

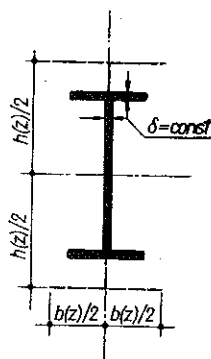
SKRĘCANIE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH TYPU DWUTEOWNIKA  
O DWUKIERUNKOWEJ ZMIENNOŚCI PRZEKROJU

ZBIGNIEW CYWIŃSKI (GDAŃSK)

1. Uwagi wstępne

W pracy [1] analizowano szczegółowo problem skręcania prętów cienkościennych typu bisymetrycznego dwuteownika o zmiennej wysokości środnika. Analiza ta nie obejmowała wówczas przypadków, gdy oprócz zmiany wysokości środnika zmieniają się również szerokości półek dwuteownika (rys. 1). Temu ostatniemu problemowi poświęcona jest praca niniejsza.

Przedstawiony problem analizowany jest przy wszystkich założeniach tzw. technicznej teorii skręcania prętów cienkościennych, opracowanej dla prętów o stałym przekroju poprzecznym; teorię tę w najogólniejszej postaci przedstawił W. Z. WŁASOW [2]. Jak wiadomo, założeniami tymi są: *hipoteza o nieodkształcalności konturu* przekroju poprzecznego w jego płaszczyźnie, *założenie spaczenia* przekrojów poprzecznych i *hipoteza braku odkształcenia postaciowego* powierzchni środkowej pręta. Dodatkowo zakłada się tutaj, że zmiany przekroju pręta narastają powoli i w sposób ciągły.



Rys. 1

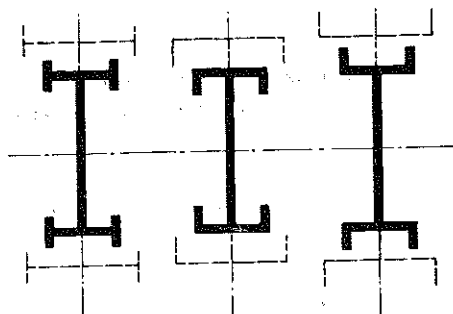
Niniejsza praca w swej metodzie i zakresie opracowania nawiązuje ściśle do wymienionej uprzednio pracy [1] i stanowi jej uzupełnienie i uogólnienie. Przyjęte tutaj oznaczenia pokrywają się w zupełności z określonymi w pracy [1] i z tego względu pomija się tu szczegółowy ich wykaz. Oznaczenia wprowadzone tutaj po raz pierwszy będą cytowane w treści. Symbolika oznaczeń wywodzi się z przyjętej przez W. Z. WŁASOWA [2], terminologia zaś opiera się na pracy J. RUTECKIEGO [3].

2. Podstawowe równanie różniczkowe

Podobnie jak w pracy [1] przeprowadza się analizę postawionego problemu na przykładzie przekroju dwuteowego (rys. 1), ale wyniki tej analizy obejmują również inne przekroje tego typu, jak np. przedstawione na rys. 2 (1).

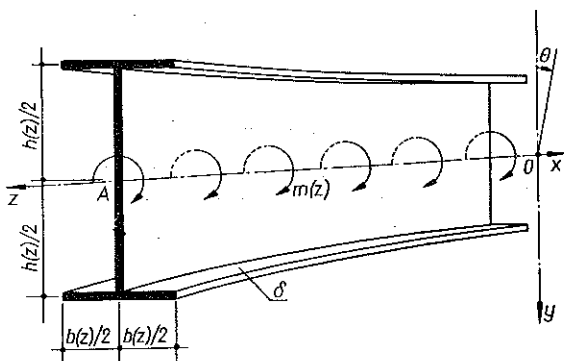
(1) Dla tych ostatnich obowiązuje założenie, że przekroje podłużnych żeber wzmacniających półki dwuteownika mają charakter przekrojów skupionych w osiach tych półek.

Badany pręt (rys. 3) podparty jest w sposób dowolny w przekrojach końcowych i obciążony rozłożonymi w sposób ciągły momentami skręcającymi  $m(z)$ . Oś podłużna pręta pokrywa się z osią środków symetrii przekrojów poprzecznych



Rys. 2

pręta, co powoduje, że jest ona również osią środków obrotu i osią głównych biegunów wycinkowych  $A$ . Początek  $O$  układu współrzędnych  $x, y, z$  przyjęty jest na osi  $z$  dowolnie, a współrzędna obiegowa  $s$  mierzona jest od promienia początkowego pokrywającego się ze środkiem pręta w jego przekroju poprzecznym.



Rys. 3

W pracy [1] problem skręcania pręta cienkościennego typu bisymetrycznego dwuteownika o zmiennej wysokości środka opisany jest równaniem różniczkowym (3.8) lub (3.9).

Jeśli uwzględnić, że  $\omega(z, s) = h(z) s/2$ , to znajdziemy

$$(2.1) \quad I_{\omega\omega} \omega^t = I_{\omega\omega t} \omega,$$

gdzie  $i$  określa rząd pochodnej względem zmiennej  $z$  i wówczas równanie (3.9) z pracy [1] upraszcza się do postaci

$$(2.2) \quad \frac{EI_{\omega\omega}}{h(z)} [h(z) \theta]^{\text{IV}} - G(I_a \theta)' = m(z).$$

Można też, oznaczając przez  $I_p$  moment bezwładności jednej półki dwuteownika względem osi pokrywającej się w przekroju poprzecznym z osią środka pręta oraz uwzględniając, że  $I_{\omega\omega} = I_p h^2(z)/2$ , przedstawić równanie (2.2) jeszcze inaczej:

$$(2.3) \quad \frac{EI_p}{2} h(z) [h(z)\theta]^{IV} - G(I_a\theta)' = m(z).$$

Problem nie będzie jednak opisany równaniami różniczkowymi (2.2) lub (2.3), jeżeli szerokość półek dwuteownika  $b(z)$  zależeć będzie od położenia przekroju poprzecznego na długości pręta, a więc będzie funkcją zmiennej  $z$ . W tym ostatnim przypadku równanie (3.8) z [1] po wykonaniu różniczkowania (również samych charakterystyk przekrojowych), uwzględniającego zmienne granice całkowania przy różniczkowaniu całek względem parametru  $z$  oraz szeregu dalszych dość żmudnych przekształceń typu (2.1), daje się ująć w stosunkowo prostej formie

$$(2.4) \quad \left[ \frac{EI_{\omega\omega}}{\omega^2} (\omega\theta)'' \right]'' \omega - (GI_a\theta)' = m(z).$$

Równanie (2.4) jest podsławowym równaniem różniczkowym badanego problemu skręcania prętów cienkościennych typu bisymetrycznego dwuteownika o zmiennej wysokości środka i zmiennej szerokości pasów. Uwzględniając, że  $\omega(z, s) = h(z)s/2$ , można równanie (2.4) napisać również nieco inaczej:

$$(2.5) \quad \left[ \frac{EI_{\omega\omega}}{h^2(z)} (h(z)\theta)'' \right]'' h(z) - (GI_a\theta)' = m(z)$$

lub też, jeśli uwzględnić związek  $I_{\omega\omega} = I_p h^2(z)/2$ , przedstawić je w postaci

$$(2.6) \quad \left[ \frac{EI_p}{2} (h(z)\theta)'' \right]'' h(z) - (GI_a\theta)' = m(z).$$

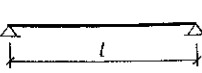
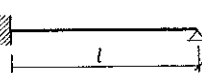
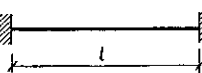
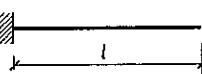
Można zauważyć, że jeżeli szerokość pasów dwuteownika jest stała na długości pręta, to moment bezwładności  $I_p = \text{const}$ , w związku z czym równanie (2.6) przechodzi bezpośrednio w równanie (2.3), a zatem również równanie (2.4) przekształca się w (3.9) z [1] ( $E$  i  $G$  są stałymi). Jeżeli natomiast  $h(z) = h = \text{const}$ , to powierzchnia wycinkowa  $\omega$  zależy tylko od współrzędnej  $s$  i równanie (2.4) przyjmuje postać

$$(2.7) \quad (EI_{\omega\omega}\theta'')'' - (GI_a\theta)' = m(z),$$

a więc postać podobną do tej, jaką uzyskano w pracach [4 i 5] rozważając problem skręcania pręta cienkościennego typu powłoki walcowej o zmiennej długości konturu.

Otrzymane podstawowe równanie różniczkowe (2.4) rozważanego problemu ze względu na swą budowę nie może być rozwiązane w sposób ścisły. Rozwiązanie takie uzyskuje się metodami przybliżonymi, najwygodniej metodą różnic skończonych. Praktycznie ważne sposoby podparcia prętów cienkościennych w rozważanym tu problemie skręcania i odpowiadające im warunki brzegowe dla podstawowego równania różniczkowego (2.4) ujęto w tablicy 1.

Tablica 1

L.p.	Sposób podparcia pręta	Schemat pręta i odpowiednie warunki brzegowe
1.	Pręt swobodnie podparty, posiadający swobodę spazczenia, ale pozbawiony swobody skręcenia przekrojów końcowych	$\theta(0)=0$ $B(0)=0$  $\theta(l)=0$ $B(l)=0$
2.	Pręt utwierdzony całkowicie jednym końcem, a na drugim swobodnie podparty, jak w p. 1.	$\theta(0)=0$ $\theta'(0)=0$  $\theta(l)=0$ $B(l)=0$
3.	Pręt na obu końcach całkowicie utwierdzony	$\theta(0)=0$ $\theta'(0)=0$  $\theta(l)=0$ $\theta'(l)=0$
4.	Pręt wspornikowy utwierdzony całkowicie jednym końcem, a na drugim swobodny	$\theta(0)=0$ $\theta'(0)=0$  $B(l)=0$ $H(l)=0$

## 3. Naprężenia normalne

Podobnie jak w pracach poprzednich [1, 4 i 5] przy określaniu wyrażenia dla naprężeń normalnych  $\sigma$  powstałych w przekroju poprzecznym pręta wskutek działania obciążenia skręcającego wprowadza się tu pojęcie bimomentu, tj. siły uogólnionej, wywołującej w przekroju samorównoważny stan tych naprężeń. Bimoment definiuje się następująco:

$$(3.1) \quad B = \int_{F(z)} \sigma \omega dF.$$

Analogicznie jak w [1] otrzymuje się tu po uwzględnieniu (3.1) z [1] wzór

$$(3.2) \quad B = -E(I_{\omega\omega} \theta'' + 2I_{\omega\omega'} \theta' + I_{\omega\omega''} \theta),$$

który przedstawić można również w postaci

$$(3.3) \quad B = -\frac{EI_{\omega\omega}}{\omega} (\omega \theta)''$$

lub

$$(3.4) \quad B = -\frac{EI_p}{2} h(z) [h(z) \theta]''.$$

Postępując się pojęciem bimomentu można naprężenia normalne wyrazić w znany sposób:

$$(3.5) \quad \sigma = \frac{B\omega}{I_{\omega\omega}}.$$

Poprawność tego wzoru jest najłatwiej udowodnić zaprzeczając jego prawdziwość i podstawiając wyrażenie (3.3); w wyniku uproszczeń otrzymuje się wzór (3.1) z [1].

Otrzymany wzór (3.5) jest identyczny z tym, jaki otrzymano w pracy [1] przy zmieniającej się wysokości środnika, ale niezmiennych szerokościach półek dwuteownika. W przypadku przeciwnym (niezmienna wysokość środnika i zmienne szerokości półek) wzór (3.5) pokrywa się z odpowiednim wzorem przedstawionym w pracach [4 i 5] (po wprowadzeniu odpowiednich zmian dla przekroju bisymetrycznego) z tym zastrzeżeniem, że bimoment  $B$  określony jest także uproszczonym wyrażeniem  $B = -EI_{\omega\omega} \theta$  (powierzchnia wycinkowa  $\omega$  jest funkcją tylko współrzędnej  $s$ ).

#### 4. Naprężenia tnące

Zakłada się, że podobnie jak to ma miejsce w teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju stałym również i tutaj między naprężeniami normalnymi  $\sigma$  i tnącymi  $\tau$  istnieje zależność

$$(4.1) \quad \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} = 0.$$

Z równania tego po scałkowaniu względem zmiennej  $s$  wynika

$$(4.2) \quad \tau\delta = \tau_0\delta - \int_0^s \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} ds.$$

Wartość strumienia naprężeń tnących  $\tau_0\delta$  odnosi się do punktu początkowego współrzędnej  $s$ , który położony jest tutaj stale na przecięciu każdej z półek ze środnikiem przekroju dwuteowego. Wartość tę określa się z warunku, że w punkcie końcowym  $K$  konturu istnieje strumień  $\tau_K\delta$  [4 i 5], przy czym

$$(4.3) \quad \tau_K\delta = \sigma_K\delta \frac{ds_K(z)}{dz}.$$

Uwzględniając zmienne granice całkowania przy różniczkowaniu całek względem parametru  $z$ , otrzymuje się

$$(4.4) \quad \tau_0\delta = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{s_K(z)} \sigma\delta ds.$$

Po podstawieniu funkcji (4.4) do równania (4.2) przy równoczesnym wyrażeniu naprężeń normalnych za pomocą wzoru (3.5), można równanie (4.2) przedstawić w postaci

$$(4.5) \quad \tau\delta = \left[ \frac{BS_{\omega}(s)}{I_{\omega\omega}} \right]'$$

gdzie

$$(4.6) \quad S_{\omega(s)} = \int_s^{\varepsilon_K(z)} \omega dF.$$

Wyprowadzony wzór (4.5) podobny jest do przedstawionego w pracach [4 i 5] (przy symetrii dwuosiowej); tutaj jednak wchodzący do wzoru bimoment  $B$  ma postać ogólniejszą [por. (3.2)–(3.4)]. W przypadku stałej wysokości środka przy zmiennej szerokości pasów dwuteownika ta ogólniejsza postać na bimoment  $B$  upraszcza się do postaci  $B = -EI_{\omega\omega} \theta''$  i wówczas występuje pełna zgodność wzoru (4.5) z uzyskanym w pracach [4 i 5]. Również można wykazać, że w przypadku nie zmieniających się szerokości pasów, ale zmiennej wysokości środka dwuteownika, wzór (4.5) przechodzi w odpowiedni wzór wyprowadzony w pracy [1] [por. także wzór (5.4) lub (5.6)].

Wzór (4.5) określa naprężenia tnące skręcania skrępowanego. Aby otrzymać całkowite naprężenia tnące, należy do naprężeń (4.5) dodać naprężenia tnące czystego skręcania (Saint-Venanta), które wyznacza się podobnie jak w przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym ze wzoru

$$(4.7) \quad \tau_k = \frac{H_k}{I_d} \delta.$$

Naprężenia tnące  $\tau_k$  tworzą moment skręcający Saint-Venanta  $H_k$  (3.2) w [1], naprężenia zaś tnące  $\tau$  moment giętno-skrętny  $H_{\omega}$ . Ten ostatni określa wzór

$$(4.8) \quad H_{\omega} = \int_{F(z)} \tau \delta d\omega.$$

Podstawiając (4.5) do wzoru (4.8) można ten ostatni doprowadzić do prostej postaci

$$(4.9) \quad H_{\omega} = \left( \frac{B}{\omega} \right)' \omega,$$

która jest równoważna postaci

$$(4.10) \quad H_{\omega} = -E(I_{\omega\omega} \theta'' + 2I_{\omega\omega'} \theta' + I_{\omega\omega''} \theta)' - E(I_{\omega\omega'} \theta'' + 2I_{\omega'\omega'} \theta' + I_{\omega'\omega''} \theta).$$

Jeśli podstawić bimoment (3.3) do wzoru (4.9), to można moment giętno-skrętny przedstawić również w formie

$$(4.11) \quad H = - \left[ \frac{EI_{\omega\omega}}{\omega^2} (\omega\theta)'' \right]' \omega$$

lub

$$(4.12) \quad H = - \left\{ \frac{EI_p}{2} [h(z) \theta]'' \right\}' h(z).$$

Zauważmy, że w przypadku stałej wysokości środka, ale zmieniających się szerokościach półek dwuteownika, wzór (4.11) przechodzi bezpośrednio w zależność

$H_\omega = EI_{\omega\omega} \theta'''$  [4 i 5]. Jeżeli natomiast wysokość środka dwuteownika będzie zmienna, a szerokości jego półek pozostaną bez zmian, to  $I_p = \text{const}$  i wzór (4.12) będzie można doprowadzić do postaci identycznej z (5.10) w pracy [1].

Oznaczmy teraz przez  $m_\omega$  tę część rozłożonych w sposób ciągły momentów skręcających, które mają charakter momentów giętno-skrętnych, a przez  $m_k$  — część Saint-Venanta. W podstawowym równaniu (2.4) analizowanego tutaj problemu momenty  $m_\omega$  i  $m_k$  są odpowiednio równe

$$(4.13) \quad m_\omega = \left[ \frac{EI_{\omega\omega}}{\omega^2} (\omega\theta)'' \right]'' \omega, \quad m_k = -(GI_\omega \theta)',$$

przy czym zachodzi oczywisty związek

$$(4.14) \quad m_\omega + m_k = m(z).$$

Jak łatwo zauważyć pierwszy wzór (4.13) odpowiada ściśle wzorowi

$$(4.15) \quad m_\omega = - \left( \frac{H_\omega}{\omega} \right)' \omega.$$

Całkując równanie (4.14) po podstawieniu do niego (4.15) i (4.13)<sub>2</sub> oraz uwzględnieniu (3.2) z [1], otrzymuje się

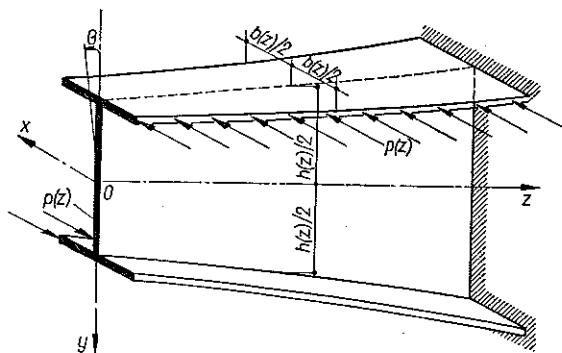
$$(4.16) \quad H_\omega - \int H_\omega \frac{\omega'}{\omega} dz + H_k = H.$$

Z równania (4.16) wynika, że moment skręcający w przekroju poprzecznym pręta jest sumą nie tylko momentu skręcającego Saint-Venanta  $H_k$  i momentu giętno-skrętnego  $H_\omega$ , jak to ma miejsce w prętach o przekroju stałym i prętach o zmiennej długości konturu (por. [4 i 5] przy wprowadzeniu zmian odpowiadających przekrojowi bisymetrycznemu), lecz również obejmuje pewien składnik dodatkowy  $-\int H_\omega \frac{\omega'}{\omega} dz$ . Pod tym względem równanie (4.16) odpowiada wynikom uzyskanym w pracy [1]. Jeśli środek dwuteownika nie ulega zmianie, to  $\omega' = 0$  i równanie (4.16) przechodzi w znany związek  $H = H_k + H_\omega$ .

#### 5. Analiza rozpatrywanego problemu z pominięciem metody charakterystyk wycinkowych

Należy stwierdzić, że rezultaty otrzymane w poprzednich rozdziałach można dostać również na innej drodze. Droga ta w przypadku dwukierunkowo zmiennych przekrojów bisymetrycznych jest nawet prostsza od metody charakterystyk wycinkowych. Ta metoda ma jednak tę przewagę, że staje się bardziej poręczna już przy analizie opracowywanego aktualnie problemu skręcania prętów cienkościennych o dwukierunkowo zmiennym przekroju z jedną osią symetrii. Z tego względu problem skręcania takich prętów o przekroju bisymetrycznym przedstawiono w tej pracy zasadniczo w oparciu o metodę charakterystyk wycinkowych.

Wyobraźmy sobie pręt dwuteowy o zmiennej wysokości środka i zmiennych szerokościach obu jego półek (rys. 4), obciążony w płaszczyznach tych półek obciążeniem ciągłym  $p(z)$  tworzącym na ramieniu równym zmiennej wysokości środka  $h(z)$  ciągłe obciążenie skręcające  $m(z)$ . Sposób podparcia pręta jest dowolny; tutaj przyjęto schemat statyczny wspornika utwierdzonego.



Rys. 4

Wiadomo z teorii skręcania prętów cienkościennych o stałym przekroju, że wskutek skręcania pręta dwuteowego powstają w jego przekroju poprzecznym naprężenia normalne, wywołane momentami zginającymi  $M_p$  działającymi w płaszczyznach półek oraz odpowiednie naprężenia tnące pochodzące od sił tnących  $T_p$ ; te ostatnie uzupełnione są dodatkowo naprężeniami tnącymi czystego skręcania. Przy założeniu małej zmienności wysokości  $h(z)$  dwuteownika można przyjąć, że podobny stan naprężeń powstanie również tutaj. Wówczas siły wewnętrzne  $M_p$  i  $T_p$  oraz obciążenie zewnętrzne  $p(z)$  określone będą w sposób następujący:

(5.1)

$$M_p = -EI_p \left[ \frac{h(z)}{2} \theta \right]''', \quad T_p = - \left\{ EI_p \left[ \frac{h(z)}{2} \theta \right]'' \right\}', \quad p(z) = \left\{ EI_p \left[ \frac{h(z)}{2} \theta \right]'' \right\}''.$$

Ze wzoru (5.1) wyznaczyć można od razu wyrażenia dla bimomentu  $B$ , momentu giętno-skrętnego  $H_\omega$  i momentu  $m_\omega$ :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} B &= M_p h(z) = \frac{EI_p}{2} h(z) [h(z) \theta]''', \\ H_\omega &= T_p h(z) = - \left\{ \frac{EI_p}{2} [h(z) \theta]'' \right\}' h(z), \\ m &= p(z) h(z) = \left\{ \frac{EI_p}{2} [h(z) \theta]'' \right\}'' h(z). \end{aligned}$$

Można zauważyć, że formuły (5.2) odpowiadają kolejno wyprowadzonym poprzednio wzorom (3.4), (4.12) i (4.13)<sub>1</sub>. Ponieważ naprężenia tnące czystego skręcania związane są z wielkością  $m_k$  określoną wzorem (4.13)<sub>1</sub>, przeto równanie różniczkowe rozważanego problemu zgodnie z (4.14) przyjmuje postać identyczną z (2.6).



## 6. Zestawienie podstawowych wzorów

Dla lepszego zobrazowania wyników otrzymanych w niniejszej pracy na tle rezultatów przedstawionych w pracach [1, 4 i 5] zestawia się podstawowe wzory tych opracowań w tabelicy 2. Zestawienie to obejmuje również odpowiednie wzory dla pręta o przekroju stałym.

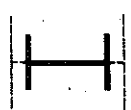
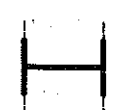

## 7. Uwagi końcowe

W zamierzeniu autora praca niniejsza stanowić ma ogólną analizę porównawczą i określone podsumowanie opracowań teoretycznych dotyczących prętów cienkościennych o zmiennych, otwartych, bisymetrycznych przekrojach poprzecznych. Analiza ta opiera się na pracach autora [4, 5 i 1] i przedstawiona jest na tle znanej teorii W. Z. WŁASOWA, dotyczącej skręcania prętów cienkościennych o stałych przekrojach poprzecznych [2]. Dociekania teoretyczne przeprowadzone zostały tutaj dla przekroju dwuteowego, ale uzyskane rezultaty obejmują również wszystkie inne typy otwartych przekrojów bisymetrycznych występujących w praktyce; wynika to choćby z rozważań przeprowadzonych w p. 5 niniejszego opracowania, gdzie problem skręcania potraktowany został jako odpowiedni problem zginania, w którym właściwy sposób uwzględniania zmienności przekroju w ramach przyjętej dokładności, opartej na rozwiązaniach znanych z wytrzymałości materiałów, nie ulega wątpliwości. Określonym potwierdzeniem tej tezy jest również praca G. BECKERA [6], gdzie przeprowadzono konfrontację opracowanej tam metody obliczeniowej dla problemu skręcania zakrzywionych prętów cienkościennych o zmiennych, otwartych przekrojach poprzecznych z opracowaniem [5].

Trzeba powiedzieć, że metoda «macierzy przekąźnikowych» przedstawiona w pracy [6] jest efektywna w praktyce, ale mniej przydatna w rozważaniach teoretycznych. Z prac krajowych tego typu zagadnienia tego dotyczy opracowanie [7]. W metodzie macierzy przekąźnikowych zastępuje się pręt o przekroju zmiennym skończoną ilością prętów o przekroju zmieniającym się schodkowo; pręty te mają stałe przekroje poprzeczne na pewnej dostatecznie małej długości i schodkowo zmieniają się przy przejściu od jednego punktu podziału do drugiego. Skręcanie prętów cienkościennych o przekroju zmiennym schodkowo rozpatrywał w nieco innym ujęciu również A. R. RZANICYN [8] i P. I. SOROKIN [9]. Z kolei W. CORNELIUS w pracy [10] badał zagadnienie skręcania prętów cienkościennych o przekrojach zmiennych w oparciu o metodę ciężarów sprężystych popartą sposobem Vianello, W. ANDRĀ zaś opracował praktyczną metodę obliczania skręcania dwudźwigarowych mostów żelbetowych [11], polegającą na zastąpieniu belki dwuśrodkowej dwoma układami, z których jeden podlega zginaniu od skręcania skrepowanego, a drugi skręcaniu Saint-Venanta. Wreszcie F. HAMAYOSHI [12] starał się otrzymać możliwie ogólne rozwiązanie problemu skręcania belki dwuteowej o zmiennej wysokości środnika wykorzystując przybliżone całkowanie równania różniczkowego tego problemu metodą szeregów potęgowych.

Wobec niemożliwości uzyskania zamkniętych rozwiązań badanego problemu wszystkie cytowane tutaj opracowania zajmujące się zagadnieniem skręcania prę-

Tablica 2

Typ bisymetrycznego przekroju dwuteowego	Przekrój zmienny		Przekrój stały
	Wysokość środka: $h(z)$ Szerokość póltek: $b(z)$	Wysokość środka: $\bar{h}(z)$ Szerokość póltek: $b = \text{const.}$	
Schemat przekroju			
Równanie różniczkowe problemu	$\left[ \frac{EI_{\omega\omega}}{\omega^2} (\omega\theta)'' \right]'' - \omega (GI_d\theta)' = m(z)$	$\frac{EI_{\omega\omega}}{\omega} (\omega\theta)'' - (GI_d\theta)' = m(z)$	$EI_{\omega\omega}\theta'' - GI_d\theta'' = m(z)$
Bimoment	$B = -\frac{EI_{\omega\omega}}{\omega} (\omega\theta)''$	$B = -\frac{EI_{\omega\omega}}{\omega} (\omega\theta)''$	$B = -EI_{\omega\omega}\theta''$
Moment gęsto-skrętny	$H_\omega = -\left[ \frac{EI_{\omega\omega}}{\omega^2} (\omega\theta)' \right]' - \omega \left( \frac{B}{\omega} \right)'$	$H_\omega = -\frac{EI_{\omega\omega}}{\omega} (\omega\theta)'' - \left( \frac{B}{\omega} \right)'$	$H_\omega = -EI\theta'' = B'$
Moment skracający St. Venanta	$H_k = GI_d\theta'$	$H_k = GI_d\theta'$	$H_k = GI_d\theta'$
Moment skracający całkowity	$H = H_k + H_\omega - \int H_\omega' \frac{dz}{\omega}$	$H = H_k + H_\omega - \int H_\omega' \frac{dz}{\omega}$	$H = H_k + H_\omega$
Naprzężenia normalne	$\sigma = \frac{B\omega}{I_{\omega\omega}}$	$\sigma = \frac{B\omega}{I_{\omega\omega}}$	$\sigma = \frac{B\omega}{I_{\omega\omega}}$
Naprzężenia tnące	$\tau = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{BS_{\omega(\delta)}}{I_{\omega\omega}} \right]'$	$\tau = \frac{H_\omega S_{\omega(\delta)}}{I_{\omega\omega}\delta}$	$\tau = \frac{H_\omega S_{\omega(\delta)}}{I_{\omega\omega}\delta}$
Podstawa opracowania	Praca niniejsza	Praca [1]	Praca [2]

tów cienkościennych o zmiennych przekrojach poprzecznych, w tym również prace autora, przynoszą wyniki mniej lub więcej dokładne i pod tym względem należałoby je sklasyfikować na równi. Tym niemniej autor sądzi, że analiza problemu w oparciu o metodę charakterystyk wycinkowych W. Z. WŁASOWA, jako uogólnienie tej metody w zakresie określonych przekrojów zmiennych, była pożądana i dlatego ją przeprowadził.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. CYWIŃSKI, *Skrećanie prętów cienkościennych typu dwuteownika o zmiennej wysokości środka*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965).
2. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
3. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, Warszawa 1966.
4. Z. CYWIŃSKI, *Teoria skręcania prętów cienkościennych o zmiennej sztywności*, Arch. Inżyn. Łąd., 2, 10 (1964).
5. Z. CYWIŃSKI, *Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderlichem, einfach symmetrischem, offenem Querschnitt*, Der Stahlbau 10/1964.
6. G. Becker, *Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion*, Der Stahlbau 11—12/1965.
7. Cz. MIKIEWICZ, *Skrećanie pręta cienkościennego o skończonej liczbie skokowych zmienności przekroju poprzecznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 39, Budownictwo IV — Mechanika stosowana, 1963.
8. А. Р. Ржаницын, *Расчет тонкостенных стержней ступенчато-переменного сечения*, Исследования по теории сооружений, вып. V, 1951.
9. П. И. Сорокин *К расчету тонкостенных швеллерных стержней с непрерывно меняющимся сечением по длине*, Сборн. Труд. Учьянского политехн. Института № 2 (6), 1961.
10. W. CORNELIUS, *Über den Einfluss der Torsionssteifigkeit auf die Verdrehung von Tragwerken*, M.A.N. Forschungsheft, 1951.
11. W. ANDRÄ, *Beitrag zur Berechnung zweistetiger Plattenbalken mit veränderlichem Querschnitt bei Torsionsbelastung*, Stuttgart 1963.
12. F. HAMAYOSHI, *On Torsion of I-beam with a Web of Variable Height*, Mem. Fac. Engng. Hokkaido Univ., 11, 1961.

#### Резюме

#### КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ТИПА ДВУТАВРА С СЕЧЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

Работа представляет дальнейшее развитие работы [1] автора а также в определенном смысле его публикаций [4,5]. Исследована задача касающаяся кручения бисимметрического двутавра имеющего стенку переменной высоты и полки переменной ширины.

Результаты анализа правильны также для других открытых бисимметрических сечений. применяемых на практике переменных в двух направлениях. Анализ этого вопроса основывается на всех классических принципах технической теории кручения тонкостенных стержней с постоянными сечениями.

Автор расширяет теорию секториальных характеристик В. З. Власова, разработанную для стержней с постоянными поперечными сечениями на стержни с бисимметрическими сечениями изменяющимися в двух направлениях. Выводится основное дифференциальное

уравнение задачи, а также выражения для внутренних усилий и нормальных и касательных напряжений. В таблице 1 даётся сравнение полученных выражений с соответствующими выражениями представленными в работах [1, 4 и 5], на фоне известных решений для стержней с постоянными сечениями.

### Summary

## TORSION OF THIN-WALLED I-BEAMS WITH CROSS-SECTION VARYING IN TWO DIRECTIONS

This paper is a continuation of [1] and in a certain meaning also of author's earlier works [4, 5]. The torsion problem of a bisymmetric I-beam is considered, where the web's height and the flanges' width as well change along the length of the beam. The results of the analysis also relate to other practically important open, bisymmetric cross-sections changeable in two directions. The theoretical considerations base on all classic principles of the technical torsion theory of thin-walled bars with constant cross-sections.

The author extends W. Z. WLASOW's sectorial characteristics theory concerning bars with constant cross-sections to bars with bisymmetric cross-sections variable in two directions. The fundamental differential equation of the problem and also the expressions for the internal forces, and normal and shearing stresses, are derived. Table 1 contains a comparison of the obtained results with the adequate taken from [1, 4, 5] in view of the results given by the torsion theory of thin-walled bars with constant cross-sections.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1967 r.*

---