w pracy [2]. Poza tym z tego, że rozwiązanie będzie przeprowadzone z wykorzystaniem odwzorowania elipsy na koło jednostkowe, będziemy mieli możliwość przez przyjęcie parametru $m = 0$ otrzymać rozwiązanie dla otworu kołowego, a dla $m = 1$ rozwiązanie dla szczeliny.

Omawiane powyżej funkcje $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ wyznaczamy z następującego związku brzegowego:

$$(3.3) \quad -\kappa\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = kI(t, t),$$

który po uwzględnieniu wzoru $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta)$ przyjmie postać

$$(3.4) \quad -\kappa\varphi(\sigma) + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \overline{\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma)} = kI(\sigma, \bar{\sigma}).$$

W pracy [3] udowadnia się, że rozwiązaniem warunku brzegowego (3.4) są funkcje

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{k}{2\kappa\pi i} \int_{\gamma} \frac{I(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - \zeta} d\zeta, \\ \psi(\zeta) &= -\frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{I(\sigma, \bar{\sigma})}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \varphi'(\zeta). \end{aligned}$$

Występujące pod całkami w (3.5) funkcje $I(\sigma, \bar{\sigma})$ i $\overline{I(\sigma, \bar{\sigma})}$ w rozpatrywanym przypadku odpowiednio wynoszą

$$(3.6) \quad \begin{aligned} I(\sigma, \bar{\sigma}) &= \frac{WR}{4\Delta\pi} \left\{ \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right) \left[\ln \frac{(\sigma - \bar{\zeta}_0) \left(\sigma - \frac{\bar{\zeta}_0}{m} \right)}{(\sigma - \zeta_0) (\sigma - \bar{\zeta}_0)} + \ln \frac{\left(\sigma - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\sigma - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right)}{\left(\sigma - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \right) \left(\sigma - \frac{m}{\zeta_0} \right)} \right] + \right. \\ &\quad + \left(\zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} \right) \ln \frac{R^4 m \left(\sigma - \frac{m}{\zeta_0} \right) (\sigma - \zeta_0) \left(\sigma - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \right) \left(\sigma - \frac{\bar{\zeta}_0}{m} \right)}{\sigma^2} - \\ &\quad - \left(\zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} \right) \ln \frac{R^4 m \left(\sigma - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right) (\sigma - \bar{\zeta}_0) \left(\sigma - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\sigma - \frac{\zeta_0}{m} \right)}{\sigma^2} + \\ &\quad \left. + \zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} - \bar{\zeta}_0 - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right\}, \\ \overline{I(\sigma, \bar{\sigma})} &= \frac{WR}{4\Delta\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma \right) \left[\ln \frac{(\sigma - \bar{\zeta}_0) \left(\sigma - \frac{\zeta_0}{m} \right)}{(\sigma - \zeta_0) \left(\sigma - \frac{\bar{\zeta}_0}{m} \right)} + \ln \frac{\left(\sigma - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\sigma - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right)}{\left(\sigma - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \right) \left(\sigma - \frac{m}{\zeta_0} \right)} \right] + \right. \\ &\quad + \left(\bar{\zeta}_0 + \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right) \ln \frac{R^4 m \left(\sigma - \frac{m}{\zeta_0} \right) (\sigma - \zeta_0) \left(\sigma - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \right) \left(\sigma - \frac{\bar{\zeta}_0}{m} \right)}{\sigma^2} - \\ &\quad - \left(\zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} \right) \ln \frac{R^4 m \left(\sigma - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right) (\sigma - \bar{\zeta}_0) \left(\sigma - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\sigma - \frac{\zeta_0}{m} \right)}{\sigma^2} - \\ &\quad \left. - \bar{\zeta}_0 + \frac{m}{\bar{\zeta}_0} - \zeta_0 - \frac{m}{\zeta_0} \right\}. \end{aligned}$$

Mając funkcje (3.6) w postaci wyraźnej możemy wykorzystując ich własności obliczyć całki występujące we wzorach (3.5) i w rezultacie będziemy mieli poszukiwane funkcje $\varphi(\zeta)$ i $\psi(\zeta)$. Funkcje te mają postać

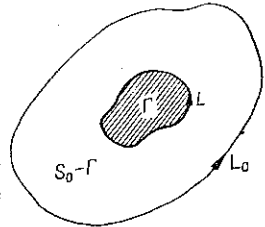
$$\begin{aligned}
 \varphi(\zeta) = & \frac{WkR}{4\kappa\lambda\pi} \left[\left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \ln \frac{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta_0} \right)}{\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right)} - \left(\zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} \right) \ln \frac{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta_0} \right)}{\zeta^2} + \right. \\
 (3.7) \quad & \left. + \left(\bar{\zeta}_0 + \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right) \ln \frac{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta_0} \right)}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta_0} (1-m) - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} (1-m) \right], \\
 \psi(\zeta) = & -\frac{WkR}{4\lambda\pi} \left[\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \ln \frac{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta_0} \right)}{\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right)} - \left(\bar{\zeta}_0 + \frac{m}{\bar{\zeta}_0} \right) \ln \frac{\left(\zeta - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta_0} \right)}{\zeta^2} + \right. \\
 & \left. + \left(\zeta_0 + \frac{m}{\zeta_0} \right) \ln \frac{\left(\zeta_0 - \frac{1}{\zeta_0} \right) \left(\zeta - \frac{m}{\zeta_0} \right)}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta_0} (1-m)m - \frac{1}{\bar{\zeta}_0} (1-m)m \right] - \\
 & - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \varphi'(\zeta).
 \end{aligned}$$

Tak więc postawione w p. 3 zagadnienie zostało definitywnie rozwiązane.

4. Rozwiązanie dla przypadku nieciągłego pola temperatury

Jak zobaczymy poniżej, za pomocą tej metody można również bardzo prosto rozwiązać zagadnienie teorii naprężeń cieplnych w przypadku nieciągłego pola temperatury.

Nadmienimy, że z nieciągłym polem temperatury mamy do czynienia wtedy, gdy część obszaru ciała Γ ogrzana będzie do temperatury T różnej od zera, a pozostała część ciała utrzymana będzie w temperaturze zerowej (rys. 3). Stan taki otrzymamy również w przypadku, w którym część ciała ogrzana będzie do stałej temperatury T_e a część $S_0 - \Gamma$ do temperatury T_i . Wówczas stan końcowy naprężeń jest taki, jak gdyby w pierwszej części ciała, tj. Γ , panowała temperatura $T_e - T_i$, w pozostałej temperatura była równa zero.



Rys. 3

W rozważaniach poniższych przeprowadzonych dla dwuwymiarowego przypadku przyjmiemy, że funkcja temperatury T panującej w obszarze Γ , zgodnie z założeniem w pracy [2], jest funkcją analityczną swoich zmiennych z wyjątkiem

skończonej liczby punktów, w których może posiadać osobliwość typu logarytmicznego.

W pracy [3], § 109 podano proste rozwiązanie następującego dwuwymiarowego zagadnienia: dane jest sprężyste ciało z pewną liczbą otworów, w które należy wmontować odpowiednie elementy z tego samego materiału i zapewnić im ciągłość z całym ciałem. Dopuszcza się, że wstawiane elementy mogą posiadać wymiary nieco większe lub mniejsze od wymiarów otworów. W tak pomyślanym ciele po wypełnieniu otworów znana jest nieciągłość funkcji przemieszczeń przy przejściu przez kontury otworów i w związku z tym istnieje możliwość określenia stanu naprężeń i funkcji przemieszczeń w całym ciele przy dowolnych warunkach brzegowych na zewnętrznym konturze.

Nie trudno dojść do wniosku, że ten sposób rozwiązania może być z powodzeniem zastosowany do rozwiązywania zagadnień w przypadku nieciągłego pola temperatur np. do zagadnienia przedstawionego na rys. 3. Dla przeprowadzenia dowodu należy myślowo z ciała S_0 wyciąć ciało o obszarze Γ i określić w nim stan naprężeń i funkcje przemieszczeń przy danej temperaturze T z założeniem, że brzeg ciała jest wolny od naprężeń. Znajomość funkcji przemieszczeń w ciele Γ pozwala określić przemieszczenia wzdłuż konturu i tym samym sprowadza nasze zagadnienie do zagadnienia omówionego w pracy [3].

Poniżej przykładowo naszkicujemy tok postępowania przy rozwiązaniu dla obszaru jednospójnego i skończonego (rys. 3), którego brzeg L_0 jest wolny od naprężeń i następnie zilustrujemy to na prostym zagadnieniu.

Zgodnie z tym co powiedziano powyżej musimy przede wszystkim określić przemieszczenia na brzegu L w wyciętym myślowo ciele Γ . Z poprzednich rozważań wiemy, że przemieszczenia te będą wynosić

$$(4.1) \quad 2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi_1(\tau) + \overline{\tau\varphi_1(\tau)} + \overline{\psi_1(\tau)} - kI(\tau, \bar{\tau}),$$

gdzie potencjały $\varphi_1(z)$ i $\psi_1(z)$ są rozwiązaniem dla obszaru o brzegu wolnym od naprężeń wskutek działania pola temperatur, a τ oznacza zmienną na konturze L . Znajomość funkcji przemieszczeń wzdłuż konturu L pozwala natychmiast określić skok funkcji przemieszczeń w ciele S_0 przy przejściu przez kontur L , gdyż w tym przypadku istnieje prosta zależność

$$(4.2) \quad 2\mu g(t) = -2\mu(u_x + iu_y) = -\kappa\overline{\varphi_1(\tau)} - \overline{\tau\varphi_1'(\tau)} - \overline{\psi_1(\tau)} + kI(\tau, \bar{\tau}).$$

Mając określoną nieciągłość funkcji przemieszczeń przy przejściu przez kontur L w następnym etapie musimy rozwiązać równanie

$$(4.3) \quad \varphi_0(t) + \overline{t\varphi_0'(t)} + \overline{\psi'(t)} = f_0(t) \quad \text{na } L_0.$$

Funkcja występująca po prawej stronie związku (4.3) jest następująca:

$$(4.4) \quad f_0(t) = f(t) - \varphi_*(t) - \overline{t\varphi_*'(t)} - \overline{\psi_*(t)},$$

gdzie $f(t) = i \int_{t_0}^t (\sigma_{xx} + i\sigma_{yy}) dt$, a $\varphi_*(t)$ i $\psi_*(t)$ są odpowiednio granicznymi wartościami wyrażeń

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varphi_*(z) &= \frac{\mu}{\pi i(\kappa+1)} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau-z} d\tau, \\ \psi_*(z) &= -\frac{\mu}{\pi i(\kappa+1)} \int_L \frac{\overline{g(\tau)} + \bar{\tau} g'(\tau)}{\tau-z} d\tau. \end{aligned}$$

Ostateczne rozwiązanie będzie określone w obszarze Γ przez funkcje

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \varphi_*(z), \\ \psi(z) &= \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_*(z), \end{aligned}$$

a w obszarze $S_0 - \Gamma$ przez funkcje

$$(4.7) \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_*(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_*(z).$$

Naprężenia i przemieszczenia wyznaczmy z następujących związków: w obszarze Γ — wzory (3.1); w obszarze $S_0 - \Gamma$ wzory

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \end{aligned}$$

W analogiczny sposób można zbudować rozwiązanie dla drugiego zagadnienia brzegowego, tj. gdy na konturze L_0 dane są przemieszczenia. Podobnie też dojdziemy do rozwiązania w przypadku inkluzji termicznej.

Prostotę tej metody zilustrujemy na następującym przykładzie: tarcza kołowa o promieniu $R > 1$, której brzeg jest wolny od naprężeń, poddana jest działaniu skupionego źródła ciepła działającego w środku tarczy. Na obszarze koła jednostkowego współśrodkowego tarcza posiada na powierzchniach bocznych doskonałą izolację termiczną. Na brzegu (obwodzie) koła jednostkowego panuje stała temperatura T_0 . W pozostałym obszarze tarczy temperatura jest równa zero.

Jak wykazano w pracy [2] w tarczy o promieniu jednostkowym znajdującej się w warunkach termicznych podanych wyżej i posiadającej brzeg wolny od naprężeń odpowiadają potencjały

$$(4.9) \quad \varphi_1(z) = \frac{k}{2} \left(\frac{W}{4A\pi} + T_0 \right) z, \quad \psi_1(z) = 0.$$

Przemieszczenia wzdłuż okręgu jednostkowego wynoszą

$$2\mu(u_x + iu_y) = (1 + \kappa) \left(\frac{Wk}{8A\pi} + 2T_0k \right) \tau.$$

Zatem skok funkcji przemieszczeń przy przejściu przez kontur $|z| = 1$ określony jest zależnością

$$(4.10) \quad 2\mu g(\tau) = -(1 + \kappa) \left(\frac{Wk}{8A\pi} + 2T_0k \right) \tau.$$

Wobec tego wyrażenie pod całką (4.5)₂ przyjmie postać

$$(4.11) \quad \overline{g(\tau)} + \overline{\tau}g'(\tau) = -\frac{2}{\tau}(1+\nu)\left(\frac{Wk}{8\Delta\pi} + 2T_0k\right),$$

funkcje (4.5) zaś odpowiednio będą wynosić

$$(4.12) \quad \varphi_*(z) = \begin{cases} -z\left(\frac{Wk}{8\Delta\pi} + 2T_0k\right), & \text{jeśli } |z| < 1, \\ 0, & \text{jeśli } |z| > 1; \end{cases}$$

$$\psi_*(z) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } |z| < 1, \\ -\frac{2}{z}\left(\frac{Wk}{8\Delta\pi} + 2T_0k\right), & \text{jeśli } |z| > 1. \end{cases}$$

Przechodząc do rozwiązania zależności (4.3) zauważamy, że występująca w nim funkcja $f_0(t)$ w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$(4.13) \quad f_0(t) = 2\left(\frac{Wk}{8\Delta\pi} + 2T_0k\right)\frac{t}{R^2}.$$

Samo zaś rozwiązanie równania (4.3) z prawą stroną określoną wzorem (4.13) jest bardzo proste i w wyniku prowadzi do funkcji

$$(4.14) \quad \varphi_0(z) = \left(\frac{Wk}{8\Delta\pi} + 2T_0k\right)\frac{z}{R^2}, \quad \psi_0(z) = 0.$$

W rezultacie funkcje określone wzorami (4.6) i (4.7) dla naszego szczególnego przypadku będą miały postać

$$(4.15) \quad \varphi(z) = \frac{2k}{R^2}\left(\frac{W}{16\Delta\pi} + T_0\right)z - \frac{3}{2}kT_0z, \quad \text{jeśli } |z| < 1$$

$$\psi(z) = 0$$

oraz

$$(4.16) \quad \varphi(z) = \frac{2k}{R^2}\left(\frac{W}{16\Delta\pi} + T_0\right)z, \quad \text{jeśli } 1 < |z| < R$$

$$\psi(z) = -\frac{2k}{z}\left(\frac{W}{16\Delta\pi} + T_0\right).$$

Wyznaczenie wielkości naprężeń i przemieszczeń w tym momencie staje się zagadnieniem elementarnym.

5. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych powyżej rozważań i z pracy [2] wynika, że ten sposób rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień teorii naprężeń cieplnych jest dość

prosty i co najważniejsze, efektywny. W wielu przypadkach można otrzymać zamkniętą postać rozwiązania postawionego problemu. Technika rozwiązywania omawianych zagadnień z uwagi na fakt, że potencjałom $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ odpowiada stan naprężenia w ciele wskutek przyłożenia do brzegu ciała odpowiednich naprężeń lub przemieszczeń [2], jest ta sama co w pracach [3 i 1] i innych.

Co więcej, nie musimy tutaj przechodzić od danych naprężeń lub przemieszczeń wzdłuż pewnego konturu do odpowiednich funkcji brzegowych zespolonego argumentu. Funkcje te otrzymujemy bezpośrednio z rozwiązania dla obszaru nieskończonego. Występujące w tych rozwiązaniach potencjały $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ są zawsze funkcjami regularnymi. Własność ta ma miejsce również w przypadku obszarów wielospójnych.

Literatura cytowana w tekście

1. С. М. Белоносов, *Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей*, Новосибирск 1962.
2. J. FILIPKOWSKI, *Dwuwymiarowe zagadnienie teorii naprężeń cieplnych*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966).
3. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1966.
4. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1961.

Резюме

О РЕШЕНИИ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В настоящей работе рассматриваются особые случаи двухмерных задач теории термических напряжений, а именно: задача по распространению напряжений в полуплоскости подверженной действию сосредоточенного источника тепла, задача по распространению напряжений в бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, на которое действует два сосредоточенные источника тепла, при чем один из них обладает положительной интенсивностью, а второй отрицательной. Эта задача рассматривается при разных краевых условиях.

В заключении делаются примечания, касающиеся решения других вопросов теории термических напряжений.

Подробно обсуждаются решения вопросов, в случае, когда функция температур обладает разрывностью вдоль замкнутого контура.

Все рассуждения основываются на зависимостях, приведенных в работе [2 и 3].

Summary

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE THEORY OF THERMAL STRESSES

Some particular two-dimensional problems of the theory of thermal stresses are discussed in the present paper. They are the problem of stress distribution in a semiinfinite plate subject to the action of a concentrated source of heat and the same problem for an infinite plane with an

elliptic hole acted on by two concentrated sources of heat one positive, the other negative. These problems are considered for various boundary conditions.

In conclusion are given some remarks on the solution of other problems of the theory of thermal stress.

In the case in which the temperature function is discontinuous along a closed contour the solution method of the problems considered is discussed in detail. All the considerations are based on the relations given in Refs. [2 and 3].

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1967 r.
