

**DRGANIA BELKI LEPKOSPĘŻYSTEJ O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI
I SWOBODNYCH KOŃCACH NA PODŁOŻU SPĘŻYSTYM
WYMUSZONE PRZESUWAJĄCĄ SIĘ SIŁĄ**

STANISŁAW B O R O W I K, W A C Ł A W S Z C Z E Ś N I A K (WARSZAWA)

Wstęp

Zagadnienie drgań belki na podłożu sprężystym typu Winklera, wymuszonych przesuującą się siłą, nie jest nowe. Historia jego sięga roku 1926, kiedy to ukazała się znana praca TIMOSZENKI [1]. Jak wiadomo zostało wówczas rozwiązane tzw. «zadanie Kryłowa» dla belki nieograniczonej na podłożu jednoparametrowym Winklera. Następnie powstało wiele prac [2 – 11] poświęconych powyższej tematyce.

Do ciekawszych prac ostatniego okresu należą [2 i 3]. W pracy [2] rozpatrzono ruch siły ze stałą prędkością po nieskończonej belce na podłożu Winklera z uwzględnieniem w nim tłumienia w sensie Voigta. W pracy [3] podano rozwiązanie drgań powyższej belki, ale obciążonej masą z wymuszeniem harmonicznym lub dwiema masami: osprężynowaną i nieosprężynowaną. Autor doszedł tu do wniosku, że w zakresie prędkości do 60 m/s dla niektórych realnych zastosowań wpływ obciążenia dynamicznego jest nieznaczny, a osprężynowanie masy jeszcze bardziej go niweluje. Przypisując powyższe wnioski uproszczonemu modelowi podłoża nieuwzględniającemu siły bezwładności (tzw. podłoże bezinercyjne), autor rozwiązuje zadanie na półprzestrzeni sprężystej jednorodnej, jednak obciążeniem teraz jest siła bezmasowa. Wyniki z tej dość skomplikowanej w formie pracy wykazują znaczne współczynniki dynamiczne. Zmodelowanie powyższego zadania przez odpowiedni układ elektryczny przedstawiono w pracy [4]. Zanalizowano tam również wpływ odrywania belki od podłoża i przypadek drgań nieliniowych.

Z polskich opracowań należy wymienić prace [5–7, 10 i 11]. W pracy [8] rozpatrzono wymuszone drgania płyty w opływie naddźwiękowym. Niektóre rozwiązania zagadnienia drgań belki znajdują zastosowania również w obliczeniach hydrodynamicznych [9].

1. Założenia i sformułowanie zagadnienia

Rozpatrujemy belkę skończonej długości o wolnych końcach; materiał jej odpowiada modelowi ciała lepkospężystego w sensie Voigta. Przyjmujemy podłoże jednoparametrowe typu Winklera z tłumieniem wg fenomenologicznego modelu Voigta. Belka obciążona jest bezmasową fikcyjną siłą P poruszającą się ze stałą prędkością. Założenia te prowadzą do równania

$$(1.1) \quad \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + \tau \frac{\partial^5 W(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\bar{m}}{EJ} \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\rho}{EJ} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \\ + \frac{k}{EJ} W(x, t) = \frac{P}{EJ} \delta_{(x-vt)}.$$

W równaniu (1.1) $W(x, t)$ oznacza ugięcie belki lepkosprężystej, $\tau = \eta/E$ czas relaksacji materiału belki, η współczynnik lepkości, \bar{m} masę jednostkową belki, EJ sztywność giętną, ρ współczynnik tłumienia podłoża sprężystego, k współczynnik sprężystości podłoża sprężystego, P obciążenie, $\delta(x-vt)$ funkcję Diraca oraz dodatkowo $2h = \rho/EJ$.

Rozwiązanie zadania będziemy poszukiwali w postaci

$$(1.2) \quad W(x, t) = W_1(x, t) + W_2(x, t),$$

gdzie $W_1(x, t)$ jest całką ogólną równania jednorodnego (1.1), a $W_2(x, t)$ rozwiązaniem szczególnym powyższego równania. Przyjmujemy warunki początkowe

$$(1.3) \quad W(x, 0) = W_1(x, 0) = f(x), \quad \dot{W}(x, 0) = \dot{W}_1(x, 0) = g(x)$$

oraz warunki brzegowe

$$(1.4) \quad \begin{aligned} W''(0, t) = 0, \quad W''''(0, t) = 0, \\ W''(l, t) = 0, \quad W''''(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że momenty zginające i siły poprzeczne w przekroju początkowym i końcowym belki są równe zeru.

2. Rozwiązanie równania

Rozważmy naprzód równanie jednorodne (1.1). Szukamy rozwiązania w formie

$$(2.1) \quad W_1(x, t) = X(x) T(t).$$

Prowadzi to do rozdziału zmiennych, w wyniku czego otrzymamy

$$(2.2) \quad \ddot{T} + \left(\frac{2hEJ}{\bar{m}} + \tau\omega_0^2 \right) \dot{T} + \left(\frac{k}{\bar{m}} + \omega_0^2 \right) T = 0, \quad \frac{X_0^{IV}}{X_0} = \frac{\omega_0^2 \bar{m}}{EJ}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.3) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{k}{\bar{m}}, \quad \lambda^4 = \frac{\bar{m}\omega_0^2}{EJ} = \frac{\bar{m}\omega^2}{EJ} - \frac{k}{EJ}, \quad 2\mu = \frac{\rho}{\bar{m}} + \tau\omega^2 - \frac{k\tau}{\bar{m}}$$

równania (2.2) możemy przedstawić w postaci

$$(2.4) \quad \ddot{T} + 2\mu\dot{T} + \omega^2 T = 0, \quad X_0^{IV} - \lambda^4 X_0 = 0.$$

Rozwiązaniem równania (2.4)₁ jest funkcja

$$(2.5) \quad T = e^{-\mu t} (A \sin \bar{\omega} t + B \cos \bar{\omega} t),$$

gdzie

$$(2.6) \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2 - \mu^2, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{1}{4} \left[4\omega^2 - \left(\frac{\rho}{\bar{m}} + \omega^2 \tau - \frac{k\tau}{\bar{m}} \right)^2 \right].$$

Stałe A i B dają się bez kłopotu wyznaczyć z warunków początkowych. Zatem rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$(2.7) \quad W_1(x, t) = \left[\frac{g(x) + \mu f(x)}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t + f(x) \cos \bar{\omega} t \right] \exp(-\mu t).$$

Całka równania różniczkowego (2.2)₂ przedstawia znane równanie krzywej odkształconej pręta na sprężystym podłożu:

$$(2.8) \quad X_0(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x.$$

Dla danych powyżej czterech warunków brzegowych jednorodnych, sformułowanych dla końców pręta, otrzymamy układ równań jednorodnych. Przyrównanie do zera wyznacznika układu tych równań prowadzi do równania przestępnego o nieskończonej liczbie pierwiastków. W naszym przypadku otrzymujemy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} -C_2 + C_4 &= 0, & -C_1 \sin \lambda l - C_2 \cos \lambda l + C_3 \operatorname{sh} \lambda l + C_4 \operatorname{ch} \lambda l &= 0, \\ -C_1 + C_3 &= 0, & -C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l + C_3 \operatorname{ch} \lambda l + C_4 \operatorname{sh} \lambda l &= 0. \end{aligned}$$

Po wyrugowaniu C_3 i C_4 z powyższego układu mamy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} C_1 (\operatorname{sh} \lambda l - \sin \lambda l) + C_2 (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) &= 0, \\ C_1 (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) + C_2 (\sin \lambda l + \operatorname{sh} \lambda l) &= 0. \end{aligned}$$

Aby układ (2.10) miał rozwiązania niezerowe, musi być spełniony warunek

$$(2.11) \quad \begin{vmatrix} \operatorname{sh} \lambda l - \sin \lambda l & \operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l \\ \operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l & \sin \lambda l + \operatorname{sh} \lambda l \end{vmatrix} = 0.$$

Z wyznacznika (2.11) otrzymamy równanie przestępne

$$(2.12) \quad \operatorname{ch} \lambda l = \frac{1}{\cos \lambda l},$$

stąd

$$(2.12') \quad \lambda_n \approx \frac{2n+1}{2l} \pi.$$

Ostatni wzór określa nieskończony ciąg wartości własnych.

Stałe C_1, C_2, C_3 i C_4 określone są następująco:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} C_1 &= C_3 = C_n (\operatorname{ch} \lambda n l - \cos \lambda n l), \\ C_2 &= C_4 = -C_n (\operatorname{sh} \lambda n l - \sin \lambda n l). \end{aligned}$$

Czynnikowi C_n możemy nadać dowolną wartość; przyjmujemy $C_n = 1$. Po prostych przekształceniach otrzymamy wzór na funkcję własną naszego zagadnienia brzegowego w następującej postaci:

$$(2.14) \quad X_0(n) = \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x + \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2l} \pi x - \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \pi}{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{2} \pi - (-1)^n} \times \\ \times \left(\sin \frac{2n+1}{2l} \pi x + \operatorname{sh} \frac{2n+1}{2l} \pi x \right).$$

Badanie funkcji $X_0(n)$ w świetle zagadnienia Sturm-Liouville'a prowadzi do wniosku, że funkcje własne w przedziale $[0, 1]$ są ortogonalne. Przez podzielenie wyrazów funkcji przez jej normę otrzymujemy uogólniony szereg Fouriera funkcji własnych, unormowanych;

$$(2.15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_0(n)}{\left[\int_0^1 X_0^2(n) dx \right]^{1/2}}.$$

W naszym przypadku

$$(2.16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n+1}{2l} \pi x + \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2l} \pi x - \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2l} \pi}{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{2l} \pi - (-1)^n} \times \\ \times \left(\sin \frac{2n+1}{2l} \pi x + \operatorname{sh} \frac{2n+1}{2l} \pi x \right)}{\left\{ \int_0^1 \left[\cos \frac{2n+1}{2l} \pi x + \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2l} \pi x - \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2l} \pi}{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{2l} \pi - (-1)^n} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\sin \frac{2n+1}{2l} \pi x + \operatorname{sh} \frac{2n+1}{2l} \pi x \right) \right]^2 dx \right\}^{1/2}}.$$

Biorąc pod uwagę wzór (2.12') i po wprowadzeniu oznaczenia

$$(2.17) \quad A = \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \pi}{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{2} \pi - (-1)^n}$$

otrzymamy po żmudnym obliczeniu całki wyrażenie na normę:

$$(2.18) \quad N_n = \left[I + \frac{2A}{\lambda_n} \sin \lambda_n l \operatorname{sh} \lambda_n l + (1+A^2) \frac{\operatorname{ch} \lambda_n l}{\lambda_n} \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_n l}{2} + \sin \lambda_n l \right) + \right. \\ \left. + (1-A^2) \frac{\cos \lambda_n l}{\lambda_n} \left(\frac{\sin \lambda_n l}{2} + \operatorname{sh} \lambda_n l \right) \right]^{1/2}.$$

Zatem uogólniony szereg funkcji własnej zagadnienia brzegowego będzie mieć postać

$$(2.19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x + \cos \lambda_n x - A (\sin \lambda_n x + \operatorname{sh} \lambda_n x)}{\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n (-1)^n}{(2n+1) \operatorname{sh} \lambda_n - (-1)^n} + \left\{ 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda_n}{[\operatorname{sh} \lambda_n - (-1)^n]^2} \right\} \right) \times} \\ \times \frac{2 \operatorname{ch} \lambda_n}{\pi (2n+1)} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} \lambda_n + (-1)^n \right] + \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda}{[\operatorname{sh}^2 \lambda_n - (-1)^n]^2} \right\} \times \\ \times \frac{1}{2} (-1)^n + \left\{ \operatorname{sh} \lambda_n \frac{2 \cos \lambda_n}{2n+1} \right\}^{1/2}$$

Poszukamy obecnie całki szczególnej problemu. Rozwiązanie przeprowadzimy posługując się szeregiem funkcji własnych unormowanych. Założymy mianowicie, że

$$(2.20) \quad W_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n.$$

Obciążenie rozłożymy w szereg wg funkcji własnej zagadnienia brzegowego:

$$(2.21) \quad q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m} f_n(t) X_n(x),$$

gdzie $f_n(t)$ jest na razie nieznaną funkcją czasu. Po podstawieniu tej funkcji do równania problemu otrzymamy

$$(2.22) \quad \sum X_n^{IV} T_n + \tau \sum X_n^{IV} \dot{T}_n + \frac{\bar{m}}{EJ} \sum X_n \ddot{T} + 2h \sum X_n \dot{T}_n + \\ + \frac{k}{EJ} \sum X_n T_n = \frac{1}{EJ} \sum \bar{m} f_n(t) X_n.$$

Ale funkcje X_n spełniają równanie jednorodne

$$(2.23) \quad X_n^{IV} = \lambda^4 X_n.$$

Po uwzględnieniu (2.23) w równaniu (2.22) otrzymamy

$$(2.24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda^4 X_n T_n + \tau \lambda^4 X_n \dot{T} + \frac{\bar{m}}{EJ} X_n \ddot{T} + 2h X_n \dot{T}_n + \right. \\ \left. + \frac{k}{EJ} X_n T_n - \frac{\bar{m} f_n(t) X_n}{EJ} \right] = 0.$$

Po uwzględnieniu (2.2)₁ i (2.3)₂ oraz wyłączeniu wspólnego czynnika przed nawias otrzymamy

$$(2.25) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{T}_n + 2\mu\dot{T}_n + \omega^2 T_n - f_n(t)] X_n = 0.$$

Z powyższego wynika, że funkcje T_n spełniają równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego

$$(2.26) \quad \ddot{T}_n + 2\mu\dot{T}_n + \omega^2 T_n = f_n(t).$$

Dla rozwiązania równania należy określić nieznaną funkcję $f_n(t)$. W tym celu mnożymy przez m -ty wyraz ciągu funkcję własną X_n i całkujemy obustronnie w przedziale $[0, l]$:

$$(2.27) \quad \int_0^l q(x, t) X_m dx = \int_0^l f_n(t) X_n X_m dx.$$

Ale funkcje X_n i X_m są względem siebie ortogonalne, wobec czego

$$(2.28) \quad \int_0^l X_m X_n dx = \delta_{m,n}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

gdzie $\delta_{m,n}$ jest symbolem Kroneckera. Korzystając z tej własności znajdujemy $f_n(t)$ przy $m = n$

$$(2.29) \quad f_n(t) = \frac{1}{m} \int_0^l q(x, t) X_n(x) dx.$$

Znając prawą stronę równania różniczkowego

$$(2.30) \quad \ddot{T}_n + 2\mu\dot{T}_n + \omega^2 T_n = \frac{1}{m} \int_0^l q(x, t) X_n(x) dx$$

możemy podać rozwiązanie problemu:

$$(2.31) \quad T_n = e^{-\mu t} (D_1 \cos \bar{\omega} t + D_2 \sin \bar{\omega} t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} \times \\ \times \left[\frac{1}{m} \int_0^l q(x, t) X_n(x) dx \right] \sin \bar{\omega} (t - \xi) d\xi.$$

Ponieważ T_n jest funkcją własną całki szczególnej, to biorąc pod uwagę warunki (1.3) — warunki początkowe przyjmą tu postać

$$(2.32) \quad W_2(x, 0) = W(x, 0) - W_1(x, 0) = 0, \\ \dot{W}_2(x, 0) = \dot{W}(x, 0) - \dot{W}_1(x, 0) = 0.$$

Po uwzględnieniu ich w równaniu (2.31) otrzymamy $D_1 = 0$ i $D_2 = 0$. Zatem całką szczególną po uwzględnieniu (2.29) jest funkcja

$$(2.33) \quad W_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{1}{\bar{\omega}} \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} f_n(\xi) \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi.$$

W przypadku naszego zadania belka obciążona jest biegnącą siłą skupioną P . Załóżmy, że siła ta jest zastąpiona przez obciążenie rozłożone działające w otoczeniu punktu o odciętej x na odcinku ε , którego długość w granicy dąży do zera:

$$(2.34) \quad q(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq vt - \varepsilon, \\ \frac{P}{\varepsilon}, & \text{jeśli } vt - \varepsilon \leq x \leq vt, \\ 0, & \text{jeśli } vt \leq x \leq l. \end{cases}$$

Zgodnie z (2.29), (2.33) i (2.34) mamy $q(x, t) = P/\varepsilon$; stąd

$$(2.35) \quad f_n(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\bar{m}} \int_{vt-\varepsilon}^{vt} \frac{P}{\varepsilon} X_n(x) dx \right).$$

Po obliczeniu (2.35) otrzymamy

$$(2.36) \quad f_n(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\bar{m}} P \frac{\bar{W}_n(vt) - \bar{W}_n(vt - \varepsilon)}{\varepsilon} \right].$$

Przy wyprowadzeniu wzoru (2.36) korzystaliśmy ze wzoru dla funkcji pierwotnej «funkcji własnej» znormalizowanej

$$(2.37) \quad \bar{W}_n(x) = \int X_n(x) dx.$$

Wykonując przejście graniczne (2.36) możemy napisać

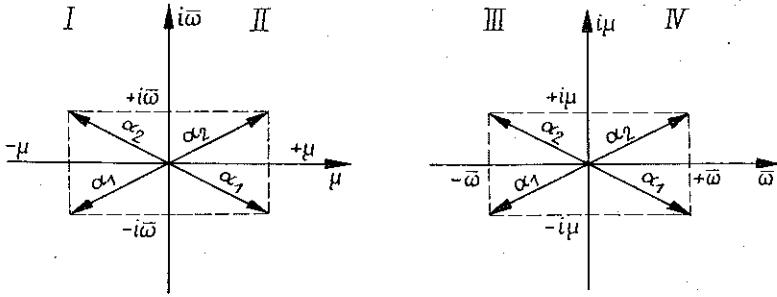
$$(2.38) \quad f_n(t) = \frac{1}{\bar{m}} \int_0^l q(x, t) X_n(x) dx = \frac{1}{\bar{m}} P X_n(vt).$$

Podstawienie zaś (2.38) do (2.33) prowadzi do formuły

$$(2.39) \quad W_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{\bar{m}\bar{\omega}} X_n(x) \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} X_n(v\xi) \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi.$$

Zatem ostatecznym rozwiązaniem zgodnie z (1.2), (2.7) i (2.39), jest funkcja

$$(2.40) \quad W(x, t) = e^{-\mu t} \left[\frac{g(x) + \mu f(x)}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t + f(x) \cos \bar{\omega} t \right] + \\ + \frac{P}{\bar{m}\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^t e^{-\mu(t-\xi)} X_n(v\xi) \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi.$$



Rys. 1. Graficzne przedstawienie pierwiastków na płaszczyźnie

Rozwiązanie (2.40) jest poprawne do chwili, kiedy obciążenie znajduje się na belce. Po zejściu siły P poza belkę trzeba zastosować rozwiązanie dla drgań swobodnych. Fakt ten można napisać następująco:

$$(2.41) \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{m}} \int_0^t q(x, t) X_n(x) dx, & \text{jeśli } 0 \leq t \leq \frac{l}{v}, \\ 0, & \text{jeśli } t \geq \frac{l}{v}. \end{cases}$$

3. Rozwiązanie szczegółowe przedstawionego zadania

Dla przedziału $0 \leq t \leq l/v$ po podstawieniu za X_n wyrażenia (2.16) i (2.18) oraz po wyłączeniu wspólnego czynnika otrzymamy dla zerowych warunków początkowych funkcję

$$(3.1) \quad W(x, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\bar{\omega} N_n} X_n(x) \left[\int_0^t \text{ch } a\xi e^{\mu\xi} \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi + \int_0^t \cos a\xi e^{\mu\xi} \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi - A \left(\int_0^t \sin a\xi e^{\mu\xi} \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi + \int_0^t \text{sh } a\xi e^{\mu\xi} \sin \bar{\omega}(t-\xi) d\xi \right) \right],$$

gdzie

$$(3.2) \quad a = \frac{2n+1}{2l} \pi v.$$

Po nietrudnym lecz żmudnym obliczeniu całek otrzymamy

$$(3.3) \quad W(x, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\bar{\omega} N_n} X_n(x) \left[(1-A) \frac{\bar{\omega} e^{(\mu+a)t} - (\mu+a) \sin \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t}{2[\bar{\omega}^2 + (\mu+a)^2]} + (1+A) \frac{\bar{\omega} e^{(\mu-a)t} - (\mu-a) \sin \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t}{2[\bar{\omega}^2 + (\mu-a)^2]} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu \left[e^{\mu t} \left(-\sin at + \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \cos at \right) - \sin \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \cos \bar{\omega} t \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} + a)^2]} + \\
& + \frac{\mu \left[e^{\mu t} \left(\sin at + \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \cos at \right) - \sin \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \cos \bar{\omega} t \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} - a)^2]} \\
& - A \left\{ \frac{\mu \left[e^{\mu t} \left(\cos at + \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \sin at \right) - \cos \bar{\omega} t + \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \sin \bar{\omega} t \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} + a)^2]} \right. \\
& \left. - \frac{\mu \left[e^{\mu t} \left(\cos at - \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \sin at \right) - \cos \bar{\omega} t + \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \sin \bar{\omega} t \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} - a)^2]} \right\}.
\end{aligned}$$

Analizę rozwiązania (3.3) przeprowadzimy najprzód przy założeniu, że punkt działania siły skupionej jest ustalony; wystarczy wówczas przyjąć, że $v \rightarrow 0$ oraz że siła w granicy działa w punkcie $x = \xi$, czyli że

$$(3.4) \quad at = \frac{2n+1}{2l} \pi vt = \frac{2n+1}{2l} \pi \xi = \lambda_n \xi.$$

Uwzględnienie związku (3.4) we wzorze (3.3) oraz pewne niewielkie przekształcenia prowadzą do wzoru na ugięcie przy ustalonym działaniu siły:

$$(3.5) \quad W_{st}(x, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\bar{\omega} N_n (\bar{\omega}^2 + \mu^2)} X_n(x) \left\{ \bar{\omega} e^{\mu t} - \mu \sin \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + \right. \\ \left. + \mu \left[e^{\mu t} \left(\frac{\bar{\omega}}{\mu} \cos \lambda_n \xi - \sin \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega}}{\mu} \cos \bar{\omega} t \right) \right] - A e^{\mu t} \bar{\omega} \sin \lambda_n \xi \right\}.$$

Ugięcie to zależy od czasu; jest to konsekwencją przyjętego materiału belki i podłoża w postaci modelu lepkospęrzystego Voigta.

Analiza rozwiązania (3.3) przy założeniu, że $a \rightarrow \infty$ oraz $v \rightarrow \infty$ wykazuje, że $W(x, t) \rightarrow 0$. Zmiana położenia punktu przyłożenia siły P z bardzo dużą prędkością nie powoduje jej odkształcenia. Bezpośrednie wyznaczenie prędkości punktu przyłożenia siły P (i jego położenia zależnego od czasu t), przy której punkty belki osiągnęłyby największe wychylenie w dowolnie obranym przekroju, nastęrcza trudności, których nie udało się autorom pokonać.

Warunki konieczne dla ekstremum funkcji (3.3) $W(x, t)$ przy $x = \text{const}$ mają postać

$$(3.6) \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial v} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W(x, t)}{\partial \mu} = 0.$$

Równania te można znaleźć we wzorze (3.1).

Wyznaczenie ściśle pierwiastków układu (3.6), złożonego z równań, w których występują szeregi nieskończone jest zadaniem bardzo trudnym. Jak się łatwo przekonać, w równaniach (3.6) jak również we wzorze (3.3) mianowniki stają się równe zero, gdy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \bar{\omega}^2 + (\mu + a)^2 = 0 & \quad \text{lub} & \quad a_{1/2}^I = -\mu \mp i\bar{\omega}, \\ \bar{\omega}^2 + (\mu - a)^2 = 0 & \quad \text{lub} & \quad a_{1/2}^{II} = \mu \mp i\bar{\omega}, \\ \mu^2 + (\bar{\omega} + a)^2 = 0 & \quad \text{lub} & \quad a_{1/2}^{III} = -\bar{\omega} \mp i\mu, \\ \mu^2 + (\bar{\omega} - a)^2 = 0 & \quad \text{lub} & \quad a_{1/2}^{IV} = \bar{\omega} \mp i\mu. \end{aligned}$$

Natomiast a jest określone wzorem (3.2).

Ze wzoru (3.7) otrzymamy

$$(3.8) \quad |a| = \sqrt{\mu^2 + \bar{\omega}^2} = \sqrt{\mu^2 + \omega^2 - \mu^2} = \omega.$$

Na podstawie zaś (3.2) możemy napisać

$$(3.9) \quad \frac{2n+1}{2l} \pi \bar{v}_{kr} = \omega.$$

Stąd po uwzględnieniu (2.3)₂ otrzymamy wzór na prędkość krytyczną bez uwzględnienia tłumienia

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{v}_{kr} &= \frac{2l}{(2n+1)\pi} \sqrt{\frac{\lambda_n^4 EJ}{\bar{m}} + \frac{k}{\bar{m}}} = \\ &= \frac{(2n+1)}{2l} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}} + \frac{k}{\bar{m}}} \frac{(2l)^4}{(2n+1)^4 \pi^4}. \end{aligned}$$

Aby otrzymać wzory na prędkość krytyczną należy wielkość a przyrównać do części rzeczywistej (3.7). Pomijając wartości ujemne wynikające z «charakteru falowego zagadnienia» możemy napisać

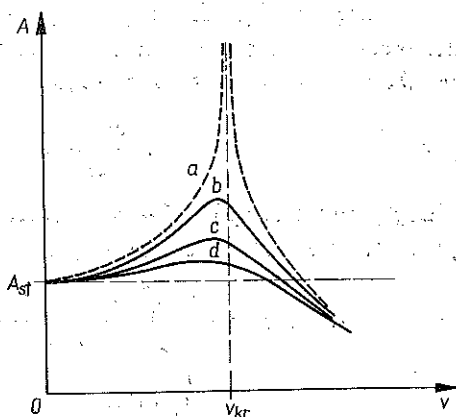
$$(3.11) \quad a = \bar{\omega}, \quad a = \mu.$$

Po uwzględnieniu w równaniu (3.11)₁ zależności (3.2) oraz (2.3)₂ otrzymamy wzór na prędkość krytyczną z uwzględnieniem tłumienia:

$$(3.12) \quad \bar{v}'_{kr} = \frac{2l}{(2n+1)\pi} \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{\bar{m}} + \tau\omega^2 - \frac{k\tau}{\bar{m}} \right)^2}.$$

Jest oczywiste, że przy $\rho = 0$, $\tau = 0$ wzór (3.12) przechodzi we wzór (3.10).

W najogólniejszym przypadku $\bar{\omega}$ (zastępcza częstość kołowa tłumionych drgań swobodnych) może spełniać trzy następujące warunki: 1) warunek $\bar{\omega} > 0 \rightarrow \omega > \mu$, któremu odpowiadają drgania periodyczne zanikające; 2) warunek $\bar{\omega} = 0 \rightarrow \omega = \mu$, któremu odpowiada przypadek tłumienia krytycznego (ruch aperiodyczny) oraz 3)



Rys. 2. Wykres amplitudy ugięcia belki za siłą skupioną z uwzględnieniem tłumienia; a) krzywa rezonansowa bez tłumienia, b) krzywa rezonansowa z tłumieniem zewnętrznym, c) krzywa rezonansowa z tłumieniem wewnętrznym, d) krzywa rezonansowa z tłumieniem zewnętrznym i wewnętrznym

warunek $\bar{\omega} < 0 \rightarrow \omega < \mu$, któremu odpowiadają drgania silnie tłumione (ruch aperiodyczny).

Ze wzoru (3.12) wynika, że spełniona jest nierówność $v_{kr} < \bar{v}_{kr}$. Oznacza to, że tłumienie obniża wartości v_{kr} , przy których występuje ekstremum amplitudy. Wzór (3.12) dla przypadku tłumienia krytycznego przyjmuje postać $v_{kr} = 0$. Z równania (3.11)₂ po uwzględnieniu (3.2) i (2.3) wynika następujący wzór na prędkość krytyczną:

$$(3.13) \quad v_{kr}'' = \frac{2l}{(2n+1)\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\bar{m}} + \tau\omega^2 - \frac{k\tau}{m} \right).$$

Dla $\rho = 0$ i $\tau = 0$ v_{kr} staje się zerem, co jest sprzeczne z (3.10); z tego też powodu nie może określać szybkości krytycznej.

Należy zwrócić uwagę, że przeprowadzona analiza wyznaczenia prędkości krytycznej nie jest ścisła; uproszczony sposób jej określenia wynika ze zbyt skomplikowanej postaci rozwiązania (3.3). Ścisłe określenie maksymalnych ugięć jest możliwe przy wykorzystaniu elektronicznych maszyn matematycznych.

Gdy siła znajduje się poza belką, należy wziąć pod uwagę równanie drgań swobodnych (2.1) i (2.5) oraz

$$(3.14) \quad W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) e^{-\mu t} (A_s \sin \bar{\omega} t + B_s \cos \bar{\omega} t),$$

gdzie nieznanne współczynniki określamy z poprzednio ustalonych warunków początkowych:

$$(3.15) \quad W(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) B_s, \quad \dot{W}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (-\mu B_s + \bar{\omega} A_s).$$

W celu uproszczenia rachunków rachubę czasu rozpoczynamy od chwili, gdy siła opuszcza belkę. Aby wyznaczyć współczynniki A_s i B_s należy przede wszystkim określić pochodną funkcję (3.3). Opuszczając te długie ale proste rachunki podamy wzory na współczynniki A_s i B_s .

Z równań (3.3) i pochodnej $W(x, t)$ wyznaczmy warunki początkowe dla ruchu belki po przejściu siły poza prawy koniec belki. W tym celu podstawimy do (3.3) i $W(x, t)$ wartość $t = l/v$. Po wykonaniu tego podstawienia oraz porównaniu współczynników w wyrażeniach (3.15) i (3.3) — otrzymamy wzory na A_s i B_s w następującej postaci:

$$(3.16) \quad B_s = \frac{Pe^{-\frac{\mu l}{v}}}{\bar{m}\omega N_n} \left[(1-A) \frac{\bar{\omega} e^{(\mu-\alpha)\frac{l}{v}} - (\mu+\alpha) \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v}}{2[\bar{\omega}^2 + (\mu+\alpha)^2]} + \right. \\ \left. + (1+A) \frac{\bar{\omega} e^{(\mu-\alpha)\frac{l}{v}} - (\mu-\alpha) \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v}}{2[\bar{\omega}^2 + (\mu-\alpha)^2]} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(-\sin a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}+a}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) - \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}+a}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega}+a)^2]} + \\
& + \frac{\mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\sin a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) - \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega}-a)^2]} - \\
& - A \left\{ \frac{\mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\cos a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}+a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right) - \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}+a}{\mu} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega}+a)^2]} + \right. \\
& \left. + \frac{\mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\cos a \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right) - \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} \right]}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega}-a)^2]} \right\}
\end{aligned}$$

oraz

$$(3.17) \quad \bar{\omega}A_s - \mu B_s = \frac{Pe^{-\mu \frac{l}{v}}}{\bar{m}\bar{\omega}N_n} (1 - e^{\mu \frac{l}{v}}) [L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6],$$

gdzie

$$\begin{aligned}
L_1 &= (1-A) \frac{\bar{\omega} e^{(\mu+a)\frac{l}{v}} - (\mu+a) \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} +}{2 [\bar{\omega}^2 + (\mu+a)^2]} \\
& \quad + \frac{\bar{\omega} (\mu+a) e^{(\mu+a)\frac{l}{v}} - \bar{\omega} (a+\mu) \cos \bar{\omega} t + \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t}{2 [\bar{\omega}^2 + (\mu+a)^2]}, \\
L_2 &= (1+A) \frac{\bar{\omega} e^{(\mu-a)\frac{l}{v}} (\mu-a) \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} +}{2 [\bar{\omega}^2 + (\mu-a)^2]} \\
& \quad + \frac{\bar{\omega} (\mu-a) e^{(\mu-a)\frac{l}{v}} - \bar{\omega} (\mu-a) \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} + \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} \frac{l}{v}}{2 [\bar{\omega}^2 + (\mu-a)^2]}, \\
L_3 &= \frac{\mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\sin a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) - \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \right] +}{2 [\mu^2 + (\mu-a)^2]} \\
& \quad + \mu \left[\mu e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\sin a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) \right] + e^{\mu \frac{l}{v}} \left[a \cos a \frac{l}{v} - \right. \\
& \quad \left. - a \frac{\bar{\omega}-a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right] + \bar{\omega} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}(\bar{\omega}+a)}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad & \mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\sin a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) - \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \cos \frac{l}{v} \bar{\omega} \right] + \\
 \text{c. d.} \quad & + \mu \left[\mu e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\sin a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) \right] + e^{\mu \frac{l}{v}} \left[a \cos a \frac{l}{v} - \right. \\
 & \left. - a \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right] + \bar{\omega} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}(\bar{\omega} + a)}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \\
 L_4 = & \frac{\quad}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} - a)^2]}, \\
 & \mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\cos a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right) - \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} \right] + \\
 & + \mu \left[\mu e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\cos a \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega} + a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right) \right] + e^{\mu \frac{l}{v}} \left[-a \sin a \frac{l}{v} + \right. \\
 & \left. + \frac{a(\bar{\omega} + a)}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right] + \bar{\omega} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega}(\bar{\omega} + a)}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \\
 L_5 = -A & \frac{\quad}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} + a)^2]}, \\
 & \mu \left[e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\cos a \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right) - \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} \right] - \\
 & - \mu \left[\mu e^{\mu \frac{l}{v}} \left(\cos a \frac{l}{v} - \frac{\bar{\omega} - a}{\mu} \sin a \frac{l}{v} \right) \right] + e^{\mu \frac{l}{v}} \left[\left(-a \sin a \frac{l}{v} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{a(\bar{\omega} - a)}{\mu} \cos a \frac{l}{v} \right) + \bar{\omega} \sin \bar{\omega} \frac{l}{v} + \frac{\bar{\omega}(\bar{\omega} + a)}{\mu} \cos \bar{\omega} \frac{l}{v} \right] \\
 L_6 = A & \frac{\quad}{2 [\mu^2 + (\bar{\omega} - a)^2]}.
 \end{aligned}$$

Z równania (3.17) możemy określić A_s i tym samym równanie ruchu belki.

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, *Method of analysis of statical and dynamical in rail*, Proc. Second Int. Congress Appl. Mech., Zurich 1926.
2. I. T. KENNEY, *Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech., 1954.
3. А. П. ФИЛИПОВ, *Колебания механических систем*, Киев 1965.
4. H. CRINER and G. MC CANN, *Rails an elastic foundation under the influence of high-speed traveling loads*, J. Appl. Mech., 1953.
5. Z. KĄCZKOWSKI, *Vibration of a beam under a moving load*, Proc. Vibr. Probl., 4, 4 (1963).
6. J. NALESZKIEWICZ, *Z dynamiki belki mostowej*, Arch. Mech. Stos., 4 (1953).
7. M. ŻYSZKO, *Drgania nieograniczonej płyty na sprężystym podłożu pod wpływem przesuwających się obciążeń*, Rozpr. doktorska, Biblioteka PW, Warszawa 1968.
8. Z. DŻYGADŁO, *Wymuszone drgania płyty o skończonej długości w płaskim opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT., 3, 16 (1967).
9. В. Н. ПРОКОФИЕВ, *Гидроавтоматика*, Изд. Наука, Москва 1965.
10. R. SKARŻYŃSKI, *Równania ruchu nawierzchni nieciągłej i ich techniczna interpretacja*, Praca doktorska, Biblioteka P.W, Warszawa 1966.
11. E. SZCZEPANIAK, *Równanie dynamiczne odkształconej środkowej powierzchni płyty w przypadku dowolnego dźwigania*, Arch. Mech. Stos., 2, (1955).

Резюме

**КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОЙ БАЛКИ
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ,
СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ, ВЫНУЖДЕЖЕННЫЕ ПРЕДВИГАЮЩЕЙСЯ СИЛОЙ**

В работе дается решение, вынужденных колебаний вязко-упругой балки конечной длины, с незаземленными концами; балка покоится на упругом основании, при чем она передвигается под влиянием безмассовой силы, с постоянной скоростью. Решение получено, основываясь на ортогонализационном методе, при использовании собственной функции краевой задачи. Из приведенного анализа вытекает, что критическая скорость нагрузки зависит как от внутреннего демпфирования (внутреннее трение), так и от феноменологического демпфирования в основании, а также, что эти оба вынуждения существенно влияют на амплитуду колебаний.

Summary

**VIBRATION OF A VISCOELASTIC WAVE OF FINITE LENGTH AND FREE ENDS
ON AN ELASTIC BASE FORCED BY A MOVING LOAD**

In this paper the solution is given of vibration forced by a bodyless load moving with a constant velocity for a viscoelastic beam of finite length and free ends on an elastic base. The solutions were formed out using the orthogonalization method with the eigenfunctions of the boundary problem. From the analysis included it results that the critical velocity of the load depends upon both the internal damping (internal friction) and the phenomenological damping in the case, and that both these dampings significantly influence the amplitude of vibration.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 marca 1969 r.