

POLARYZACYJNO-OPTYCZNA METODA WYZNACZANIA SKŁADOWYCH
PŁASKIEGO STANU NAPRĘŻENIA W OBSZARZE PLASTYCZNYM

ANDRZEJ LITEWKA (POZNAŃ)

1. Wstęp

Szerokie zastosowanie metod fotosprężystości w analizie stanu naprężenia ciał liniowo-sprężystych skłoniło licznych badaczy do poszukiwania możliwości zastosowania metod polaryzacyjno-optycznych również do zagadnień niesprężystych. Poszukiwania te doprowadziły do powstania nowego działu doświadczalnej analizy stanu naprężenia, mianowicie fotoplastyczności.

Obserwowany w ostatnich latach wzrost zainteresowania metodą fotoplastyczności idzie w parze z ogólnymi tendencjami rozwoju doświadczalnych i teoretycznych metod rozwiązywania zagadnień niesprężystych. Większość rozwiązań otrzymanych na gruncie teorii plastyczności dotyczy jednak ciał idealnie plastycznych, a nie rzeczywistych materiałów konstrukcyjnych, których krzywe rozciągania $\sigma = \psi(\epsilon)$ odbiegają od wykresu rozciągania dla ciała idealnie plastycznego. Wyznaczenie na drodze teoretycznej stanu naprężenia i odkształcenia w ciałach o dowolnym wykresie rozciągania $\sigma = \psi(\epsilon)$, aproksymowanym za pomocą pewnych funkcji, napotyka na szereg trudności. W związku z tym najwięcej uwagi poświęcano dotychczas zagadnieniom prostszym, lecz mającym duże znaczenie praktyczne; do nich należy zaliczyć zagadnienie koncentracji naprężeń.

Rozwiązania tego zagadnienia podane przez NEUBERA [15], PANFEROWA [17], BUDIANSKY'EGO i VIDENSEKA [12] i innych teoretyków wymagają przeprowadzenia pracochłonnych obliczeń, a są tylko rozwiązaniami przybliżonymi. Natomiast metoda fotoplastyczności umożliwia modelowanie płaskich sprężystoplastycznych stanów naprężenia dla rzeczywistych materiałów konstrukcyjnych. Wynika to stąd, że celuloid używany do badań jako materiał modelowy spełnia wymagane warunki podobieństwa modelowego, mianowicie:

- a) krzywe rozciągania celuloidu wykazują podobieństwo do krzywych rozciągania takich metali, jak aluminium, miedź oraz pewne gatunki stali;
- b) współczynniki Poissona celuloidu oraz metali w obszarze plastycznym są zbliżone;
- c) zachowanie celuloidu oraz metali w obszarze plastycznym opisywane jest tym samym warunkiem uplastycznienia, mianowicie warunkiem Hubera-Misesa-Hencky'ego.

Większość prac, poświęconych fotoplastyczności [4 i 5] ze względu na szereg czynników nie spotykanych przy modelowaniu zagadnień sprężystych, rzuciło tylko światło na skomplikowany charakter badań niesprężystych stanów naprężenia. Prowadzone w ostatnich latach intensywne badania dały jednak w wyniku kilka metod fotoplastyczności, umożliwiających wyznaczanie sprężystoplastycznych płaskich stanów naprężenia. Spośród tych metod wymienić należy metodę Frochta oraz Netebki, które umożliwiają, w oparciu o dane uzyskane metodą fotoplastyczności, wyznaczenie na drodze numerycznej wszystkich trzech składowych płaskiego stanu naprężenia zarówno w obszarze sprężystym jak i plastycznym.

Wyznaczenie naprężeń metodą Netebki wymaga znacznego nakładu pracy rachunkowej, metoda ta jednak umożliwia wyznaczenie w sposób prosty granic obszaru plastycznego. Natomiast odznaczająca się dużą prostotą metoda Frochta nie daje tej możliwości.

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda umożliwia przy użyciu celuloиду jako materiału modelowego rozgraniczenie obszaru sprężystego od plastycznego oraz wyznaczenie w obszarze plastycznym wszystkich trzech składowych płaskiego stanu naprężenia.

2. Omówienie proponowanej metody

Proponowana metoda polega na wyznaczeniu w trakcie badań trzech wielkości: rzędu izochrom m_1 dla światła monochromatycznego o długości fali λ_1 , rzędu izochrom m_2 dla światła monochromatycznego o długości fali λ_2 , parametru izoklin θ oraz dyspersji dwójłomności D . Wielkość dyspersji dwójłomności obliczona była zgodnie z definicją MÖNCHA [6] ze wzoru

$$(2.1) \quad D = \frac{m_1 \lambda_1 - m_2 \lambda_2}{m_1 \lambda_1},$$

przy czym $\lambda_1 > \lambda_2$. Wyznaczone w trakcie badań cztery wielkości powinny być również w sposób jednoznaczny związane ze stanem naprężenia.

Interpretacją rzędu izochrom m oraz parametru izoklin θ zajmował się w swych badaniach FROCHT [1, 7 i 8]. Wnioski z jego badań przedstawiają się następująco:

a) krzywa zależności pomiędzy różnicą naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2$ a rzędem izochrom m wykreślona na podstawie krzywych pełzania celuloidu dla czasu $t = 300$ min jest jednojednoznaczna zależnością wiążącą wartość $\sigma_1 - \sigma_2$ z rzędem izochrom m . Zależność tę można przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \varphi(m);$$

b) parametr izoklin przedstawia w obszarze plastycznym kierunki naprężeń głównych bez względu na stan materiału, stan naprężeń oraz historię naprężeń.

Prowadząc badania podobnie jak to robił FROCHT i opierając się na podanych przez niego wnioskach można zarówno w obszarze sprężystym jak i plastycznym wyznaczyć różnicę naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2$ oraz kierunki naprężeń głównych.

W przeciwieństwie do FROCHTA, który dalsze rozwiązanie zagadnienia przeprowadza przybliżoną metodą różnicy naprężeń stycznych, proponuje się tu wyznaczenie

sumy naprężeń głównych $\sigma_1 + \sigma_2$ na podstawie zdjęć izochrom wykonanych dla dwóch monochromatycznych źródeł światła, np. dla żółtego światła sodu ($\lambda_{\text{Na}} = 589,3$ nm) oraz dla niebieskiej linii widma rtęci ($\lambda_{\text{Hg}} = 435,8$ nm). W tym celu można wykorzystać związek pomiędzy dyspersją dwójłomności D oraz intensywnością naprężeń σ_i . Związek ten można wyprowadzić wychodząc z warunku uplastycznienia Hubera-Misesa-Hencky'ego, który dla płaskiego stanu naprężeń ma postać

$$(2.3) \quad (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)^{1/2} - \sigma_0 = 0$$

lub po przekształceniu

$$(2.4) \quad \left[\frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right]^{1/2} - \sigma_0 = 0.$$

Do przyjęcia tego warunku uplastycznienia upoważniają badania przeprowadzone przez MÖNCHA i JIRĘ. W pracy [9] wykazali oni, że warunek uplastycznienia Hubera-Misesa-Hencky'ego w zadawalający sposób opisuje zachowanie się celuloidu.

W przypadku materiału idealnie plastycznego wartość $\sigma_1 + \sigma_2$ można obliczyć wprost z zależności (2.4). Z uwagi na to, że celuloid wykazuje w obszarze plastycznym wzmocnienie, korzystanie bezpośrednio z tej zależności prowadziłoby do znacznych błędów. Zależność (2.4) dla materiału podlegającego wzmocnieniu można napisać w postaci

$$(2.5) \quad \left[\frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right]^{1/2} - \sigma_0 = f_1(\varepsilon_i)$$

lub

$$\sigma_i - \sigma_0 = f_1(\varepsilon_i),$$

gdzie σ_i oznacza intensywność naprężeń oraz ε_i intensywność odkształceń.

Na podstawie badań przeprowadzonych przez JIRĘ [10] można przyjąć, że dyspersja dwójłomności D , obliczona zgodnie z definicją Möncha z zależności (2.1), jest miarą intensywności odkształceń ε_i ; można więc zależność (2.5) przepisać w postaci

$$(2.6) \quad \sigma_i - \sigma_0 = f(D).$$

Wykres krzywej obrazującej tę zależność można znaleźć doświadczalnie na podstawie próby osiowego rozciągania, gdyż jak wykazał w swych badaniach NETREBKO [2] jej kształt jest niezależny od stanu naprężenia.

Po przekształceniu zależności (2.6) otrzymuje się wzór

$$(2.7) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \pm \{4 [\sigma_0 + f(D)]^2 - 3 (\sigma_1 - \sigma_2)^2\}^{1/2}$$

umożliwiający obliczenie sumy naprężeń głównych. Odpowiedni znak dla $\sigma_1 + \sigma_2$ łatwo dobrać rozpoczynając obliczenia od krawędzi nieobciążonej, gdzie suma naprężeń głównych jest znana.

Znajomość sumy i różnicy naprężeń głównych jest równoznaczna ze znajomością obu naprężeń głównych σ_1 i σ_2 . Brakujący do pełnego wyznaczenia stanu naprężenia kąt nachylenia kierunków głównych, określony jest w każdym punkcie modelu przez obraz izoklin.

3. Sposób przeprowadzenia badań

3.1. Badania cechujące. Dla znalezienia krzywych niezbędnych do wyznaczenia za pomocą proponowanej metody sumy i różnicy naprężeń głównych przeprowadzone zostały dla materiału modelowego, tzn. celuloиду, badania cechujące. Badania te wykonano według następującego programu:

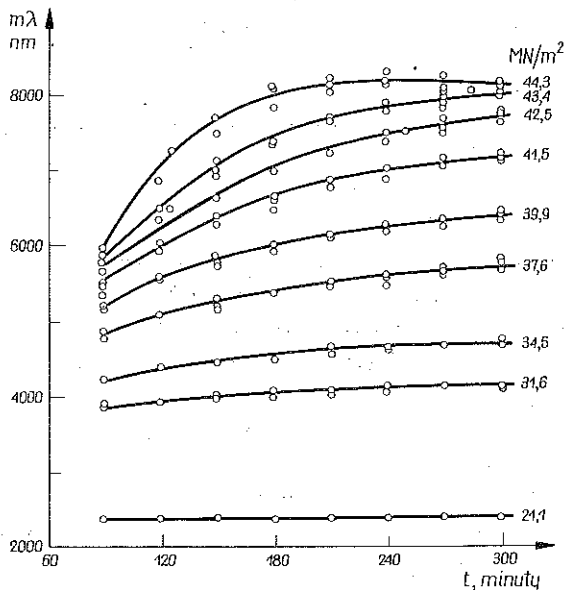
a) wykonanie badań pełzania optycznego równocześnie dla dwóch różnych monochromatycznych źródeł światła, np. dla żółtego światła sodu o długości fali świetlnej $\lambda_{\text{Na}} = 589,3 \text{ nm}$ oraz dla niebieskiej linii światła lampy rtęciowej o długości fali świetlnej $\lambda_{\text{Hg}} = 435,8 \text{ nm}$;

b) wykonanie badań pełzania mechanicznego celuloиду;

c) wykreślenie na podstawie wyników badań pełzania mechanicznego krzywej zależności pomiędzy naprężeniem σ i odkształceniem ε dla czasu $t = 300 \text{ min}$;

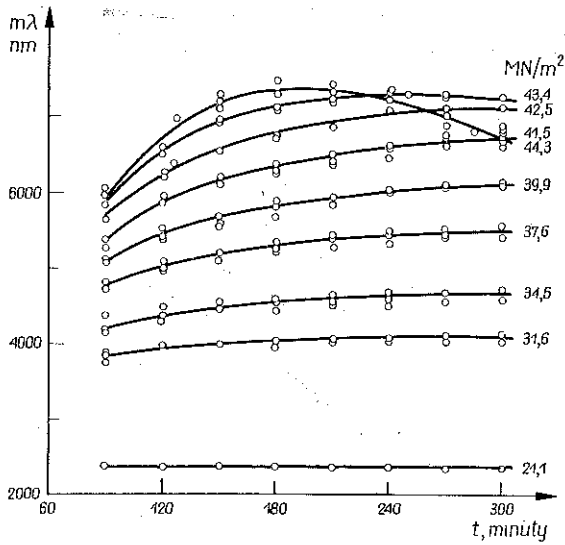
d) wykreślenie na podstawie wyników badań pełzania optycznego krzywej, obrazującej zależność pomiędzy rzędem izochromy m a różnicą naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2$ dla obu źródeł światła dla czasu $t = 300 \text{ min}$;

e) wykreślenie wykresu krzywej $\sigma_1 - \sigma_0 = f(D)$.

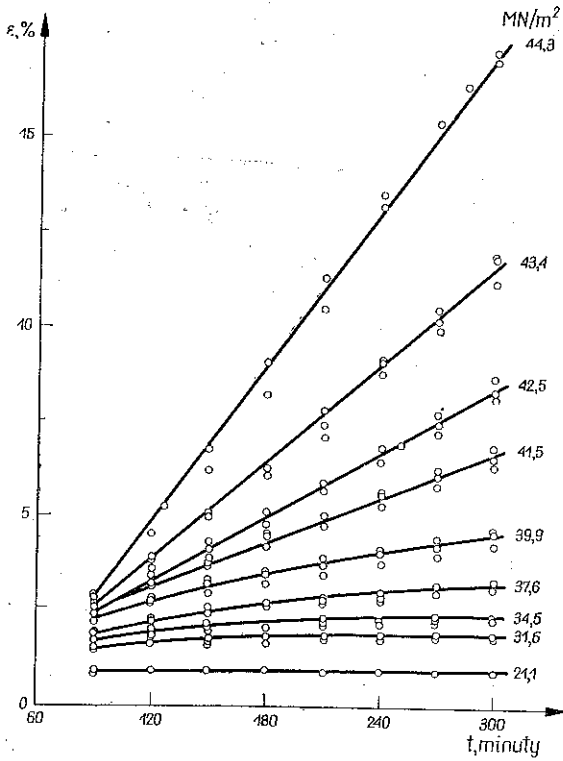


Rys. 1. Krzywe pełzania optycznego celuloиду dla monochromatycznego światła sodowego ($\lambda = 589,3 \mu\text{m}$).

Pomiar pełzania mechanicznego i optycznego przeprowadzono równocześnie na próbkach poddanych różnym wartościom naprężenia rozciągającego. Wartości te wynosiły 21,1; 31,6; 34,5; 37,6; 39,9; 41,5; 42,5; 43,4; 44,3 MN/m². Obciążenie próbek z uwagi na powolne rozwijanie się odkształceń plastycznych podwyższono stopniowo od zera do końcowej wartości przez okres 90 min. Podczas badań zachowano stałość temperatury i wilgotności w granicach $\pm 1^\circ\text{C}$ i $\pm 4\%$. Otrzymane z badań krzywe pełzania mechanicznego i optycznego przedstawione zostały na rys. 1, 2 i 3.

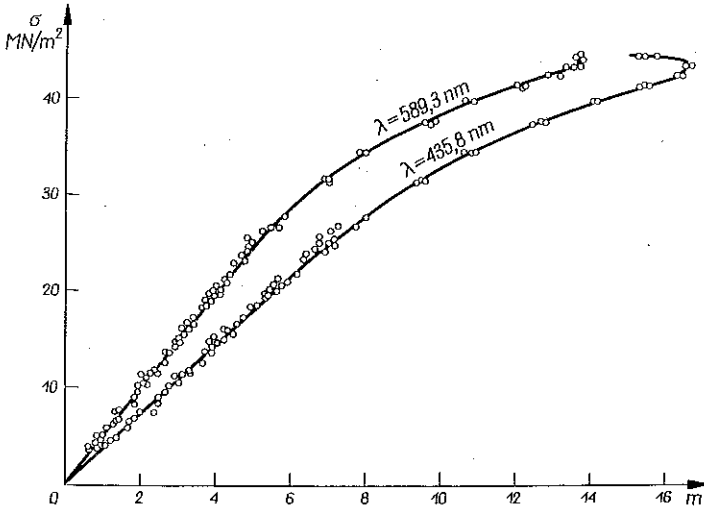


Rys. 2. Krzywe pełzania optycznego celulozoidu dla monochromatycznego światła niebieskiego ($\lambda = 435,8 \mu\text{m}$).

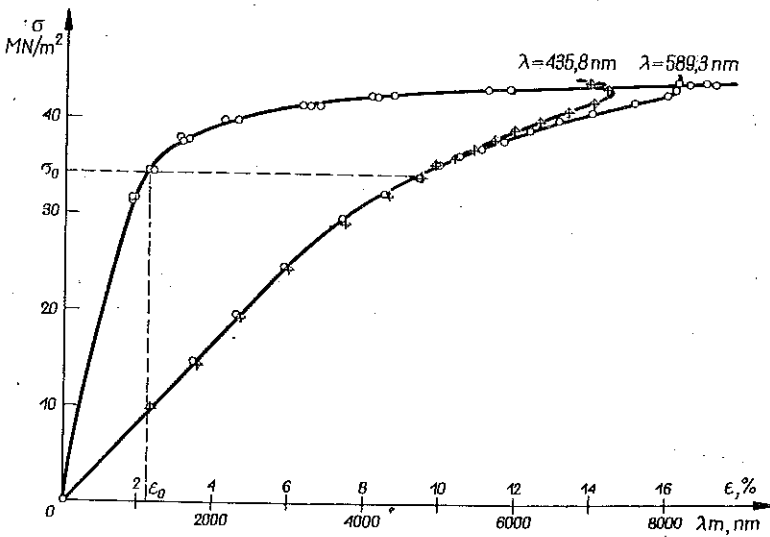


Rys. 3. Krzywe pełzania mechanicznego dla celulozoidu.

Wykreślone na ich podstawie dla czasu $t = 300$ min krzywe $\sigma = \psi(\varepsilon)$, $\sigma_1 - \sigma_2 = \varphi(m)$ oraz $\sigma_1 - \sigma_0 = f(D)$ przedstawione są na rys. 4, 5 i 6. Na rys. 5 przedstawiono również krzywe zależności pomiędzy dwójłomnością ($m\lambda$) a naprężeniem σ dla obu źródeł światła. Krzywe te wraz z przedstawionymi na rys. 7 krzywymi



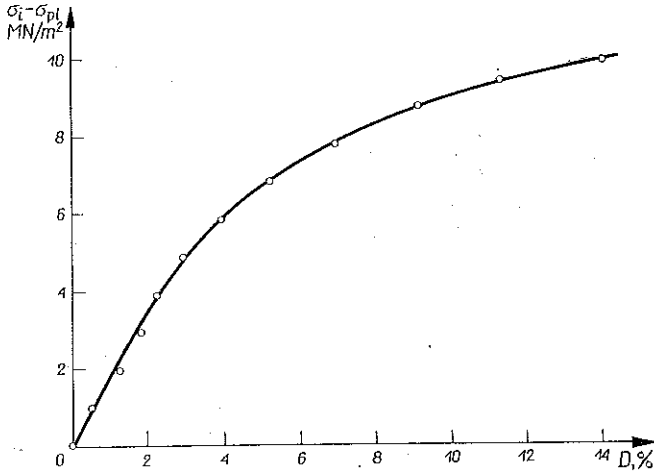
Rys. 4. Krzywe zależności pomiędzy rzędem izochrom m oraz różnicą naprężeń głównych $\sigma_1 - \sigma_2$ dla światła żółtego i niebieskiego dla celulozoidu.



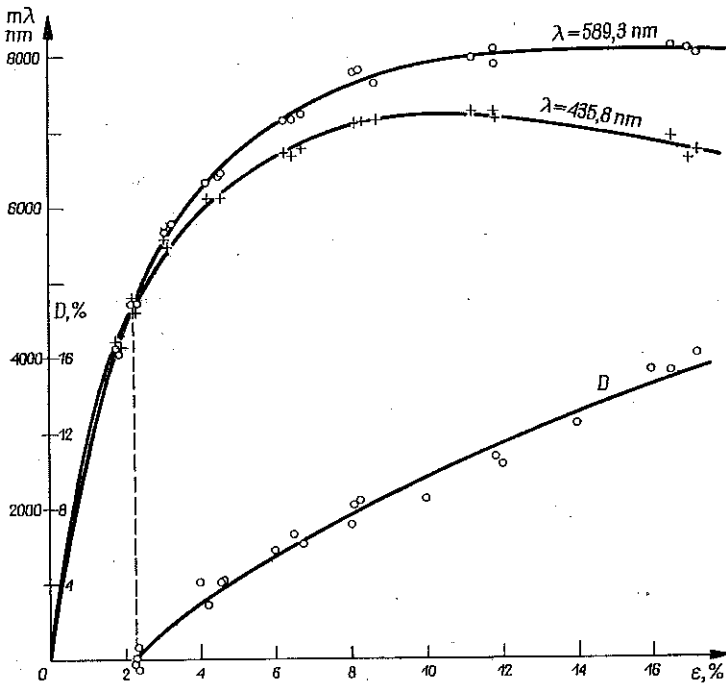
Rys. 5. Krzywa zależności pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla celulozoidu wykreślona dla czasu $t = 300$ minut oraz krzywe zależności pomiędzy naprężeniem a dwójłomnością dla światła niebieskiego i żółtego.

$m\lambda_{\text{Na}} = f_1(\varepsilon)$, $m\lambda_{\text{Hg}} = f_2(\varepsilon)$ oraz $D = f_3(\varepsilon)$ posłużyły do wyznaczenia granicy plastyczności σ_0 jako punktu odpowiadającego zerowej wartości dyspersji dwójłomności. Wyznaczona w ten sposób umowna granica plastyczności odpowiadała

naprężeniu $\sigma_0 = 34,3 \text{ MN/m}^2$ oraz odkształceniu $\varepsilon_0 = 2,25\%$. Odkształcenia trwałe mierzone natychmiast po odciążeniu próbek obciążonych uprzednio do granicy plastyczności wynosiły około $0,7\%$. Natomiast pomiar przeprowadzony trzy miesiące po odciążeniu próbek wykazał istnienie odkształceń trwałych równych około $0,3\%$.



Rys. 6. Krzywa obrazująca zależność $\sigma_t - \sigma_0 = f(D)$.

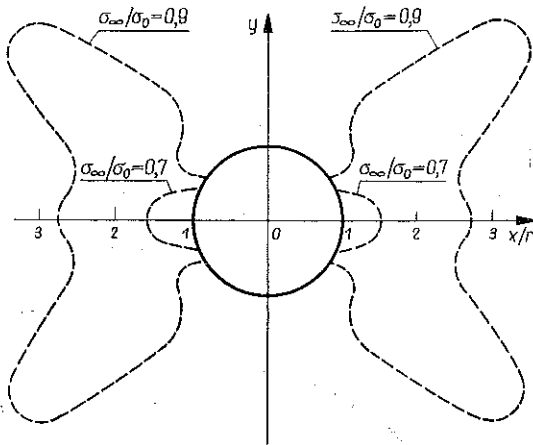


Rys. 7. Krzywe zależności pomiędzy odkształceniem i dwójnościami dla światła niebieskiego i żółtego oraz krzywa zależności pomiędzy dyspersją dwójnościami a odkształceniem.

3.2. **Badania modelowe.** Posługując się omówioną metodą wyznaczono składowe stanu naprężenia w modelu tarczy nieskończonej z otworem, rozciąganej jednokierunkowo w nieskończoności. Badania modelowe przeprowadzono w identycznych warunkach, w jakich przeprowadzono badania cechujące. Oznacza to, co następuje:

a) warunki termiczno-wilgotnościowe nie odbiegały od warunków panujących w czasie badań cechujących. Ażeby krzywe otrzymane w badaniach cechujących mogły służyć do wyznaczania stanu naprężenia w modelu, powinna być zachowana stałość temperatury i wilgotności w granicach $\pm 1^\circ\text{C}$ i $\pm 5\%$;

b) obciążenie modelu podwyższano stopniowo od zera do jego końcowej wartości przewidzianej w danym badaniu przez okres 90 min. Następnie pozostawiono model pod działaniem pełnego obciążenia przez dalszych 210 min.



Rys. 8. Wpływ obciążenia na kształtowanie się obszarów plastycznych w nieskończonej tarczy z otworem.

Badania przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążenia, w których stosunek naprężenia rozciągającego model σ_∞ do naprężenia odpowiadającego granicy plastyczności σ_0 wynosił $\sigma_\infty/\sigma_0 = 0,7$ i $0,9$. Po upływie 300 min od chwili rozpoczęcia obciążenia wykonano zdjęcia izochrom dla światła sodowego i niebieskiego oraz zdjęcia izoklin. W okresie od 270 do 330 min., jak wykazali THOMSON i FROCHT [11], zarówno dwójłomność jak i parametr izoklin są praktycznie niezmiennie. Można więc w tym czasie wykonać szereg zdjęć izoklin oraz, gdy powstanie potrzeba, można przeprowadzić dodatkowo pomiary rzędu izochrom metodą kompensacyjną. Na podstawie otrzymanych zdjęć izochrom wyznaczono, jako miejsce geometryczne punktów zerowej wartości dyspersji dwójłomności, granicę pomiędzy obszarem plastycznym a sprężystym. Porównanie obszarów uplastycznionych dla obu przypadków obciążenia przedstawia rys. 8.

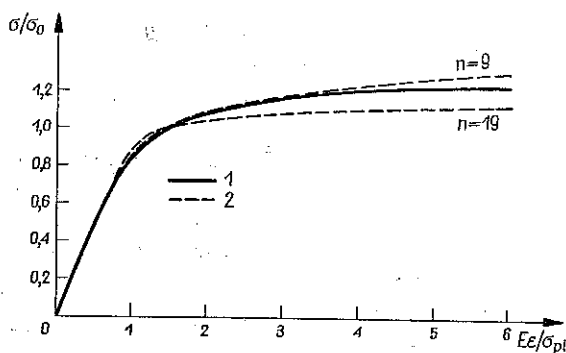
Posługując się omówioną w tej pracy metodą obliczono ze wzorów (2.2) i (2.7) naprężenia wzdłuż poziomej osi symetrii modelu. Dla porównania obliczono również naprężenia za pomocą metody przedstawionej przez FROCHTA i THOMSONA

w pracy [1]. Wyniki otrzymane tymi metodami porównano z przybliżonym rozwiązaniem teoretycznym podanym przez BUDIANSKY'EGO i VIDENSEKA [12]. Rozwiązanie to dotyczy rozkładu naprężeń w nieskończonej tarczy z otworem, poddanej jednokierunkowemu rozciąganiu w nieskończoności, przy czym zależność pomiędzy naprężeniami σ i odkształceniami ε opisana jest równaniem RAMBERGA i OSGOODA [13], które ma postać

$$(3.1) \quad \frac{E\varepsilon}{\sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n,$$

gdzie E oznacza współczynnik sprężystości, σ_0 jest umowną granicą plastyczności odpowiadającą naprężeniu, przy którym sieczny współczynnik sprężystości $E_s = 0,7E$ oraz n oznacza parametr przybierający wartości dodatnie od zera do nieskończoności.

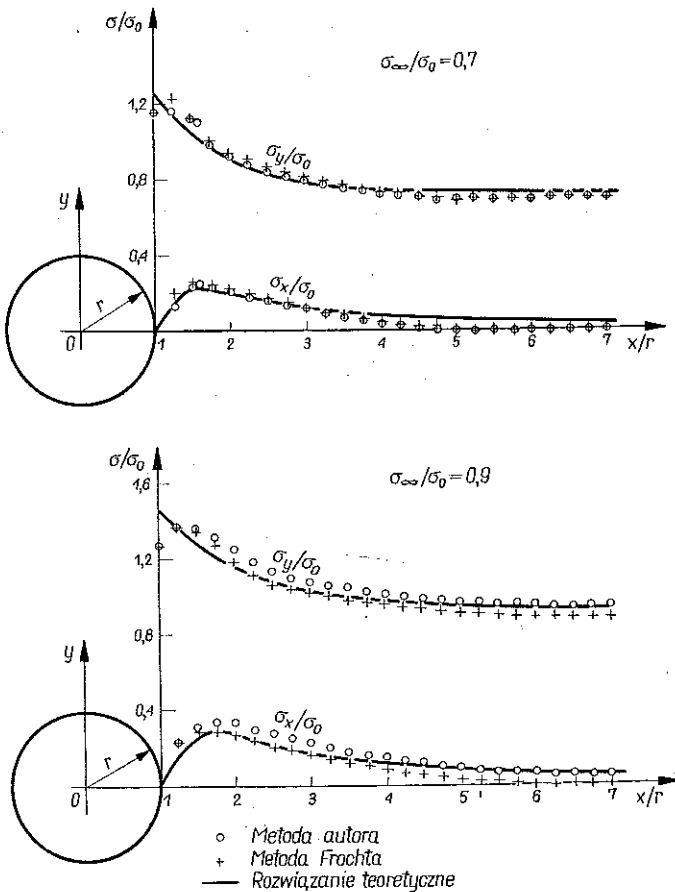
Ażeby istniała możliwość porównania wyników otrzymanych na drodze teoretycznej z wynikami otrzymanymi z badań, powinno zachodzić podobieństwo pomiędzy wykresem rozciągania użytego do badań celuloidu a krzywą Ramberga i Osgooda. Porównanie tych krzywych przeprowadzono na rys. 9, z którego wynika,



Rys. 9. Krzywa rozciągania dla celuloidu oraz krzywe Ramberga-Osgooda dla $n = 9$ i 19 .

że krzywa rozciągania celuloidu ma kształt bardzo zbliżony do krzywej (3.1) dla parametru $n = 9$. Do obliczenia naprężeń ze wzorów podanych w pracy [12] przyjęto więc tę właśnie wartość parametru n . Wykresy naprężeń wyznaczone na drodze teoretycznej oraz wykresy otrzymane dwiema metodami fotoplastyczności przedstawiono na rys. 10. Największa rozbieżność pomiędzy wartością naprężenia obliczoną ze wzorów podanych w pracy [12] a wartością wyznaczoną przy zastosowaniu proponowanej metody występuje na krawędzi otworu w przypadku naprężenia σ_y dla $\sigma_{\infty}/\sigma_0 = 0,9$ (rys. 10b). Rozbieżność ta wynosi około 15%, natomiast inne rozbieżności są znacznie mniejsze. Analiza błędów metody, przeprowadzana w pracy [14] wykazała, że średni błąd wyznaczenia naprężeń wynosi $\pm 8\%$, natomiast błąd maksymalny $\pm 15\%$.

Obserwowane na rys. 10 rozbieżności pomiędzy wartościami naprężeń mieszczą się więc w granicach błędu metody. Należy zaznaczyć, że duże rozbieżności występujące w pobliżu krawędzi otworu wynikają w głównej mierze stąd, że rozwiązanie Budiansky'ego i Videnseka jest rozwiązaniem przybliżonym, dającym w obszarach



Rys. 10. Wykresy naprężeń wzdłuż poziomej osi symetrii tarczy nieskończonej z otworem okrągłym przy obciążeniu:

$$(a) \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} = 0,7; \quad (b) \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} = 0,9.$$

większych odkształceń plastycznych wyniki niedokładne. Poza tym rozkład naprężeń w pobliżu krawędzi otworu, wyznaczony na drodze teoretycznej, jest mało prawdopodobny, gdyż na podstawie badań doświadczalnych nad zagadnieniem koncentracji naprężeń różni badacze [1, 3, 16] stwierdzili, że największa wartość σ , osiągnięta jest nie na samej krawędzi lecz w pewnej od niej odległości.

4. Wnioski

Przeprowadzone badania oraz otrzymane wyniki pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Uzupelnienie pomiarem dyspersji dwójłomności metody badawczej, zaproponowanej przez FROCHTA, umożliwiło otrzymanie pełnego rozwiązania płaskiego stanu naprężenia w obszarze plastycznym bez konieczności posługiwania się metodami numerycznymi.

2. Wykorzystanie zjawiska dyspersji dwójłomności ogranicza stosowalność metody do takich płaskich stanów naprężenia, w których pierwszy niezmiennik tensora naprężenia jest dodatni.

3. Konieczność wyznaczenia jednoznacznej zależności pomiędzy różnicą naprężeń głównych a rzędem izochrom ograniczyła stosowalność metody do przypadku, w którym nie występuje odciążenie oraz odkształcenia względne nie przekraczają wartości $\varepsilon = 0,10$.

4. Wyznaczony na drodze analizy błędów średni błąd metody, wynoszący $\pm 8\%$, stanowi dla celów praktycznych wystarczająco dobrą dokładność.

5. Porównanie wyników uzyskanych przy zastosowaniu proponowanej metody z wynikami uzyskanymi na drodze teoretycznej oraz z wynikami uzyskanymi metodą Frochta wykazało, że rozbieżności mieszczą się w granicach błędów metody.

Biorąc pod uwagę otrzymane wyniki można przyjąć, że przedstawiona w niniejszej pracy metoda (ze względu na swą prostotę oraz dokładność uzyskiwanych wyników) może być przydatna przy wyznaczaniu naprężeń dla płaskich sprężysto-plastycznych zagadnień.

Literatura cytowana w tekście

1. M. M. FROCHT, R. A. THOMSON, *Studies in photoplasticity*, Arch. Mech. Stos., 2, 11 (1959), 157 - 171.
2. В. П. Нетребко, *Проверка и уточнение основных законов фотопластичности целлулойда*, Вест. Моск. унив. Мат. Мех., 2 (1963), 53 - 59.
3. В. П. Нетребко, *О методике расчетов в фотопластичности*, Вест. Моск. унив. Мат. Мех., 4 (1963), 64 - 69.
4. E. MÖNCH, R. LORECK, *A Study of the Accuracy and Limits of Application of Plane Photoplastic Experiments*, Photoelasticity, Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press 1963, 169 - 184.
5. R. HILTSCHER, *Theorie und Anwendung der Spanungsoptik im elastoplastischen Gebiet*, Zeitsch. Vereines Deutsch. Ing., 2, 97 (1955), 49 - 58.
6. E. MÖNCH, *Die Dispersion der Doppelbrechung bei Zelluloid als Plastizitätsmass in der Spanungsoptik*, Zeitsch. angew. Phys., 8, 6 (1954), 371 - 375.
7. M. M. FROCHT, R. A. THOMSON, *Experiments on mechanical and optical coincidence in photoplasticity*, Exper. Mech., 2, 1 (1961), 43 - 47.
8. M. M. FROCHT, Y. F. CHENG, *On the meaning of isoclinic parameters in the plastic state in cellulose nitrate*, Trans. of the ASME, J. Appl. Mech., 1, 29E (1962), 1 - 6.
9. E. MÖNCH, R. JIRA, *Studie zur Photoplastizität von Celluloid am Rohr unter Innerdruck*, Zeitsch. angew. Phys., 9, 7 (1955), 450 - 453.
10. R. JIRA, *Das mechanische und spanungsoptische Verhalten von Zelluloid bei zweiachsiger Beanspruchung und der Nachweis seiner Eignung für ein photoplastisches Verfahren*, Konstruktion, 11, 9 (1957), 348 - 449.
11. R. A. THOMSON, M. M. FROCHT, *Further Work on Plane Elastoplastic Stress Distributions*, Photoelasticity, Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press 1963, 185 - 193.

12. B. BUDIANSKY, R. J. VIDENSEK, *Analysis of Stresses in Plastic Range around a Circular Hole in a Plate Subjected to Uniaxial Tension*, N.A.C.A., Technical Note 3542, October 1955.
13. W. RAMBERG, W. R. OSGOOD, *Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters*, N.A.C.A., Technical Note 902, 1943.
14. A. LIŃEWA, *Wyznaczanie metodą fotoplastyczności składowych płaskiego stanu naprężenia w obszarze plastycznym*, rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, 1968.
15. H. NEUBER, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1, 28E (1961), 544 – 550.
16. В. Д. КОПЫТОВ, *Исследование напряженно-деформированного состояния при упруго-пластических деформациях полосы с двусторонней полукруглой выточкой методом фотоупругих покрытий*, Вест. Моск. унив., Мат. Мех., 2 (1967), 93 – 100.
17. В. М. ПАВФЕРОВ, *Концентрация напряжений при упруго-пластических деформациях*, Изв. АН СССР ОТН, 4 (1954), 47 – 66.

Резюме

**ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ,
СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ**

Дается описание поляризационного оптического метода, дающего возможность разграничить упругую область от пластической и определить составляющие плоского напряженного состояния в пластической области. Метод основывается на измерении, во время исследований, четырех величин: порядков изохром m_1 и m_2 для двух монохроматических источников света с длиной волны λ_1 и λ_2 , параметра изоклин θ и дисперсии двойного лучепреломления D . Эти величины служат для непосредственного исчисления суммы, разницы, а также направлений главных напряжений и для определения границы пластической области в качестве места геометрических точек значений $D = 0$. В качестве примера применения метода, представлено определение распределения напряжений в бесконечном диске с круговым отверстием, подверженном растяжению в одном направлении в бесконечности. Полученные результаты сравниваются с результатами, полученными методом Фрохта и результатами теоретического решения.

Summary

**POLARIZATION-OPTICAL METHOD OF DETERMINING THE COMPONENTS OF
THE PLANE STATE OF STRESSES IN THE PLASTIC REGION**

The paper contains a description of the polarization-optical method which makes it possible to delimitate the elastic region from the plastic one, and to determine the components of the plane state of stress in the plastic region. The method is based on the measurement of four quantities during the investigations: the orders of the isochromatic fringe patterns m_1 and m_2 for two monochromatic light sources with wavelengths λ_1 and λ_2 , the parameter of the isoclines θ and the dispersion of double refraction D . These quantities are used for the direct calculation of the sum, difference and directions of the main stresses, as well as for determination of the plastic region as the locus of points with the value $D = 0$. As an example of the application of this method is presented the determination of the distribution of stresses in an infinite disk with a circular opening stretched unidirectionally in infinity. The results obtained are compared with those obtained by means of the Frocht method and with the theoretical solution.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 maja 1969 r.