ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 16 (1968)

NAPRĘŻENIA, PRZEMIESZCZENIA I TEMPERATURA W OGRANICZONYM OŚRODKU SPRĘŻYSTYM PRZY UWZGLĘDNIENIU SPRZĘŻENIA TERMOMECHANICZNEGO

JAROSŁAW STEFANIAK (POZNAŃ)

Wstęp

W zagadnieniach, w których nie uwzględnia się sprzężenia termomechanicznego, można otrzymać rozwiązania układu równań przemieszczeniowych termosprężystości przez superpozycję przemieszczeń u_i^1 wywołanych polem temperatury i przemieszczeń u_i^2 niezależnych od niego. Przez odpowiedni dobór tych ostatnich przemieszczeń koryguje się przemieszczenia na brzegu rozpatrywanego obszaru w ten sposób, aby były spełnione warunki brzegowe. W przypadku uwzględnienia wpływu sprzężenia taki sposób postępowania jest niemożliwy, gdyż ewentualne dodatkowe przemieszczenia u_i^2 zmieniają pole temperatury, co z kolei ma wpływ na przemieszczenia u_i^1. Jeśli obszar jest nieograniczony, można łatwo otrzymać rozdzielenie układu równań przemieszczeniowych i równania przewodnictwa i otrzymać układ równań analogiczny do układu opisującego zagadnienie niesprzężone [1]. Zagadnienie się komplikuje, gdy obszar jest ograniczony.

W niniejszej pracy wskazana jest metoda częściowego rozdziału równań przemieszczeniowych i równania przewodnictwa ciepła za pomocą potencjału termosprężystego przemieszczenia Φ i funkcji Galerkina φ_j uogólnionych na zagadnienie sprzężenia termomechanicznego. Praca dotyczy zagadnienia quasi-statycznego (pomija się wpływ sił bezwładności). Pomija się również wpływ sił masowych. Jako przykład rozpatruje się półprzestrzeń obciążoną na płaszczyźnie ograniczającej siłą skupioną normalną do tej płaszczyzny, zmieniającą się harmonicznie w czasie.

1. Rozdzielenie równań termosprężystości

Stan ośrodka sprężystego przy uwzględnieniu wpływu temperatury, ale przy pominięciu wpływu sił masowych i sił bezwładności może być opisany układem równań [1]:

$$(1.1)\qquad \nabla^2 u_i + a\partial_i e - b\partial_i \theta = 0\,, \qquad \nabla^2 \theta - \frac{1}{\varkappa}\partial_t \theta - \eta\partial_t e = -\frac{Q}{\varkappa}\,,$$

związkami geometrycznymi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

oraz związkami fizycznymi

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma\theta)\,\delta_{ij}.$$

Przyjęto tu następujące oznaczenia:

$$a = \frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}, \qquad b = \alpha_t \frac{3\lambda+2\mu}{\mu} = 2\alpha_t \frac{1+\nu}{1-2\nu}, \qquad \varkappa = \frac{k}{c\varrho},$$

$$\gamma = (3\lambda+2\mu)\,\alpha_t, \qquad \eta = \frac{3\lambda+2\mu}{k} T_0\,\alpha_t, \qquad \theta = T - T_0, \qquad Q = \frac{W}{c\varrho},$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i};$$

poza tym μ_i oznacza przemieszczenia, ε_{ij} odkształcenia, σ_{ij} naprężenia, λ, μ stałe Lamégo, ν współczynnik Poissona, α_t współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej, k przewodnictwo cieplne, c ciepło właściwe, ϱ gęstość, T_0 temperaturę bezwzględną ciała w stanie naturalnym (beznaprężeniowym), $T = T\,(x_r, t)$ temperaturę bezwzględną ciała w punkcie badanym i w chwili badania oraz W wydajność źródła ciepła.

Ponadto powinny być spełnione warunki brzegowe dla przemieszczeń

$$u_i(x_r^0, t) = f_i(x_r^0, t),$$

albo dla naprężeń

$$\sigma_{ij}(x_r^0, t)\, n_j(x_r^0) = p_i(x_r^0, t).$$

Dla temperatury powinien być spełniony warunek początkowy

$$\theta\,(x_r, 0) = g\,(x_r)$$

oraz w ogólności warunek brzegowy

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} - h\right)\theta = G\,(x_r^0, t).$$

Symbol x_r^0 oznacza punkt leżący na powierzchni ograniczającej rozpatrywany obszar, n_j współrzędne wektora jednostkowego normalnego do tej powierzchni, $h = H/k$, gdzie H jest współczynnikiem przewodnictwa zewnętrznego.

W celu rozwiązania układu równań (1.1) wykorzystamy metodę zastosowaną przez W. Nowackiego [1] do zagadnienia dynamicznego. Metoda ta polega na wprowadzeniu pomocniczych funkcji χ_i takich, że przemieszczenia i temperatura wyrażają się za ich pomocą w postaci

$$u_i = \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)[(1+a)\nabla^2\delta_{ij} - a\partial_i\partial_j]\nabla^2\chi_j + b\partial_i\nabla^2\nabla^2\chi_4 + \eta b\partial_t(\partial_i\partial_j - \delta_{ij}\nabla^2)\nabla^2\chi_j, \tag{1.2}$$

$$\theta = \eta\partial_t\nabla^2\nabla^2\partial_j\chi_j + (1+a)\nabla^2\nabla^2\nabla^2\chi_4.$$

Funkcje χ_j spełniają równania

$$
\begin{aligned}
&\left[(1+a)\left(\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\,\partial_t\right)-\eta b\partial_t\right]\nabla^2\nabla^2\nabla^2\chi_i=0\,,\\
(1.3)\qquad &\left[(1+a)\left((\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\,\partial_t\right)-\eta b\partial_t\right]\nabla^2\nabla^2\nabla^2\chi_4=-\frac{Q}{\varkappa},\qquad i=1,2,3\,.
\end{aligned}
$$

W powyższym układzie, który jest szczególnym przypadkiem układu otrzymanego przez W. Nowackiego [1], każde z równań zawiera tylko jedną funkcję χ_i. Układ równań termosprężystości został więc rozdzielony. Wykorzystując powyższe równania można układ równań termosprężystości doprowadzić do postaci «częściowo rozdzielonej», ale w niektórych przypadkach dogodnej do obliczeń. W tym celu wprowadźmy nowe funkcje φ_t i Φ określone wzorami

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\,\partial_t\right)-\frac{\eta b}{1+a}\,\partial_t\right]\nabla^2\chi_j=\varphi_j\,,\\
(1.4)\qquad &\frac{\eta b}{1+a}\,\partial_t\,\partial_j\,\nabla^2\chi_j+b\nabla^2\nabla^2\chi_4=\Phi\,,\qquad j=1,2,3\,.
\end{aligned}
$$

Przemieszczenia i temperaturę można więc wyznaczyć za pomocą funkcji Φ i φ_j w postaci

$$
\begin{aligned}
&u_i=[(1+a)\,\nabla^2\,\delta_{ij}-a\partial_i\,\partial_j]\,\varphi_j+\partial_i\,\Phi\,,\\
(1.5)\qquad &\theta=\frac{1+a}{b}\,\nabla^2\Phi\,,\qquad i=1,2,3\,.
\end{aligned}
$$

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia funkcji φ_j i Φ. Ze wzorów (1.3) i (1.4) wynika, że funkcje φ_j są funkcjami biharmonicznymi:

$$
(1.6)\qquad \nabla^2\,\nabla^2\,\varphi_j=0.
$$

Wzory (1.5) pokazują, że przemieszczenia u_i można traktować jako sumę przemieszczeń $u_i=u_i^1+u_i^2$, gdzie $u_i^1=\partial_i\,\Phi$, $u_i^2\,[(1+a)\,\nabla^2\,\delta_{ij}-a\partial_i\,\partial_j]\,\varphi_j$. Funkcje φ_j są więc funkcjami Galerkina uogólnionymi na przypadek sprzężenia termomechanicznego.

Podstawiając u_i określone za pomocą wzorów (1.5) do ostatniego z równań (1.1) i wykorzystując równanie (1.6) otrzymamy

$$
(1.7)\qquad \frac{1+a}{b}\left(\nabla^2-\frac{1}{\varkappa'}\,\partial_t\right)\nabla^2\,\Phi-\eta\partial_t\,\nabla^2\,\partial_j\,\varphi_j=-\frac{Q}{\varkappa},
$$

gdzie

$$
\frac{1}{\varkappa'}=\frac{1}{\varkappa}+\eta\vartheta\,,\qquad \vartheta=\frac{b}{1+a}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha_t\,.
$$

Tak więc funkcje φ_j i Φ wyznaczyć można z równań (1.7) i (1.8). Przemieszczenia i temperatura będą określone za pomocą tych funkcji przez wzory (1.5) i (1.6).

Często wygodniej jest posługiwać się układem równań w nieco innej postaci. Podstawmy ze wzoru (1.6) do równania (1.8) wyrażenie $\nabla^2 \Phi = \vartheta\theta$. Wówczas równanie to wraz z układem (1.7) i wzorem (1.6) da nam następujący układ równań na wyznaczenie funkcji φ_j, Φ i θ:

$$(1.8) \qquad \nabla^2\nabla^2\varphi_j = 0, \qquad \nabla^2\Phi = \vartheta\theta, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa'}\partial_t\right)\theta - \eta\partial_t\nabla^2\partial_j\varphi_j = -\frac{Q}{\varkappa}.$$

Przemieszczenia będą wyrażone przez wzory (1.5). Naprężenia otrzymamy z następujących wzorów:

$$\sigma_{ij} = -2\mu\left[\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j\right]\Phi + \\ + \frac{2\mu}{1-2\nu}\left[(\nu\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\partial_k\varphi_k + (1-\nu)\nabla^2(\partial_j\varphi_j + \partial_i\varphi_j)\right].$$

2. Półprzestrzeń obciążona siłą skupioną zmieniającą się harmonicznie

2.1. Układ równań. Niech w punkcie (O, O) płaszczyzny xy ograniczającej półprzestrzeń sprężystą $z \geqslant 0$ działa siła skupiona $P = P_0\dfrac{\delta(r)}{2\pi r}e^{i\omega t}$, gdzie $\delta(r)$ jest funkcją Diraca. Poza tym brzeg jest swobodny. Ponieważ zagadnienie jest osiowo symetryczne, to $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ oraz $\varphi_3 = \varphi$. Nasz układ równań (1.8) przyjmie postać

$$(2.1) \qquad \nabla^2\nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\Phi = \vartheta\theta, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa'}\partial_t\right)\theta - \eta\partial_t\nabla^2\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Jeśli obierzemy walcowy układ współrzędnych, to postać powyższych równań nie zmieni się. Przemieszczenia i naprężenia będą określone wówczas wzorami (2):

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z},$$

$$u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi, \qquad u_\varphi = 0,$$

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{2\mu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -2\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{2\mu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi, \\ \sigma_{zz} &= -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi + \frac{2\mu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi, \\ \sigma_{rz} &= 2\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z} + \frac{2\mu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial z^2}\right]\varphi, \\ \sigma_{r\varphi} &= 0, \qquad \sigma_{z\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Będziemy szukali rozwiązań układu równań (2.1) w postaci

$$\{\theta(r,z,t),\ \Phi(r,z,t),\ \varphi(r,z,t)\} = \{\theta^*(r,z),\ \Phi^*(r,z),\ \varphi^*(r,z)\}\, e^{i\omega t}.$$

Wówczas układ (2.1) przyjmie postać

$$\begin{gathered} \nabla^2\nabla^2\varphi^* = 0, \qquad \nabla^2\Phi^* = \vartheta\theta^*, \\ \left(\nabla^2 - \frac{i\omega}{\varkappa'}\right)\theta^* - \eta i\omega\nabla^2\frac{\partial\varphi^*}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Rozwiązań tego układu będziemy szukali w postaci całek Hankela

$$\{\theta^*(r,z),\ \Phi^*(r,z)\ \varphi^*(r,z)\} = \int_0^\infty \{\bar\theta^*(\alpha,z)\ \bar\Phi^*(\alpha,z)\ \bar\varphi^*(\alpha,z)\} J_0(\alpha r)\, d\alpha, \tag{2.4}$$

gdzie $J_0(\alpha r)$ jest funkcją Bessela I rodzaju, zerowego rzędu. Przy powyższym podstawieniu z układu (2.3) otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{gathered} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\bar\varphi^* = 0, \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\bar\Phi^* = \vartheta\bar\theta^*, \\ \left[\frac{d^2}{dz^2} - \left(\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}\right)\right]\bar\theta^* - i\omega\eta\frac{d}{dz}\left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right]\bar\varphi^* = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

2.2. Warunki brzegowe. Dla naprężeń warunki brzegowe mają postać: dla $z = 0$

$$\sigma^*_{zz} = \sigma^{1*}_{zz} + \sigma^{2*}_{zz} = -P_0\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \qquad \sigma^*_{rz} = \sigma^{1*}_{rz} + \sigma^{2*}_{rz} = 0. \tag{2.6}$$

Naprężenia ze wskaźnikiem 1 są związane z przemieszczeniami u_i^1, przeto można je wyrazić za pomocą funkcji Φ. Podobnie naprężenia ze wskaźnikiem 2 są związane z u_i^2 i można je wyrazić za pomocą funkcji φ.

Dla temperatury przyjmujemy swobodną wymianę ciepła z otoczeniem; stąd dla $z = 0$

$$\frac{\partial\theta^*}{\theta z} - h\theta^* = 0. \tag{2.7}$$

Zakłada się, że temperatura otoczenia jest równa temperaturze stanu naturalnego. Warunki brzegowe (2.6) po zastosowaniu (2.2), (2.4) i wzoru $\delta(r)/r = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)\, d\alpha$ dla $z = 0$ przyjmą postać

$$\begin{gathered} 2\mu\alpha^2\bar\Phi^* + \frac{2\mu}{1-2\nu}\frac{d}{dz}\left[(2-\nu)\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right) - \frac{d^2}{dz^2}\right]\bar\varphi^* = -\frac{P_0\alpha}{2\pi}, \\ 2\mu\frac{d\bar\Phi^*}{dz} + \frac{2\mu}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right) - \frac{d^2}{dz^2}\right]\bar\varphi^* = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Warunek brzegowy dla temperatury można napisać w postaci

$$\frac{d\theta}{dz} - h\bar{\theta}^* = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0. \tag{2.9}$$

2.3. Rozwiązanie układu równań. Układ równań (2.5) oraz warunki brzegowe (2.8) i (2.9) pozwalają wyznaczyć funkcje $\bar{\Phi}^*$, $\bar{\varphi}^*$ i $\bar{\theta}^*$ w następujący sposób:

Z pierwszego z równań (2.5) znajdziemy $\bar{\varphi}^*$ w postaci

$$\bar{\varphi}^* = [C_1(\alpha) + zC_2(\alpha)]\, e^{-\alpha z}.$$

Wówczas z trzeciego z równań (2.5) znajdziemy

$$\bar{\theta}^* = C_3(\alpha) \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) + ae^{-\alpha z},$$

a z drugiego z równań (2.5)

$$\bar{\Phi}^* = b \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) + cze^{-\alpha z},$$

gdzie

$$a = -2\varkappa'\eta\alpha^2 C_2, \qquad b = \frac{\vartheta\varkappa'}{i\omega} C_3, \qquad c = \vartheta\varkappa'\eta\alpha C_2.$$

Podstawiając funkcje $\bar{\Phi}^*$, $\bar{\varphi}^*$ i $\bar{\theta}^*$ dane powyższymi wzorami do warunków brzegowych (2.8) i (2.9) otrzymamy układ równań algebraicznych na wyznaczenie stałych C_1, C_2 i C_3:

$$-C_3\sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}} - a\alpha = hC_3 + ha,$$

$$\mu\alpha\frac{\vartheta\varkappa'}{i\omega} C_3 + \mu\alpha C_2 + \frac{\mu}{1-2\nu}\alpha^2 C_1 = -\frac{P_0}{4\pi},$$

$$-\frac{\vartheta\varkappa'}{i\omega}\sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa}}\, C_3 + \vartheta\varkappa'\eta\alpha C_2 + \frac{2\nu\alpha}{1-2\nu} C_2 - \frac{\alpha^2}{1-2\nu} C_1 = 0.$$

Z tych równań obliczamy C_1, C_2 i C_3:

$$C_1 = \left(\vartheta\varkappa'\eta - \frac{2\vartheta\varkappa'^2\eta\alpha}{i\omega}\, \frac{h+\alpha}{h + \sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}}} \sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\right)\frac{1-2\nu}{\alpha} C_2,$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{4\pi\mu}\left[\frac{2\vartheta\varkappa'^2\eta\alpha^2}{i\omega}\, \frac{h+\alpha}{h + \sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}}}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{1-2\nu} + \vartheta\varkappa'\eta\alpha\right]^{-1},$$

$$C_3 = 2\varkappa' \eta \alpha^2 \frac{h+\alpha}{h+\sqrt{\alpha^2+\dfrac{i\omega}{\varkappa'}}} C_2 .$$

Temperatura będzie określona wzorem

$$\text{(2.10)} \qquad \theta = 2\varkappa' \eta e^{i\omega t} \int\limits_0^\infty \left[\frac{h+\alpha}{h+\sqrt{\alpha^2+\dfrac{i\omega}{\varkappa'}}} \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) - e^{-\alpha z} \right] \times$$
$$\times C_2 \alpha^2 J_0(\alpha r)\, d\alpha ,$$

a naprężenia i przemieszczenia następującymi wzorami:

$$\sigma_{rr} = -2\mu e^{i\omega t} \left\{ \int\limits_0^\infty \left[b\left(\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}\right) \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) - (2-\alpha z)\, c\alpha e^{-\alpha z} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha^2}{1-2\nu} (2\nu C_2 + C_2 - C_1 \alpha - C_2 \alpha z)\, e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r)\, d\alpha -$$
$$- \int\limits_0^\infty \left[b \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) + cze^{-\alpha z} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{1-2\nu} (C_2 - C_1 \alpha - C_2 \alpha z)\, e^{-\alpha z} \right] \frac{\alpha}{r} J_1(\alpha r)\, d\alpha \right\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2\mu e^{i\omega t} \left\{ \int\limits_0^\infty \left[b \frac{i\omega}{\varkappa'} \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) - \right.\right.$$
$$\left. -\left(2c\alpha + \frac{2\nu}{1-2\nu} \alpha^2 C_2\right) e^{-\alpha z} \right] J_0(\alpha r)\, d\alpha + \int\limits_0^\infty \left[b \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) + \right.$$
$$\left.\left. + \left[cz - \frac{1}{1-2\nu} (C_2 - C_1 \alpha - C_2 \alpha z) \right] e^{-\alpha z} \right] \frac{\alpha}{r} J_1(\alpha r)\, d\alpha \right\},$$

$$\text{(2.11)} \qquad \sigma_{zz} = 2\mu e^{i\omega t} \int\limits_0^\infty \left\{ b \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) + \right.$$
$$\left. + \left[cz + C_2 + \frac{\alpha}{1-2\nu} (C_1 + C_2 z) \right] e^{-\alpha z} \right\} \alpha^2 J_0(\alpha r)\, d\alpha ,$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu e^{i\omega t} \int\limits_0^\infty \left[b \sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}} \exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right) - c(1-\alpha z)\, e^{-\alpha z} - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{1-2\nu} (2C_2 \nu - C_1 \alpha - C_2 \alpha z) \right] \alpha J_1(\alpha r)\, d\alpha ,$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0 .$$

$$u_r = e^{i\omega t}\int\limits_0^\infty \left[-b\exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right)-cze^{-\alpha z}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1-2\nu}(C_2-\alpha C_1-\alpha C_2 z)\,e^{-\alpha z}\right]\alpha J_1(\alpha r)\,d\alpha\,,$$

(2.12)
$$u_z = e^{i\omega t}\int\limits_0^\infty \left\{-b\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right)+ce^{-\alpha z}-c\alpha ze^{-\alpha z}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1-2\nu}[2(2\nu-1)C_2\alpha-C_1\alpha^2-C_2\alpha^2 z]\,e^{-\alpha z}\right\}J_0(\alpha r)\,d\alpha\,,$$

$$u_\varphi = 0\,.$$

Jeżeli ω będzie dążyło do zera, to

(2.13)
$$a\to -2\eta\varkappa'\alpha^2\bar{C}_2\,,\qquad c\to\vartheta\varkappa'\eta\alpha\bar{C}_2\,,\qquad C_3\to 2\varkappa'\eta\alpha^2\bar{C}_2\,,$$
$$C_2\to -\frac{P_0}{4\pi\mu}\frac{1-2\nu}{\alpha}=\bar{C}_2,\qquad C_1\to\infty\,,\qquad b\to\infty\,.$$

Wówczas ze względu na (2.10) temperatura θ będzie dążyła do zera. Ze względu na dwa ostatnie wzory (2.13) ($C_1\to\infty$, $b\to\infty$) funkcje Φ^* i φ^* nie będą określone. Lecz we wzorach na naprężenia i przemieszczenia występują funkcje

$$b\frac{i\omega}{\varkappa'},\qquad b\exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa}}\right)+\frac{\alpha}{1-2\nu}C_1e^{-\alpha z},$$
$$b\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right)+\frac{\alpha^2}{1-2\nu}C_1e^{-\alpha z}.$$

W innym zestawieniu b i C_1 nie występują, a powyższe trzy funkcje dążą do wartości skończonych

$$b\frac{i\omega}{\varkappa'}\to 2\vartheta\eta\varkappa'\alpha^2C_2,$$

$$b\exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right)+\frac{\alpha}{1-2\nu}C_1e^{-\alpha z}\to-\vartheta\varkappa'\eta\alpha\bar{C}_2ze^{-\alpha z}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\bar{C}_2e^{-\alpha z},$$

$$b\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\exp\left(-z\sqrt{\alpha^2+\frac{i\omega}{\varkappa'}}\right)+\frac{\alpha^2}{1-2\nu}C_1e^{-\alpha z}\to-$$
$$-\vartheta\varkappa'\eta\alpha^2\bar{C}_2ze^{-\alpha z}+\vartheta\varkappa'\eta\alpha\bar{C}_2e^{-\alpha z}+\frac{2\nu\alpha}{1-2\nu}\bar{C}_2e^{-\alpha z},$$

gdy $\omega\to 0$. Naprężenia i przemieszczenia będą wówczas takie same jak otrzymane w rozwiązaniu zagadnienia statycznego. Oczywiście ze wzorów (2.10)–(2.12) należy wziąć część rzeczywistą wówczas, gdy wymuszenie jest typu $\cos\omega t$, a część urojoną, gdy wymuszenie jest typu $\sin\omega t$.

2.4. Rozwiązania przybliżone. We wzorach (2.10)–(2.12) występują całki, których nie da się obliczyć w sposób elementarny. Można jednak otrzymać prostszą postać dla rozwiązań przybliżonych. W tym celu stałą C_2 przedstawmy w postaci

$$C_2 = -\frac{P_0}{4\pi\mu}\,\frac{1-2\nu}{\alpha(1+\varepsilon'\delta)},$$

gdzie

$$\varepsilon' = \vartheta\varkappa'\eta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \qquad \delta = (1-2\nu)\left(1+\frac{2\alpha(h+\alpha)}{h+\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}\,\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}{i\omega/\varkappa'}\right).$$

We wzorach tych ε jest wielkością bezwymiarową na ogół bardzo małą (np. dla glinu rzędu 10^{-2}, dla stali 10^{-4}) wprowadzoną przez I. N. SNEDDONA. Można wykazać, że

$$\left|\frac{\alpha\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}\right)}{i\omega/\varkappa'}\right| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{oraz} \qquad \left|\frac{h+\alpha}{h+\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}\right| \leqslant 1$$

dla każdego α, h, ω i $\varkappa'$. Wobec tego $|\delta| \leqslant 2(1-2\nu)$ oraz $|\varepsilon'\delta| \ll 1$ (przy założeniu $\varepsilon \ll 1$).

Rozwijając w szereg wyrażenie na stałą C_2 ze względu na $\varepsilon'\delta$ i ograniczając się w dalszych rozważaniach do wyrazów liniowych ze względu na ε', otrzymamy

$$C_2 = -\frac{P_0}{4\pi\mu}\,\frac{(1-2\nu)(1-\varepsilon'\delta)}{\alpha},$$

$$C_1 = -\frac{P_0}{4\pi\mu}\,\frac{(1-2\nu)^2}{\alpha^2}\left[\left(1-\frac{2\alpha(h+\alpha)}{h+\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}\,\frac{\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}{i\omega/\varkappa'}\right)\varepsilon' + \right.$$
$$\left. +\frac{2\nu}{1-2\nu}-\frac{2\nu\varepsilon'\delta}{1-2\nu}\right],$$

$$b = -\frac{P_0}{4\pi\mu}\,\frac{\varepsilon'\alpha\varkappa'(1-2\nu)}{i\omega}\,\frac{h+\alpha}{h+\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}},$$

$$c = -\frac{P_0}{4\pi\mu}(1-2\nu)\,\varepsilon'.$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy $h=0$ (na brzegu mamy izolację termiczną). Wówczas

$$C_2 = -\frac{A}{\alpha}\left[\varepsilon_1-\varepsilon_2\left(\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}-\alpha^2\right)\right],$$

$$\text{(2.14)}\qquad C_1 = -\frac{A}{\alpha^2}(1-2\nu)\left[\varepsilon_3-\frac{2\varkappa'\varepsilon'\alpha^2}{i\omega}-D\left(\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}-\alpha^2\right)\right],$$

$$b = -\frac{B\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+i\omega/\varkappa'}}, \qquad c = -A\varepsilon'.$$

Wprowadzono tu następujące oznaczanie:

$$A = \frac{P_0}{4\pi\mu}(1-2\nu), \qquad B = \frac{P_0}{2\pi\mu}\,\frac{(1-2\nu)\varkappa'\varepsilon'}{i\omega}, \qquad D = \frac{4\nu\varkappa'\varepsilon'}{i\omega},$$

$$\varepsilon_1 = 1-(1-2\nu)\,\varepsilon', \qquad \varepsilon_2 = \frac{2(1-2\nu)\,\varkappa'\varepsilon'}{i\omega}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{2\nu}{1-2\nu}+(1-2\nu)\,\varepsilon'.$$

Podstawienie uproszczonych wartości dla stałych C_1, C_2, b i c według wzorów (2.14) do wzorów (2.10)–(2.12) pozwala otrzymać przybliżone wartości dla temperatury, przemieszczeń i naprężeń. Wielkości te będą nadal przedstawione w postaci całek Hankela. W szczególności na płaszczyźnie $z=0$, ograniczającej badaną półprzestrzeń, można otrzymać rozwiązania

$$\begin{aligned}
\theta &= -\frac{P_0\varkappa'\eta}{2\pi\mu}(1-2\nu)\,e^{i\omega t}[G_1-(1-2\nu)\,\varepsilon'(G_1-4G_4)],\\
\sigma_{zz} &= -\frac{P_0\,\delta(r)}{2\pi r}\,e^{i\omega t},\\
\sigma_{rr} &= \frac{P_0}{2\pi}(1-2\nu)\,e^{i\omega t}\left[\frac{1}{r^2}-\frac{\delta(r)}{(1-2\nu)\,r}\right]+\\
&\quad+\frac{P_0}{2\pi}(1-2\nu)\,e^{i\omega t}\varepsilon'\left[-\frac{2(1-\nu)}{r^2}+2G_5+\frac{4(1-\nu)\,G_3}{r\xi}\right],\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{P_0}{2\pi}(1-2\nu)\,e^{i\omega t}\left[-\frac{2\nu\delta(r)}{(1-2\nu)\,r}-\frac{1}{r^2}\right]+\\
&\quad+\frac{P_0}{\pi}(1-2\nu)\,e^{i\omega t}\varepsilon'\left[\frac{1-\nu}{r^2}+G_1+\nu G_6+\frac{2(1-\nu)\,G_3}{\xi r}\right],\\
\sigma_{rz} &= 0,\\
u_r &= -\frac{P_0}{4\pi\mu r}(1-2\nu)\,e^{i\omega t}+\frac{P_0}{2\pi\mu}(1-2\nu)(1-\nu)\,e^{i\omega t}\varepsilon'\left(\frac{1}{r}+\frac{2G_3}{\xi}\right),\\
u_z &= \frac{P_0}{2\pi\mu r}(1-\nu)\,e^{i\omega t}-\frac{P_0}{2\pi\mu}(1-2\nu)(1-\nu)\,e^{i\omega t}\varepsilon'\left(\frac{1}{r}+\frac{2G_2}{\xi}\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Przez $G_1, G_2, \ldots, G_6$ oznaczono następujące całki:

$$G_1 = \int_0^\infty\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\xi}}-\alpha\right)J_0(\alpha r)\,d\alpha = -\frac{\xi}{2}\,[K_0(\varrho)I_0(\varrho)-K_1(\varrho)I_1(\varrho)],$$

$$G_2 = \int_0^\infty\left(\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2+\xi}}-\alpha^2\right)J_0(\alpha r)\,d\alpha = \frac{1}{r^3}+\left(\frac{1}{r^3}-\frac{\sqrt{\xi}}{r^2}-\frac{\xi}{r}\right)e^{-r\sqrt{\xi}},$$

$$G_3=\int_0^\infty\left(\frac{a^3}{\sqrt{a^2+\xi}}-a^2\right)J_1(ar)\,da=-\frac{\xi}{2}\left[\sqrt{\xi}\,I_1(\varrho)K_0(\varrho)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\xi}\,I_0(\varrho)K_1(\varrho)-\frac{2I_1(\varrho)K_1(\varrho)}{r}\right],$$

$$G_4=\frac{2}{\xi}\int_0^\infty\left(\frac{a^4}{\sqrt{a^2+\xi}}-a^3+\frac{\xi a^3}{2(a^2+\xi)}\right)J_0(ar)\,da=-\xi K_0(2\varrho)+$$
$$+\xi K_0(\varrho)I_0(\varrho)-\frac{12I_0(\varrho)K_0(\varrho)}{r^2}+\frac{4\sqrt{\xi}\,I_0(\varrho)K_1(\varrho)}{r}+$$
$$+\frac{2\sqrt{\xi}\,I_1(\varrho)K_0(\varrho)}{r}-\xi I_1(\varrho)K_1(\varrho)-\frac{4I_1(\varrho)K_1(\varrho)}{r^2},$$

$$G_5=\frac{2}{\xi}\int_0^\infty\left(\frac{a^4}{\sqrt{a^2+\xi}}-a^3+\frac{\xi a^2}{2\sqrt{a^2+\xi}}\right)J_0(ar)\,da=\frac{\xi K_0(\varrho)I_0(\varrho)}{2}+$$
$$+\frac{4\sqrt{\xi}\,I_0(\varrho)K_1(\varrho)}{r}+\frac{\sqrt{\xi}\,I_1(\varrho)K_0(\varrho)}{r^2}-\frac{12I_0(\varrho)K_0(\varrho)}{r^2}-$$
$$-\frac{\xi I_1(\varrho)K_1(\varrho)}{2}-\frac{4I_1(\varrho)K_1(\varrho)}{r^2},$$

$$G_6=\frac{2}{\xi}\int_0^\infty\left(\frac{a^4}{\sqrt{a^2+\xi}}-a^3+\frac{\xi a}{2}\right)J_0(ar)\,da=\xi K_0(\varrho)I_0(\varrho)-\frac{12I_0(\varrho)K_0(\varrho)}{r^2}-$$
$$-\xi I_1(\varrho)K_1(\varrho)-\frac{4I_1(\varrho)K_1(\varrho)}{r^2}+\frac{4\sqrt{\xi}\,I_0(\varrho)K_1(\varrho)}{r}+\frac{2\sqrt{\xi}\,I_1(\varrho)K_0(\varrho)}{r},$$

gdzie $\varrho=r\sqrt{\xi}/2$, $\xi=i\omega/\varkappa'$. Symbole K_i i I_i oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela I i II rodzaju.

Wzory wyrażające naprężenia i przemieszczenia na brzegu $z=0$ rozdzielono na składniki nie zawierające współczynnika ε' i składniki zawierające ten współczynnik. Te pierwsze przedstawiają wyniki, które się otrzyma, gdy nie uwzględnia się sprzężenia termomechanicznego. Ze wzorów (2.15) należy oczywiście wziąć część rzeczywistą, gdy siła wymuszająca ma postać $P_0\cos\omega t$, a część urojoną, gdy wymuszenie jest postaci $P_0\sin\omega t$. Rozkład na część rzeczywistą i urojoną nie przedstawia zasadniczych trudności, gdyż funkcje występujące w wyrażeniach G_1-G_6 można wyrazić za pomocą funkcji trygonometrycznych oraz funkcji ber_0, ber_1, ker_0, ker_1, bei_0, bei_1, kei_0, kei_1. Funkcje te są funkcjami rzeczywistymi rzeczywistego argumentu $r\sqrt{\omega/\varkappa'}/2$.

Uzupełnienie

W celu wskazania metody obliczenia całek $G_1 - G_6$ obliczymy G_6. Całkę tę możemy napisać w postaci

$$G_6 = \frac{2}{\xi} \int_0^\infty \left(\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2+\xi}} - \alpha^2 + \frac{\xi}{2} \right) d\left(\frac{\alpha J_1}{r} \right).$$

Całkując tę funkcję przez części otrzymamy

$$G_6 = \left[\frac{2}{\xi} \left(\frac{\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2+\xi}} - \alpha^2 \right) + 1 \right] \frac{\alpha J_1(\alpha r)}{r} \Bigg|_0^\infty -$$

$$- \frac{6}{r} \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^3} J_1(\alpha r)\, d\alpha - \frac{4}{\xi r} \int_0^\infty \left[\frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^3} - 1 \right] d\left(\frac{\alpha^2 J_2}{r} \right).$$

Pierwszy składnik tego wyrażenia jest równy zeru, a ostatni całkujemy znów przez części. Otrzymujemy

$$G_6 = -\frac{6}{r} \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^3} J_1(\alpha r)\, d\alpha + \frac{12}{r^2} \int_0^\infty \frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_2(\alpha r)\, d\alpha.$$

Wyrażenie to wygodnie jest napisać w postaci

$$G_6 = \frac{6}{r} \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^3} J_{-1}(\alpha r)\, d\alpha + \frac{24}{r^3} \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_1(\alpha r)\, d\alpha -$$

$$- \frac{12}{r^2} \int_0^\infty \frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

Powyższe całki można wyrazić za pomocą uogólnionych szeregów hipergeometrycznych [3]. Nie można tu jednak stosować bezpośrednio wzoru (1), str. 477, z monografii [3], gdyż otrzymuje się wyrażenia nieoznaczone.

W celu otrzymania poprawnych wyników należy jeden z parametrów cytowanego wzoru pozostawić nieustalony i po otrzymaniu końcowego wyniku podstawić na jego miejsce potrzebną wartość. Przy obliczaniu występujących w tej pracy całek jako nieustalony parametr przyjęto wskaźnik funkcji Bessela. Dla przykładu obliczymy całkę

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_0(\alpha r)\, d\alpha.$$

W tym celu rozpatrzmy całkę

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_\nu(\alpha r)\, d\alpha.$$

Stosując wymieniony wzór otrzymujemy

$$F(\nu)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5}J_\nu(\alpha r)\,d\alpha=\frac{r^\nu\xi^\nu\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma(n+\nu+1)}\frac{\varrho^{2n}}{n!}+\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{\nu}{2}\right)}\frac{\varrho^{2n}}{n!}.$$

Podstawiając $z=-\nu/2$ oraz stosując znane wzory

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\qquad \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)}{2^{2x-1}\Gamma(x)},$$

otrzymujemy

$$F(-2z)=\frac{\pi}{12\sin\pi z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2n-2z+4)}{\Gamma(n-z-2)\,\Gamma(n-z+1)\,\Gamma(n-2z+1)}\frac{\varrho_1^{2n-2z}}{n!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(n+2)\,\Gamma(n-z+1)\,\Gamma(n+z+1)}\frac{\varrho_1^{2n}}{n!}\right].$$

Oznaczono tu $\varrho_1=\varrho/2$. Jeśli w licznikach wszystkich wzorów obydwóch szeregów zastosujemy trzykrotnie wzór $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, to po prostych przekształceniach i zastosowaniu wzoru (1) str. 162 z monografii [3] otrzymamy:

$$F(-2z)=\frac{\pi}{6\sin\pi z}\,[(4z^2-8z+3)\,I_{-z}(\varrho)\,I_{-z}(\varrho)-3I_{-z}\,I_z]+$$

$$+\frac{2\pi}{3\sin\pi z}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\,(k-2z+3)\,\Gamma(2k-2z+2)}{\Gamma(k-z+1)\,\Gamma(k-z+2)\,\Gamma(k-2z+2)}\frac{\varrho_1^{2k-2z+3}}{k!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+3)\,(k-z+1+k+z+1)\,\Gamma(2k+2)}{(k+2)\,\Gamma(k-z+2)\,\Gamma(k+z+2)}\frac{\varrho_1^{2k+2}}{k!}\right].$$

Po dalszych podobnych przekształceniach i zastosowaniu znanego wzoru rekurencyjnego $2nI_n(\varrho)/\varrho=I_{n-1}(\varrho)-I_{n+1}(\varrho)$ otrzymamy

$$F(-2z) = \frac{\pi}{6\sin\pi z}\{2\varrho^2 I_{-z}(\varrho)[I_{-z}(\varrho) - I_z(\varrho)] + 2\varrho^2 I_{-z+1}(\varrho)[I_{-z-1}(\varrho) - I_{z+1}(\varrho)] + 4\varrho I_{-z+1}(\varrho)[I_{-z}(\varrho) - I_z(\varrho)] + 4\varrho I_{-z}(\varrho)[I_{-z-1}(\varrho) - I_{z+1}(\varrho)] + 2\varrho z[I_{-z}(\varrho) I_{z+1}(\varrho) - I_z(\varrho) I_{-z-1}(\varrho)] + 4z^2 I_{-z}(\varrho)[I_{-z}(\varrho) - I_z(\varrho)] + 3I_{-z}(\varrho)[I_{-z}(\varrho) - I_z(\varrho)]\}.$$

Korzystając z definicji funkcji $K_z(\varrho)$ możemy napisać

$$F(-2z) = \frac{1}{3}\Big\{2\varrho^2 I_{-z}(\varrho) K_z(\varrho) - 2\varrho^2 I_{-z+1}(\varrho) K_{z+1}(\varrho) + 4\varrho I_{-z+1}(\varrho) K_z(\varrho) - 4\varrho I_{-z}(\varrho) K_{z+1}(\varrho) + 4z^2 I_{-z}(\varrho) K_z(\varrho) + 3I_{-z}(\varrho) K_z(\varrho) + \frac{2\varrho z\pi}{\sin\pi z}[I_{-z}(\varrho) I_{z+1}(\varrho) - I_z(\varrho) I_{-z-1}(\varrho)]\Big\}.$$

Ponieważ

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_0(\alpha r)\, d\alpha = F(0),$$

to otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^4}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_0(\alpha r)\, d\alpha = \frac{1}{3}[2\varrho^2 I_0(\varrho) K_0(\varrho) + 3I_0(\varrho) K_0(\varrho) - 2\varrho^2 I_1(\varrho) K_1(\varrho) + 4\varrho I_1(\varrho) K_0(\varrho) - 4\varrho I_0(\varrho) K_1(\varrho)].$$

W podobny sposób można obliczyć pozostałe całki występujące w G_6:

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^3} J_{-1}(\alpha r)\, d\alpha = \sqrt{\xi}\,[I_1(\varrho) K_0(\varrho) + \varrho I_0(\varrho) K_0(\varrho) - \varrho I_1(\varrho) K_1(\varrho)],$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^3}{(\sqrt{\alpha^2+\xi})^5} J_0(\alpha r)\, dr = \frac{r}{3}[\varrho I_1(\varrho) K_0(\varrho) - \varrho I_0(\varrho) K_1(\varrho) - \tfrac{1}{2} I_1(\varrho) K_1(\varrho)].$$

Wobec tego

$$G_6 = \xi I_0(\varrho) K_0(\varrho) - \frac{12 I_0(\varrho) K_0(\varrho)}{r^2} - \xi I_1(\varrho) K_1(\varrho) - \frac{4 I_1(\varrho) K_1(\varrho)}{r^2} + \frac{4\sqrt{\xi}\, I_0(\varrho) K_1(\varrho)}{r} + \frac{2\sqrt{\xi}\, I_1(\varrho) K_0(\varrho)}{r}.$$

Tak samo oblicza się całki G_1–G_5.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
2. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
3. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Москва 1949.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРА
В ОГРАНИЧЕННОЙ, УПРУГОЙ СРЕДЕ
ПРИ УЧЕТЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Рассматривается температура, напряжения и перемещения в ограниченной упругой среде. Пренебрегается влиянием массовых сил и сил инерции. Применяя метод предложений В. Новацким [1], получается частичное разделение системы уравнений термоупругости, путем обобщения функции Галеркина на случай термомеханического сопряжения [уравнения (1.8)]. В качестве примера рассматривается полупространство загруженное сосредоточенной силой изменяющейся гармонически во времени. Температура, напряжение и перемещение получаются в виде интегралов Ганкеля. Разложение в ряд, в виду малого параметра $\varepsilon'\delta$ подинтегральных выражений, дает возможность описать результаты в упрощенном виде. В особенности для термической изоляции получено, на плоскости, ограничивающей полупространство, результаты в виде элементарных функций и модифицированных бесселевых функций первого и второго рода. Способ вычисления существующих интегралов дается в дополнении.

Summary

STRESS, DISPLACEMENT AND TEMPERATURE IN A FINITE ELASTIC BODY, TAKING INTO CONSIDERATION THERMOMECHANICAL COUPLING

The mass forces are disregarded in the present paper. By applying the method devised by W. Nowacki [1] partial separation of the equations of thermoelasticity is achieved by generalizing Galerkin's function to the case of thermodynamical coupling Eqs. (1.13). A seminfinite body loaded by a concentrated harmonic force is considered as an example. The temperature, strain and displacement are obtained in the form of Hankel integrals. Expansion of the integrands in series of $\varepsilon'\delta$, which is a small quantity, enables us to express the result in a simplified form. In the particular case of thermal insulation the results for the boundary plane are obtained in the form of elementary functions and modified Bessel functions of the first and second kind. The calculation of the integrals involved is carried out in the Appendix.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 września 1967 r.