

PLASKIE OSIOWO-SYMETRYCZNE ZADANIE TEORII SPRĘŻYSTOŚCI
W OŚRODKU DYSKRETNYM

JANUSZ ŚLIŻEWICZ (WARSZAWA)

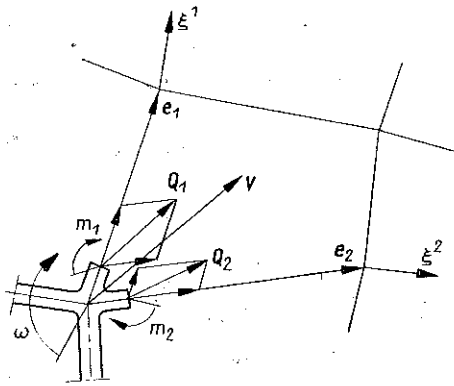
Wstęp

Praca stanowi próbę rozwiązania zadania osiowo-symetrycznego w ośrodku dyskretnym będącym płaską, osiowo-symetryczną siatką, której każdy węzeł połączony jest z sąsiednimi węzłami czterema prostymi, sprężystymi prętami o różnych sztywnościach na rozciąganie i zginanie, lecz nie zmieniającymi się wzdłuż długości prętów.

Kolejność postępowania przy rozwiązaniu przyjęto zbliżoną do rozwiązań tradycyjnych dla ośrodka ciągłego. Mianowicie, opierając się na teorii ośrodka dyskretnego [2, 3 i 4] ⁽¹⁾ dla małych przemieszczeń opracowanej przez H. FRĄCKIEWICZA otrzymano różnicowe, liniowe równania przemieszczeniowe. Równania te udało się w konkretnych przypadkach (dla danych sztywności prętów) rozwiązać ogólnie, określając stan odkształcenia i naprężenia w ośrodku za pomocą funkcji, zawierających stałe dowolne, łatwe do wyznaczenia z warunków brzegowych. Pracę zilustrowano konkretnym przykładem.

1. Równania podstawowe

W pracy oprzemy się na opisie dyskretnego ośrodka sprężystego oraz opisie stanu odkształcenia i naprężenia w takim ośrodku wprowadzonym po raz pierwszy przez H. FRĄCKIEWICZA w jego pracach [2, 3 i 4].



Rys. 1

Stan odkształcenia określają: wektor przemieszczenia V i obrotu Ω ; stan naprężenia — momenty M_1 i M_2 oraz siły Q_1 i Q_2 (rys. 1):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} V &= v^i e_i, & Q_v &= q_v^i e_i, & v, i &= 1, 2, \\ \Omega &= \omega e_3, & |e_3| &= 1, & M_v &= m_v e_3. \end{aligned}$$

Geometria ośrodka opisana jest przez obiekt podstawowy g_{ij} i odpowiadające mu współczynniki koneksji Γ_{jk}^i w dwuwymiarowym układzie współrzędnych ξ^1, ξ^2 .

(1) W pracach tych znajdzie Czytelnik objaśnienie oznaczeń, które niekiedy opuszczamy w artykule niniejszym.

Zwroty zaznaczone na rys. 1 uważamy za dodatnie. Wektory obrotu Ω i momentów M_v są prostopadłe do płaszczyzny rysunku.

Przyjmujemy, że punkty ośrodka stanowią węzły płaskiej ramy, składającej się z prostych prętów o stałych sztywnościach na rozciąganie C_v oraz na zginanie D_v . Założymy również, że przemieszczenia możemy traktować jako małe. Otrzymamy wówczas następujące związki fizyczne:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{q}_v^j &= \frac{C_v}{g_{vv}^{3/2}} \nabla_v v^n g_{nv} \delta_v^j + \left(\delta_s^j - \frac{1}{g_{vv}} \delta_v^j g_{sv} \right) \times \\ &\times \frac{12D_v \varepsilon^{sv}}{\sqrt{g_{vv}} (\Delta \xi^v)^2} \left(\omega + \frac{1}{2} \Delta_v \omega - \frac{1}{g_{vv}} \nabla_v v^\alpha \varepsilon_{v\alpha} \right), \\ m_v &= - \frac{2D_v}{\sqrt{g_{vv}} \Delta \xi^v} \left(3\omega + \Delta_v \omega - \frac{3}{g_{vv}} \nabla_v v^\alpha \varepsilon_{v\alpha} \right), \end{aligned}$$

gdzie g_{ij} oznacza składowe obiektu podstawowego, δ_i^j jest deltą Kroneckera, Δ_v przyrostem funkcji w kierunku osi ξ , $\nabla_v v^\rho$ pochodną kowariantną w ośrodku dyskretnym, $\Delta \xi^v$ przyrost współrzędnej oraz

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla_v v^\rho &= \left[\left(\frac{1}{\Delta \xi^v} \delta_\rho^k + \Gamma_{kv}^\rho \right) \Delta_v + \Gamma_{kv}^\rho \right] v^k, \\ g &= \det |g_{ij}|, \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{sv} = \frac{e_{sv}}{\sqrt{g}}, \quad \varepsilon_{sv} = e_{sv} \sqrt{g}, \quad e_{12} = 1, \quad e_{21} = -1, \quad e_{11} = e_{22} = 0.$$

Zależności fizyczne w formie rozwiniętej przyjmują postać [4]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} q_1^1 &= \frac{C_1}{(g_{11})^{3/2}} (\nabla_1 v^1 g_{11} + \nabla_1 v^2 g_{21}) + \\ &+ \frac{12D_1}{(g_{11})^{3/2} \sqrt{g}} \left(\omega + \frac{1}{2} \Delta_1 \omega - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \nabla_1 v^2 \right), \\ q_1^2 &= - \frac{12D_1}{\sqrt{gg_{11}}} \left(\omega + \frac{1}{2} \Delta_1 \omega - \omega \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \nabla_1 v^2 \right), \\ q_2^1 &= \frac{12D_2}{\sqrt{gg_{22}}} \left(\omega + \frac{1}{2} \Delta_2 \omega + \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \nabla_2 v^1 \right), \\ q_2^2 &= \frac{C_2}{(g_{22})^{3/2}} (\nabla_2 v^1 g_{12} + \nabla_2 v^2 g_{22}) - \\ &- \frac{12D_2 g_{12}}{(g_{22})^{3/2} \sqrt{g}} \left(\omega + \frac{1}{2} \Delta_2 \omega + \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \nabla_2 v^1 \right), \\ m_1 &= - \frac{2D_1}{\sqrt{g_{11}}} \left(3\omega + \Delta_1 \omega - \frac{3\sqrt{g}}{g_{11}} \Delta_1 v^2 \right), \\ m_2 &= - \frac{2D_2}{\sqrt{g_{22}}} \left(3\omega + \Delta_2 \omega + \frac{3\sqrt{g}}{g_{22}} \nabla_2 v^1 \right), \quad \Delta \xi^v = 1. \end{aligned}$$

Równania równowagi ośrodka dyskretnego [4] mają następującą postać:

$$(1.5) \quad \nabla_\nu q_\nu^\rho + \nabla_{\mu\nu} q_\nu^\rho = 0, \quad A_\nu (m_\nu + A_\mu m_\nu) + (1 + A_\mu) q_\nu^j \varepsilon_{\nu j} = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad A_\xi^{\nu} = 1.$$

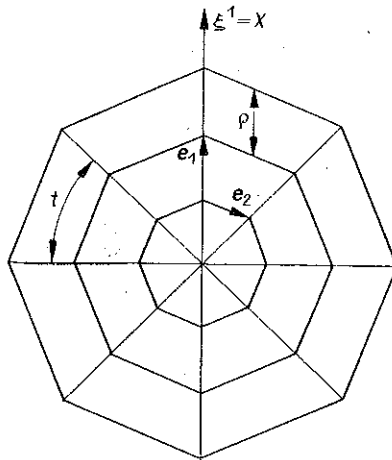
Sumowaniu we wzorach (1.5) podlegają również jednakowe wskaźniki, leżące na jednym poziomie.

Równania (1.5) w postaci rozwiniętej mają formę

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \nabla_1 q_1^1 + \nabla_2 q_2^1 + \nabla_{21} q_1^1 + \nabla_{12} q_2^1 &= 0, & \nabla_1 q_1^2 + \nabla_2 q_2^2 + \nabla_{21} q_1^2 + \nabla_{12} q_2^2 &= 0, \\ A_1 (m_1 + A_2 m_1) + A_2 (m_2 + A_1 m_2) - (1 + A_1) \sqrt{g} q_2^1 + (1 + A_2) \sqrt{g} q_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

2. Zadanie osiowo-symetryczne

Będziemy poszukiwali rozwiązania dla siatki osiowo-symetrycznej, obciążonej również na brzegach osiowo symetrycznie (rys. 2). W tym przypadku wszystkie wielkości zależne będą tylko od jednej zmiennej ξ^1 . Przyjmiemy oznaczenie $\xi^1 = x$.



Rys. 2

Geometria takiej siatki [4] jest określona przez następujące zależności:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= \begin{vmatrix} \rho^2 & -\rho^2 x (1 - \cos t) \\ -\rho^2 x (1 - \cos t) & 2\rho^2 x^2 (1 - \cos t) \end{vmatrix}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{x}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{x}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -2(1 - \cos t)x, & \Gamma_{22}^2 &= -2(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Pochodne kowariantne po uwzględnieniu osiowej symetrii i wzorów (2.1) możemy przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \nabla_1 a^1 &= A_1 a^1, & \nabla_1 a^2 &= \frac{1}{x} [a^2 + (1+x) A_1 a^2], \\ \nabla_2 a^1 &= -2(1 - \cos t) x a^2, & \nabla_2 a^2 &= \frac{a^1}{x} - 2(1 - \cos t) a^2, \\ \nabla_{12} a^1 &= \nabla_{21} a^1 = -2(1 - \cos t) [a^2 + (1+x) A_1 a^2], \\ \nabla_{12} a^2 &= \nabla_{21} a^2 = \frac{1}{x} A_1 a^1 - \frac{2}{x} (1 - \cos t) [a^2 + (1+x) A_1 a^2]. \end{aligned}$$

Zależności fizyczne (1.4) wyrażą się wtedy następującymi wzorami:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} q_1^1(x) &= \frac{1}{\rho} C_1(x) [v^1(x+1) - v^1(x) - (1 - \cos t) A_1 x v^2(x)] - \\ &\quad - \frac{12}{\rho^3} D_1(x) \frac{1 - \cos t}{\sin t} \left[\frac{1}{2} \omega(x+1) + \frac{1}{2} \omega(x) - \sin t A_1 x v^2(x) \right], \\ q_1^2(x) &= -\frac{1}{\rho^3} D_1(x) \frac{1}{x \sin t} \left[\frac{1}{2} \omega(x+1) + \frac{1}{2} \omega(x) - \sin t A_1 x v^2(x) \right], \\ q_2^1(x) &= \frac{6D_2(x)}{q^3 \sin t \sin \frac{t}{2}} \frac{1}{x^2} [\omega(x) - \sin t v^2(x)], \\ q_2^2(x) &= \frac{C_2(x)}{2\rho \sin \frac{t}{2}} \frac{1}{x^2} [v^1(x) - (1 - \cos t) x v^2(x)] + \\ &\quad + \frac{3D_2(x)}{x^3 \rho^3 \sin t \sin \frac{t}{2}} [\omega(x) - \sin t v^2(x)], \\ m_1(x) &= -\frac{2}{\rho} D_1(x) [\omega(x+1) + 2\omega(x) - 3\sin t A_1 x v^2(x)], \\ m_2(x) &= -\frac{3D_2(x)}{x \rho \sin \frac{t}{2}} [\omega(x) - \sin t v^2(x)]. \end{aligned}$$

Wstawiając funkcje (2.3) do równań równowagi (1.6) po pewnych przekształceniach otrzymamy równania przemieszczeniowe:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} L_1 v^2(x) + P_1 \omega(x) &= 0, \\ S_2 [v^1(x) - (1 - \cos t) x v^2(x)] &= 0, \\ L_3 v^2(x) + P_3 \omega(x) &= 0. \end{aligned}$$

Operatory występujące w powyższym układzie równań mają następujące znaczenie:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 2 \left[\cos \frac{t}{2} E \frac{1}{x^2} D_2(x) - \sin t A_1 D_1(x) A_1 x \right], \\
 P_1 &= A_1 D_1(x) (E+1) - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} E \frac{1}{x^2} D_2(x), \\
 S_2 &= A_1 C_1(x) A_1 - 2 \sin \frac{t}{2} E \frac{1}{x} C_2(x), \\
 L_3 &= -3 \sin t A_1 D_1(x) (1+2x) A_1 x, \\
 P_3 &= A_1 D_1(x) [3x(E+1)+E+2],
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

gdzie

$$E\varphi(x) = \varphi(x+1), \quad A_1 \varphi(x) = (E-1)\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

Zauważmy, że drugie równanie układu równań różnicowych drugiego rzędu ma rozwiązanie, jeśli jest spełniony warunek

$$v^1(x) = x(1 - \cos t)v^2(x).$$

Jest to warunek nierozciągłości siatki, równoważny prostopadłości wektora przemieszczenia \mathbf{V} do osi ξ_1 :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

lub inaczej

$$v^1 g_{11} + v^2 g_{12} = 0.$$

Po uwzględnieniu (2.1) otrzymamy warunek (2.6).

Układ równań przemieszczeniowych (2.4) przy założeniu nierozciągłości siatki możemy przedstawić w formie

$$L_1 \hat{v}^2(x) + P_1 \hat{\omega}(x) = 0, \quad L_3 \hat{v}^2(x) + P_3 \hat{\omega}(x) = 0.$$

Funkcje $\hat{v}^2(x)$ i $\hat{\omega}(x)$ są rozwiązaniem w przypadku antysymetrycznego rozkładu obciążenia względem osi ξ^1 (rys. 3c). Natomiast przy obciążeniu symetrycznym względem osi ξ^1 (rys. 3b) mamy

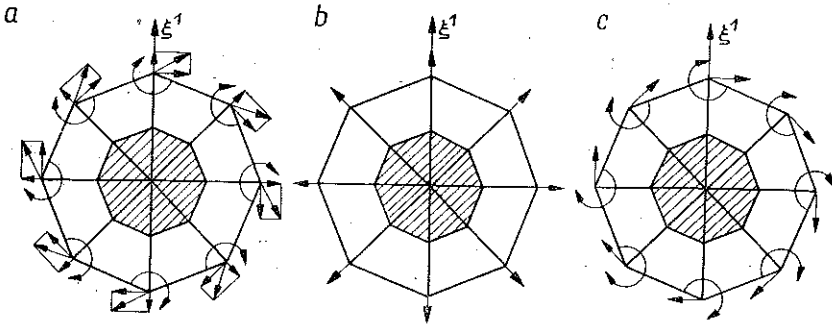
$$\tilde{v}^2(x) = 0, \quad \tilde{\omega}(x) = 0.$$

Układ równań (2.4) sprowadza się wtedy tylko do jednego równania

$$S_2 \tilde{v}^1(x) = 0.$$

Rozwiązaniem układu równań przemieszczeniowych dla dowolnego, osiowo-symetrycznego rozkładu obciążenia, zgodnie z zasadą superpozycji, jest suma rozwiązań dla rozkładu symetrycznego i antysymetrycznego względem osi ξ^1 :

$$v^1(x) = \tilde{v}^1(x) + \hat{v}^1(x), \quad v^2(x) = \hat{v}^2(x), \quad \omega(x) = \hat{\omega}(x).$$



Rys. 3

3. Rozwiązanie dla przypadku symetrii

Równanie (2.10) można napisać w postaci

$$(3.1) \quad \tilde{v}^1(x+2) - \left(1 + \frac{C_1(x)}{C_1(x+1)} + \frac{C_2(x+1)}{C_1(x+1)} \frac{2\sin \frac{t}{2}}{x+1} \right) \times \\ \times \tilde{v}^1(x+1) + \frac{C_1(x)}{C_1(x+1)} \tilde{v}^1(x) = 0.$$

Przyjmijmy, że sztywności są stałe $C_1(x) = C_2(x) = C = \text{const}$; otrzymamy wówczas

$$(3.2) \quad (x+1)\tilde{v}^1(x+2) - 2\left(x+1+\sin \frac{t}{2}\right)\tilde{v}^1(x+1) + (x+1)\tilde{v}^1(x) = 0.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$(3.3) \quad \tilde{v}^1(x) = \frac{\beta(x)}{\Gamma(x)},$$

gdzie $\Gamma(x)$ oznacza funkcję Eulera. Po wstawieniu (3.3) do (3.2) otrzymamy

$$(3.4) \quad \beta(x+2) - 2\left(x+1+\sin \frac{t}{2}\right)\beta(x+1) + x(x+1)\beta(x) = 0.$$

Równanie (3.4) rozwiążemy stosując podstawienie Laplace'a [6]

$$(3.5) \quad \beta(x) = \int_a^b s^{x-1} \varphi(s) ds.$$

Wstawiając funkcję (3.5) do równania (3.4) otrzymamy

$$(3.6) \quad [(x-2s+1)s^x \varphi(s) + s^{x+1} \varphi'(s)]_a^b + \\ + \int_a^b \left[s\varphi''(s) + 2s\varphi'(s) + \left(s - 2\sin \frac{t}{2} \right) \varphi(s) \right] s^x ds = 0.$$

Zażądamy, aby funkcja podcałkowa była równa zero:

$$(3.7) \quad s\varphi''(s) + 2s\varphi'(s) + \left(s - 2\sin \frac{t}{2}\right) \varphi(s) = 0.$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (3.7) jest funkcja

$$(3.8) \quad \varphi(s) = \sqrt{s} e^{-s} \left[I_1 \left(2 \sqrt{2s \sin \frac{t}{2}} \right) + K_1 \left(2 \sqrt{2s \sin \frac{t}{2}} \right) \right],$$

gdzie $I_1(t)$ i $K_1(t)$ są to funkcje Bessela urojonego argumentu. Po przyjęciu granic całkowania $a = 0$, $b = \infty$ funkcja $\varphi(s)$ spełnia równanie (3.6). Wykonując całkowanie zgodnie z (3.5) otrzymamy rozwiązanie równania (3.4):

$$(3.9) \quad \beta(x) = A_1 \Gamma(x) \Gamma(x+1) W_{-x, \frac{1}{2}} \left(2\sin \frac{t}{2} \right) + B_1 \Gamma(x+1) M_{-x, \frac{1}{2}} \left(2\sin \frac{t}{2} \right),$$

gdzie $W_{\lambda, \mu}$ i $M_{\lambda, \mu}$ są to funkcje Whittakera, a A_1 i B_1 stałe dowolne.

Uwzględniając podstawienie (3.3) otrzymamy rozwiązanie równania przemienieniowego (3.2):

$$(3.10) \quad \tilde{v}^1(x) = A_1 \Gamma(x+1) W_{-x, \frac{1}{2}} \left(2\sin \frac{t}{2} \right) + B_1 x M_{-x, \frac{1}{2}} \left(2\sin \frac{t}{2} \right)$$

lub w innej postaci

$$(3.11) \quad \tilde{v}^1(x) = A \Gamma(x+1) \Psi \left(x+1, 2; 2\sin \frac{t}{2} \right) + B L_{(x-1)}^1 \left(-\sqrt{2(1-\cos t)} \right),$$

gdzie L_μ^1 oznacza wielomian Laguerre'a, a $\Psi(a, b; c)$ konfluentną funkcję hipergeometryczną.

Stan naprężenia określimy ze wzorów (2.3) pamiętając że

$$\tilde{\omega} = 0, \quad \tilde{v}^2(x) = 0.$$

Otrzymamy wówczas

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_1^1(x) &= \frac{C}{\rho} A_1 \tilde{v}^1(x), & \tilde{q}_1^2(x) &= 0, & \tilde{q}_2^1(x) &= 0, \\ \tilde{q}_2^2(x) &= \frac{C}{x^2 2\rho \sin \frac{t}{2}} \tilde{v}^1(x), & \tilde{m}_1(x) &= 0, & \tilde{m}_2(x) &= 0. \end{aligned}$$

4. Rozwiązanie w przypadku antysymetrii

Układ równań (2.8) po wstawieniu operatorów (2.5) i uporządkowaniu względem sztywności możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} E \frac{1}{x^2} \frac{D_2(x)}{\sin \frac{t}{2}} [\sin t \hat{v}^2(x) - \hat{\omega}(x)] + \\ + A D_1(x) [(E+1) \hat{\omega}(x) - 2\sin t \Delta x \hat{v}^2(x)] = 0, \\ 3 \Delta x D_1(x) [(E+1) \hat{\omega}(x) - 2\sin t \Delta x \hat{v}^2(x)] + \\ + A D_1(x) [(E+2) \hat{\omega}(x) - 3\sin t \Delta x \hat{v}^2(x)] = 0, \end{aligned}$$

albo inaczej

$$(4.2) \quad Ea(x) + Ab(x) = 0, \quad 3Ax b(x) + Ad(x) = 0,$$

gdzie

$$(4.3) \quad a(x) = \frac{1}{x^2} \frac{D_2(x)}{\sin \frac{t}{2}} [\sin t \hat{\psi}^2(x) - \hat{\omega}(x)],$$

$$b(x) = D_1(x) [(E+1) \hat{\omega}(x) - 2 \sin t Ax \hat{\psi}^2(x)],$$

$$d(x) = D_1(x) [(E+2) \hat{\omega}(x) - 3 \sin t Ax \hat{\psi}^2(x)].$$

Łatwo wykazać, że funkcje $a(x)$, $b(x)$ i $d(x)$ nie są niezależne i spełniają następujące równanie

$$(4.4) \quad \sin \frac{t}{2} \Delta \frac{x^3}{D_2(x)} a(x) + \frac{1}{D_1(x)} [(3x+2)b(x) - (2x+1)d(x)] = 0.$$

Równanie (4.2)₂ możemy łatwo rozwiązać:

$$(4.5) \quad 3x b(x) + d(x) = -B = \text{const.}$$

Z układu trzech równań (4.2)₁, (4.4) i (4.5) wyrugujemy funkcje $a(x)$ i $d(x)$. Otrzymamy wtedy

$$(4.6) \quad (x+1)^3 b(x+1) - [(x+1)^3 + \beta(x)x^3 + a(x)(3x^2 + 3x + 1)] \times \\ \times b(x) + \beta(x)x^3 b(x-1) = \frac{1}{2} B(2x+1)a(x),$$

gdzie

$$(4.7) \quad \beta(x) = \frac{D_2(x+1)}{D_2(x)}, \quad a(x) = \frac{2}{\sin \frac{t}{2}} \frac{D_2(x+1)}{D_1(x)}.$$

Po wyznaczeniu $b(x)$ i $d(x)$ możemy z równań (4.3) wyliczyć przemieszczenia:

$$(4.8) \quad \Delta \hat{\omega}(x) = \frac{1}{D_1(x)} [3b(x) - 2d(x)],$$

$$\Delta x \hat{\psi}^2(x) = \frac{1}{D_1(x) \sin t} [b(x) - d(x)] + \frac{1}{\sin t} \hat{\omega}(x).$$

Wykorzystując wzory (2.3) znajdziemy składowe stanu naprężenia:

$$(4.9) \quad \hat{q}_1^1(x) = -\frac{6}{\rho^3} \text{tg} \frac{t}{2} b(x), \quad \hat{m}_1(x) = -\frac{2}{\rho} d(x),$$

$$\hat{q}_1^2(x) = -\frac{6}{x\rho^3 \sin t} b(x), \quad \hat{m}_2(x) = -\frac{3}{\rho} xa(x),$$

$$\hat{q}_2^1(x) = -\frac{6}{\rho^3 \sin t} a(x), \quad \hat{q}_2^2(x) = -\frac{3}{x\rho^3 \sin t} a(x).$$

Zajmiemy się rozwiązaniem równania (4.6). Założymy, że $D_2(x) = \text{const} = D$. Wówczas $\beta(x) = 1$ i równanie (4.6) możemy przepisać w następującej postaci:

$$(4.10) \quad (x+1)^3 b(x+1) - [(x+1)^3 + x^3 + a(x)(3x^2 + 3x + 1)] \times \\ \times b(x) + x^3 b(x+1) = \frac{1}{2} B(2x+1) a(x),$$

gdzie

$$(4.11) \quad a(x) = \frac{2D}{\sin \frac{t}{2} D_1(x)}.$$

Zastosowanie transformacji Laplace'a do tego równania napotyka na trudności ze względu na to, że otrzymamy równanie różniczkowe trzeciego rzędu o współczynnikach piątego stopnia, dla którego trudno jest znaleźć ogólne rozwiązanie. W naszym przypadku wygodniej będzie rozwiązać równanie następującym sposobem.

Równanie (4.6) jest typu

$$(4.12) \quad a_2(x) y(x+2) + a_1(x) y(x+1) + a_0(x) y(x) = F(x),$$

gdzie

$$(4.13) \quad y(x) = b(x-1).$$

Rozłożymy współczynnik na składniki

$$(4.14) \quad a_1(x) = a'_1(x) + a''_1(x)$$

w taki sposób, aby spełnione były równości

$$(4.15) \quad a_2(x) y(x+2) + a'_1(x) y(x+1) = u(x+1), \\ a''_1(x) y(x+1) + a_0(x) y(x) = \varphi(x) u(x).$$

Wtedy równanie (4.12) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(4.16) \quad u(x+1) + \varphi(x) u(x) = F(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ jest dowolną funkcją związaną z współczynnikami $a_i(x)$ zależnością

$$(4.17) \quad a_1(x) = \varphi(x) a_2(x) + \frac{a_0(x+1)}{\varphi(x+1)}.$$

Uwzględniając w równaniu (4.6) związek (4.17) otrzymamy

$$(4.18) \quad a(x) = \frac{1}{x^3 - (x+1)^3} \left\{ x^3 [\varphi(x) + 1] + (x+1)^3 \left[\frac{1}{\varphi(x+1)} + 1 \right] \right\},$$

gdzie $\varphi(x)$ jest dowolną funkcją taką, aby $a(x) > 0$. W naszym przypadku przyjmie-
my takie $\varphi(x)$, aby pozbyć się mianownika we wzorze (4.18). Nastąpi to, gdy

$$(4.19) \quad \varphi(x+1) = -\frac{1}{\varphi(x)+2}.$$

Równanie różnicowe, nieliniowe tego typu rozwiążemy stosując podstawienie

$$\varphi(x) = \frac{w(x)}{v(x)},$$

które sprowadzi to równanie do układu równań liniowych [5]. Po rozwiązaniu otrzymamy

$$(4.20) \quad \varphi(x) = -\frac{k+x}{x+k+1},$$

gdzie k jest stałą dowolną. Wstawiając zależność (4.20) do (4.18) otrzymamy

$$(4.21) \quad a = \frac{1}{(x+k+1)}.$$

Równanie (4.6) rozwiążemy ograniczając się do przypadku, gdy współczynnik $a(x)$ dany jest wzorem (4.21).

Zależność (4.16) po uwzględnieniu (4.20) przyjmie postać

$$(4.22) \quad u(x+1) - \frac{x+k}{x+k+1} u(x) = \frac{B}{2} \frac{2x+1}{x+k+1}.$$

Przez podstawienie

$$(4.23) \quad u(x) = \frac{1}{x+k} s(x)$$

otrzymamy proste równanie

$$(4.24) \quad \Delta s(x) = \frac{1}{2} B(2x+1) = \frac{1}{2} B(x^2 + 2x + 1 - x^2).$$

Rozwiązaniem tego równania będzie funkcja

$$(4.25) \quad s(x) = A + \frac{1}{2} Bx^2.$$

Równanie (4.15) po uwzględnieniu (4.20), (4.14) i (4.16) możemy napisać w formie

$$(4.26) \quad x^3 y(x+1) - \frac{(x+k+1)x^3 y(x)}{x+k} = u(x) = \frac{A + \frac{1}{2} Bx^2}{x+k}.$$

Dokonajmy następującego podstawienia:

$$(4.27) \quad y(x) = (x+k) z(x);$$

otrzymamy wtedy

$$(4.28) \quad \Delta z(x) = \frac{A + \frac{1}{2} Bx^2}{x^3 (x+k) (x+k+1)}.$$

Równanie tego typu dla x całkowitych ma rozwiązanie [5]

$$(4.29) \quad z(x) = H + \sum_{n=1}^{x-1} \frac{A + \frac{1}{2} B n^2}{n^3 (n+k) (n+k+1)},$$

gdzie H jest stałą dowolną.

Po uwzględnieniu podstawień (4.27) i (4.13) otrzymamy

$$(4.30) \quad b(x) = (x+k+1) \left[H + A \sum_{n=1}^x \frac{1}{n^3 (n+k) (n+k+1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B \sum_{n=1}^x \frac{1}{n(n+k) (n+k+1)} \right].$$

W powyższym wzorze pierwsze dwa wyrazy zawierające dwie stałe dowolne A i H są rozwiązaniem równania jednorodnego; natomiast wyraz ostatni jest szczególnym rozwiązaniem równania pełnego.

Funkcje $a(x)$ i $d(x)$ określimy z równań (4.2) i (4.5). Otrzymamy wtedy

$$(4.31) \quad a(x) = b(x-1) - b(x), \quad d(x) = -(3xb(x) + B).$$

Stan naprężenia opisany jest wzorami (4.9).

Stan przemieszczenia określimy ze wzorów (4.8). Wykorzystując wzory (4.31) otrzymamy

$$(4.32) \quad \Delta \hat{\omega}(x) = \frac{1}{D_1(x)} [3(1+2x)b(x) + 2B], \\ \Delta x \hat{v}^2(x) = \frac{1}{D_1(x) \sin t} [(1+3x)b(x) + B] + \frac{1}{\sin t} \hat{\omega}(x).$$

Po rozwiązaniu równania różnicowego (4.32)₁ dla całkowitych x otrzymamy

$$(4.33) \quad \hat{\omega}(x) = N + \sum_{n=1}^{x-1} \frac{1}{D_1(n)} [3(1+2n)b(n) + 2B].$$

Rozwiązanie równania (4.32)₂ otrzymamy w podobny sposób wykorzystując rozwiązanie (4.33):

$$(4.34) \quad \hat{v}^2(x) = \frac{1}{x} \left\{ M + Nx + \frac{1}{\sin t} \sum_{n=1}^{x-1} \frac{1}{D_1(n)} [(1+3n)b(n) + B] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin t} \sum_{n=2}^{x-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_1(k)} [3(1+2k)b(k) + 2B] \right\},$$

gdzie N i M oznaczają stałe dowolne.

Drugą składową przemieszczenia wyznaczmy łatwo ze wzoru (2.6); otrzymamy wtedy

$$(4.35) \quad v^1(x) = (1 - \cos t) \left\{ M + Nx + \frac{1}{\sin t} \sum_{n=1}^{x-1} \frac{1}{D_1(n)} [(1+3n)b(n) + B] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin t} \sum_{n=2}^{x-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{D_1(k)} [3(1+2k)b(k) + 2B] \right\}.$$

5. Przykład

Jako przykład rozwiążemy ramę dla $t = \pi/2$ (rys. 4). Przyjmiemy, że sztywności rozciągania są równe we wszystkich prętach:

$$(5.1) \quad C_1(x) = C_2(x) = \text{const} = C.$$

Natomiast sztywności zginania przyjmiemy takie, aby móc skorzystać z rozwiązania (4.30). W tym przypadku współczynnik $a(x)$ dany jest wzorem (4.21):

$$(5.2) \quad a(x) = \frac{1}{x+k+1}.$$

Z drugiej strony mamy ze wzoru (4.11)

$$(5.3) \quad a(x) = \frac{2D}{\sin \frac{t}{2} D_1(x)},$$

gdzie $D = \text{const}$ oznacza sztywność prętów obwodowych.

Porównując (5.2) i (5.3) otrzymamy

$$(5.4) \quad D_1(x) = \frac{2D}{\sin \frac{t}{2}} (x+k+1).$$

W naszym przykładzie przyjmiemy stałą dowolną $k = 0$; wtedy sztywność giętna prętów promieniowych będzie określona funkcją

$$(5.5) \quad D_1(x) = \frac{4D}{\sqrt{2}} (x+1).$$

Najpierw rozpatrzmy przypadek symetrii (rys. 5).

Po uwzględnieniu w rozwiązaniu (3.11) $t = \pi/2$ otrzymamy

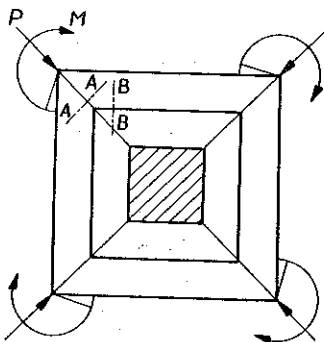
$$(5.6) \quad \tilde{v}^1(x) = A\Gamma(x+1) \Psi(x+1, 2; \sqrt{2}) + BL_{(x-1)}^1(-\sqrt{2}).$$

Dwie stałe A i B obliczymy z następujących warunków brzegowych:

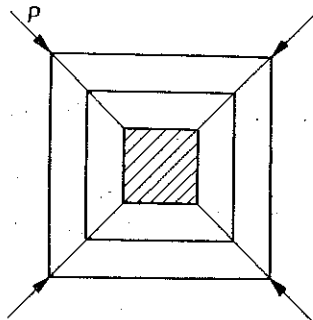
$$(5.7) \quad \tilde{v}^1(1) = 0, \quad \tilde{q}_1^1(3) = \frac{1}{\rho} C [\tilde{v}^1(4) - \tilde{v}^1(3)] = -\frac{1}{\rho} P.$$

Warunki (5.7) możemy po uwzględnieniu wzoru (5.6) przedstawić następująco:

$$(5.8) \quad C \{A [\Gamma(5) \Psi(5, 2; \sqrt{2}) - \Gamma(4) \Psi(4, 2; \sqrt{2})] + \\ + B [L_3^1(-\sqrt{2}) - L_2^1(-\sqrt{2})]\} = -P.$$



Rys. 4



Rys. 5

Wykorzystując przedstawienie całkowe konfluentnej funkcji hipergeometrycznej oraz wzory rekurencyjne [1, 7 i 8] łatwo określimy wartości funkcji w rozpatrywanych punktach:

$$\Psi(2, 2; \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}),$$

$$\Psi(3, 2; \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2}) \left[\frac{1}{2} + e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}) \right],$$

$$\Psi(4, 2; \sqrt{2}) = \frac{1}{12}(5+2\sqrt{2}) + \frac{1}{6}(4+3\sqrt{2}) e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}),$$

$$\Psi(5, 2; \sqrt{2}) = \frac{1}{72} [14+7\sqrt{2} + (24+19\sqrt{2}) e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2})],$$

$$L_0^1(-\sqrt{2}) = 1, \quad L_1^1(-\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2},$$

$$L_2^1(-\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}, \quad L_3^1(-\sqrt{2}) = 8 + \frac{19}{3}\sqrt{2},$$

gdzie $Ei(x)$ oznacza całkową funkcję wykładniczą.

Możemy z kolei rozwiązać układ równań (5.8). Otrzymamy wówczas

$$(5.9) \quad A = \frac{6}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{C}, \quad B = -\frac{6}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{C} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}) \right].$$

Po wstawieniu stałych i uwzględnieniu wzorów (3.12) znajdziemy następujące rozwiązanie:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \tilde{v}^1(x) &= \frac{P}{C} \gamma(x), & \tilde{q}_1^1(x) &= \frac{P}{\rho} [\gamma(x+1) - \gamma(x)], \\ \tilde{q}_2^2(x) &= \frac{P}{\rho} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2} \gamma(x), & \tilde{q}_1^2(x) &= \tilde{q}_2^1(x) = \tilde{m}_1(x) = \tilde{m}_2(x) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.11) \quad \gamma(x) = \frac{6}{7+4\sqrt{2}} \left\{ \Gamma(x+1) \Psi(x+1, 2; \sqrt{2}) - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{\sqrt{2}} Ei(-\sqrt{2}) \right] L_{(x-1)}^1(-\sqrt{2}) \right\}.$$

W odpowiednich punktach przemieszczenia i naprężenia przyjmą następujące wartości:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_1^1(1) &= -\frac{3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{\rho}, & \tilde{q}_1^1(2) &= -\frac{3+3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{\rho}, \\ \tilde{q}_2^2(2) &= -\frac{3}{28+16\sqrt{2}} \frac{P}{\rho}, & \tilde{q}_2^2(3) &= -\frac{1+2\sqrt{2}}{24+21\sqrt{2}} \frac{P}{\rho}, \\ \tilde{v}^1(2) &= -\frac{3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{C}, & \tilde{v}^1(3) &= -\frac{3+6\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{C}. \end{aligned}$$

Zajmiemy się rozwiązaniem przypadku antysymetrii (rys. 6).

Stałe A, B i H w funkcji $b(x)$ (4.30) wyznaczamy z następujących warunków brzegowych:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \hat{v}^2(1) &= \hat{v}^1(1) = 0, & \hat{q}_1^1(3) &= 0, \\ \hat{\omega}(1) &= 0, & \hat{q}_1^2(3) &= 0, \\ \hat{m}_1(3) &= M, \end{aligned}$$

Pierwsze dwa warunki oraz równanie (4.3)₁ dadzą

$$(5.14) \quad a(1) = 0.$$

Ze wzoru (4.2)₂ i (5.14) otrzymamy

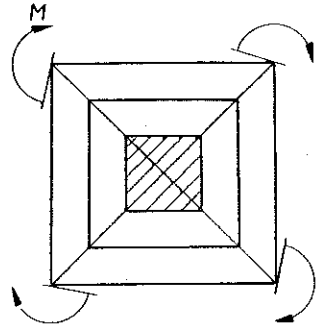
$$(5.15) \quad A_1 b(0) = 0.$$

Z przedostatniego równania (4.9) i warunku trzeciego otrzymamy

$$(5.16) \quad \hat{m}_1(3) = -\frac{2}{\rho} d(3) = M.$$

Czwarty lub piąty warunek po wstawieniu do równań (4.9) daje

$$(5.17) \quad b(3) = 0.$$



Rys. 6

Z równań (4.5), (5.16) i (5.17) wyznaczmy stałą B :

$$(5.18) \quad B = \frac{\rho}{2} M.$$

Z układu równań (5.15) i (5.17) wyznaczmy stałe A i H :

$$(5.19) \quad A = -\frac{504}{617} \frac{B}{2}, \quad H = -\frac{113}{617} \frac{B}{2}.$$

Po wstawieniu znalezionych stałych do równania (4.30) otrzymamy

$$(5.20) \quad b(x) = -\frac{M\rho(x+1)}{4} \left[\frac{113}{617} + \frac{504}{617} \sum_{n=1}^x \frac{1}{n^4(n+1)} + \sum_{n=1}^x \frac{1}{n^2(n+1)} \right].$$

Stałe M i N występujące w równaniach (4.33) obliczymy z dwu pierwszych warunków brzegowych. Otrzymamy wtedy

$$(5.21) \quad M = 0, \quad N = 0.$$

W ten sposób za pomocą wzorów (4.34) i (4.9) mamy określony stan naprężenia dla obciążenia antysymetrycznego.

Zgodnie z zasadą superpozycji (2.11) rozwiązaniem pełnym będzie suma rozwiązań dla przypadków symetrii i antysymetrii. Przemieszczenia i stan naprężenia dla naszego przykładu będą więc opisane następującymi wzorami:

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \omega(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4D} \sum_{n=1}^{x-1} \frac{1}{n+1} [3(1+2n)b(n) + M\rho], \\ v^2(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4Dx} \left\{ \sum_{n=1}^{x-1} \frac{1}{n+1} \left[(1+3n)b(n) + \frac{1}{2} M\rho \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{x-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} [3(1+2k)b(k) + M\rho] \right\}, \\ v^1(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4D} \left\{ \sum_{n=1}^{x-1} \frac{1}{n+1} \left[(1+3n)b(n) + \frac{1}{2} M\rho \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{x-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} [3(1+2k)b(k) + M\rho] \right\} + \frac{P}{C} \gamma(x), \\ q_1^1(x) &= \frac{P}{\rho} [\gamma(x+1) - \gamma(x)] - \frac{1}{\rho^3} 6b(x), \quad q_1^2(x) = -\frac{6}{\rho^3 x} b(x), \\ q_2^1(x) &= -\frac{6}{\rho^3} [b(x-1) - b(x)], \\ q_2^2(x) &= \frac{P}{\rho \sqrt{2} x^2} \gamma(x) - \frac{3}{\rho^3 x} [b(x-1) - b(x)], \\ m_1(x) &= \frac{2}{\rho} \left[3xb(x) + \frac{1}{2} M\rho \right], \quad m_2(x) = \frac{3x}{\rho} [b(x) - b(x-1)], \end{aligned}$$

gdzie $\gamma(x)$ i $b(x)$ określone są przez wzory (5.11) i (5.20).

Obliczymy przykładowo wartości przemieszczeń i naprężeń dla $x = 2$ (przekroje $A-A$ i $B-B$, rys. 4):

$$\omega(2) = \frac{1451\sqrt{2}}{19744} \frac{M\rho}{D}, \quad v^2(2) = \frac{391\sqrt{2}}{19744} \frac{M\rho}{D},$$

$$v^1(2) = \frac{391\sqrt{2}}{9872} \frac{M\rho}{D} - \frac{3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{C},$$

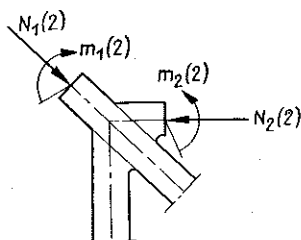
$$q_1^1(2) = -\frac{3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} \frac{P}{\rho} + \frac{561}{4936} \frac{M}{\rho^2},$$

$$q_1^2(2) = \frac{561}{9872} \frac{M}{\rho^2}, \quad q_2^1(2) = \frac{795}{4936} \frac{M}{\rho^2},$$

(5.23)

$$q_2^2(2) = -\frac{3}{28+16\sqrt{2}} \frac{P}{\rho} + \frac{795}{19744} \frac{M}{\rho^2},$$

$$m_1(2) = \frac{4375}{4936} M, \quad m_2(2) = -\frac{795}{4936} M.$$



Rys. 7

Momenty gnące są równe $m_1(2)$ i $m_2(2)$ (rys. 7); dodatni znak momentu jest zgodny z obrotem wskazówek zegara.

Siły normalne obliczymy łatwo, mnożąc odpowiednio wektory naprężeń przez wektory bazy e_1 i e_2 :

$$(5.24) \quad Q_v = q_v^i e_i \cdot e_v.$$

Otrzymamy wtedy

$$(5.25) \quad N_v = \frac{1}{\sqrt{g_{vv}}} q_v^i g_{iv}$$

lub w formie rozwiniętej

$$(5.26) \quad N_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (q_1^1 g_{11} + q_1^2 g_{21}), \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (q_2^1 g_{12} + q_2^2 g_{22}).$$

Obiekt podstawowy dla $t = \pi/2$ ma następującą postać:

$$(5.27) \quad g_{ij} = \begin{vmatrix} \rho^2 & -\rho^2 x \\ -\rho^2 x & 2\rho^2 x^2 \end{vmatrix}.$$

Stąd dla $x = 2$ siły normalne przyjmą wartości

$$(5.28) \quad N_1(2) = -\frac{3+3\sqrt{2}}{7+4\sqrt{2}} P, \quad N_2(2) = -\frac{3}{7\sqrt{2}+8} P.$$

Literatura cytowana w tekście

1. H. BATEMAN, A. ERDÉLYI, *Higher Transcendental Eunktion*, 1, New York 1953.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Geometry of a discrete set of points*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 2, 14 (1966).
3. H. FRĄCKIEWICZ, *Deformation of a discrete set of points*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. techn., 9, 14 (1966).
4. H. FRĄCKIEWICZ, *A plane problem of the theory of elasticity for media with a discrete lattice structure*, Arch. Mech. Stos., 5, 19 (1967).
5. H. LEVY, F. LESSMAN, *Równania różnicowe skończone*, PWN, Warszawa 1966.
6. H. MESCHKOWSKI, *Differenzgleichungen*, Van den Hoeck, Gottingen 1959.
7. I. S. GRADSZTEJN, I. M. RYŻIK, *Tablicy integralow, summ, rjadov i proizwedenij*, G.I. Fiz-Mat. Lt., Moskwa 1963.
8. L. J. SLATER, *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge 1960.

Резюме

ПЛОСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
В ДИСКРЕТНОЙ СРЕДЕ

Работа основывается на теории дискретной среды, предложенной Х. Фронцкевичем. Для плоской осесимметрической сетки, обладающей жесткостью на растяжение и изгиб, нагруженной осесимметрически, выводятся уравнения в перемещениях, являющиеся системой трех разностных линейных уравнений второго порядка. Эти уравнения, для данных жесткостей, решаются общим способом. В приведенном примере определяются перемещения и напряженное состояние, находя произвольные постоянные из краевых условий.

Summary

A PLANE AXIALLY-SYMMETRICAL PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY

This paper is based on the theory of a discrete medium introduced by H. Frąckiewicz. For a plane axially-symmetrical grid possessing rigidity of stretching and bending, and loaded with an axial symmetry, the displacement equations are introduced, consisting of a set of three linear difference equations of the second order. These equations are solved for preassumed rigidities. For a concrete case the displacements and state of stresses are found, determining the arbitrary constants from the boundary conditions.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 czerwca 1969 r.