

O METODACH PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW FALOWYCH W OŚRODKACH NIESPRĘŻYSTYCH

AMALIA PIELORZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Szereg problemów falowych w ośrodkach niesprężystych sprowadza się do rozwiązywania zagadnień granicznych dla układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego. W pracy ograniczono się tylko do tej grupy problemów falowych. Dyskusja i porównania będą więc dotyczyły metod rozwiązywania hiperbolicznych układów równań różniczkowych. Na ogół dla takich układów równań nie można znaleźć rozwiązań w postaci zamkniętej. W praktyce do rozwiązania równań hiperbolicznych często wykorzystywane są maszyny matematyczne. Otrzymywane rozwiązania są przybliżonymi rozwiązaniami równań różniczkowych. Najczęściej stosowanymi metodami są metody różnic skończonych. Podstawą tych metod jest aproksymowanie pochodnych w równaniach różniczkowych ilorazami różnicowymi oraz rozwiązywanie układów równań różnicowych zamiast układów równań różniczkowych.

Śledząc literaturę można zauważyć duże zainteresowanie metodami przybliżonego rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych o dwu i więcej zmiennych niezależnych. Szczególna uwaga zwrócona jest przy tym na to, aby proponowane metody zapewniały zbieżność przybliżonego rozwiązania do ścisłego rozwiązania równań różniczkowych. W przypadku metod różnicowych warunkiem koniecznym zbieżności jest stateczność tych metod.

Badania nad zbieżnością rozwiązania otrzymanego za pomocą pewnej metody różnic skończonych dla układów równań nieliniowych hiperbolicznych o dwu zmiennych niezależnych i nad zakresem stosowności tej metody były przeprowadzone przez R. COURANTA, E. ISAACSONA i M. REESA [13] dla zagadnienia Cauchy'ego oraz przez G. PROUSE'A [53] dla problemu początkowo-brzegowego. Modyfikację tej metody można znaleźć w pracach H. B. KELLERA [27] i H. B. KELLERA i V. THOMÉE [28]. Proponowana przez nich metoda bezwzględnie stateczna pozwala otrzymać rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego dla quasi-liniowych, prawie liniowych i liniowych układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego z dwiema zmiennymi niezależnymi. Stateczne metody różnicowe do rozwiązania układu równań hiperbolicznych o dwu zmiennych niezależnych zostały opracowane w [64, 65 i 66] przez V. THOMÉE, natomiast w pracy [67] V. THOMÉE podaje różnicową metodę rozwiązywania początkowo-brzegowego problemu dla symetrycznego układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych

pierwszego rzędu z n zmiennymi niezależnymi. W pracy H. O. KREISSA [32] oraz P. D. LAXA i B. WENDROFFA [41] można znaleźć propozycje statecznych schematów różnicowych dla rozwiązania problemu Cauchy'ego jednorodnych układów hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach i trzech zmiennych niezależnych. Inne schematy różnicowe dla przybliżonego rozwiązywania takich równań proponują A. R. GOURLAY i A. R. MITCHELL [21 i 22]. W pracy [56] została zaprezentowana przez W. W. RUSANOVA oryginalna metoda różnicowa rozwiązywania problemów początkowych i początkowo-brzegowych dla liniowych i quasi-liniowych równań hiperbolicznych o trzech zmiennych niezależnych, przy czym stateczność metody została zbadana tylko w przypadku liniowych układów równań. Z. KOWALSKI w [29 i 30] podaje pewną różnicową metodę otrzymywania rozwiązania nieliniowych równań hiperbolicznych z wielu zmiennymi niezależnymi.

W pracach M. BURNATA, A. KIELBASIŃSKIEGO i A. WAKULICZA [6], M. BURNATA i A. KIELBASIŃSKIEGO [5], D. S. BUTLERA [7] oraz J. BEJDY [2] omówione są i zastosowane metody rozwiązywania: w dwóch pierwszych quasi-liniowych, w trzeciej — liniowych, a w ostatniej — pewnych prawie-liniowych układów równań hiperbolicznych pierwszego rzędu dla trzech zmiennych niezależnych. W metodach tych, w odróżnieniu od wcześniej wspomnianych metod, wykorzystane zostały powierzchniowo charakterystyczne i związki spełnione na nich. Pewien trójwymiarowy problem dla równań jednorodnych quasi-liniowych został rozwiązany przez E. ISAACSONA [24].

Sposób poszukiwania specjalnych rozwiązań (nazwanych «falami prostymi»), dla układów równań quasi-liniowych cząstkowych pierwszego rzędu dowolnego typu z wielu zmiennymi niezależnymi został zaproponowany przez M. BURNATA [4].

Istnieje kilka prac, w których rozpatrywane są układy równań typu hiperbolicznego postaci

$$(1.1) \quad \mathbf{U}_t + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{x_i}^i(\mathbf{U}) = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{U} i \mathbf{F}^i są wektorami kolumnowymi o k składowych. Metody różnicowe otrzymywania przybliżonych słabych rozwiązań problemu Cauchy'ego dla układu (1.1) o dwu zmiennymi niezależnymi proponowane są przez P. D. LAXA [34 i 35], P. D. LAXA i B. WENDROFFA [39] oraz J. GLIMMA [19], natomiast układem (1.1) z wielu zmiennymi niezależnymi i uzyskiwaniem jego przybliżonych słabych rozwiązań zajmują się E. CONWAY i J. SMOLLER [10].

W przypadku dwu zmiennymi niezależnymi, oprócz wyżej proponowanych metod różnicowych, do rozwiązywania hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu stosowana jest metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk, opisana i wykorzystywana m.in. w pracach [3, 42 i 70]. W ramach tej metody nie wykazano jednak zbieżności przybliżonego rozwiązania do ścisłego rozwiązania równań różniczkowych.

Obok metod różnic skończonych istnieją próby znalezienia przybliżonego rozwiązania problemów granicznych dla układów równań różniczkowych cząstkowych

pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych metodą kolejnych przybliżeń. Temat ten poruszają Z. SZMYDT [59–63], G. MAJCHEROWA [44], R. COURANT [11 i 12], A. K. AZIZ i J. B. DIAZ [1], C. S. CHU i J. B. DIAZ [8] oraz P. PERZYNA [47 i 48]. W pracach Z. SZMYDT, G. MAJCHEROWEJ, A. K. AZIZA i J. B. DIAZA, C. S. CHU i J. B. DIAZA oraz P. PERZYNY rozpatrywane są układy równań różniczkowych pierwszego rzędu, które można sprowadzić do równania różniczkowego drugiego rzędu.

Z. SZMYDT, wykorzystując twierdzenie Banacha o punkcie stałym, rozwiązała ogólny nieliniowy problem graniczny dla równań prawie-liniowych różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. G. MAJCHEROWA [44] rozpatrzyła liniowy i nieliniowy problem Picarda dla liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu oraz podała sposób rozwiązywania go wykorzystując funkcję Riemanna. W pracach A. K. AZIZA i J. B. DIAZA [1] oraz C. S. CHU i J. B. DIAZA [8] został postawiony i rozwiązany liniowy problem graniczny, w pracach zaś P. PERZYNY [47 i 48] został postawiony nieliniowy problem graniczny dla liniowego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu i rozwiązany metodą kolejnych przybliżeń za pomocą funkcji Riemanna. Prace [1, 8, 47 i 48] obejmują problemy rozważane przez G. MAJCHEROWĄ.

R. COURANT [11 i 12] zaproponował oryginalną metodę kolejnych przybliżeń do rozwiązania problemu Cauchy'ego i problemu początkowo-brzegowego dla układów liniowych, prawie-liniowych i quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego, wykorzystując związki wzdłuż charakterystyk.

Celem niniejszej pracy jest porównanie pięciu metod przybliżonego rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego w przypadku dwóch zmiennych niezależnych. Są to następujące metody: metoda iteracyjna Couranta, metoda Kellera-Thomégo, metody iteracyjne proponowane w pracach [1, 8, 44, 47, 48, 59–63], metoda bezpośredniego całkowania oraz metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk. Metody te zostały opisane kolejno w p. 3–7. W przypadku metody Couranta rozszerzono zakres jej stosowalności o pewne zagadnienia graniczne. Ze względu na duże znaczenie problemu stateczności metod różnicowych w p. 2 omówiono znane definicje stateczności układów równań różnicowych. W p. 8 rozpatrzono przykład rozprzestrzeniania się cylindrycznej fali ścinania w ośrodku sprężysto/lepko-plastycznym. Na podstawie tego przykładu w p. 9 porównano opisane metody. Punkt 10 zawiera pewne rozważania dotyczące ciągłości pochodnych rozwiązania na fali odciążania w przypadku cylindrycznej fali ścinania.

2. Stateczność metod różnicowych

W praktyce często rozwiązuje się układy równań różniczkowych w sposób przybliżony, aproksymując je równaniami różnicowymi. Wtedy jako przybliżone rozwiązanie układu równań różniczkowych traktuje się rozwiązanie odpowiedniego układu równań różnicowych, przy czym rozwiązanie to nie jest poszukiwane w ca-

łym obszarze określoności układu równań różniczkowych lecz tylko w węzłowych punktach siatki pokrywającej ten obszar. Przy wyborze układu równań różnicowych, aproksymujących dany układ równań różniczkowych, istnieje pewna dowolność. Nie każdy jednak z możliwych układów równań różnicowych może być wykorzystany do otrzymania przybliżonego rozwiązania układu równań różniczkowych. Dopuszczalne są tylko te aproksymacje różnicowe, które są stateczne.

Niestateczność równań różnicowych w trakcie obliczeń numerycznych przejawia się w postaci szybko rosnących skoków rozwiązania (por. [54]). Zjawisko to nie jest wynikiem błędów zaokrągleń, gdyż dla tego samego układu równań różnicowych można podać aproksymacje różnicowe stateczne i niestateczne. Stateczność jest więc własnością równań różnicowych i wskazane byłoby, żeby problem stateczności proponowanej metody rozwiązywania danych równań różniczkowych został zbadany przed przystąpieniem do obliczeń numerycznych. Wyjaśnienie pojęcia stateczności metod różnicowych można znaleźć w pracach [16, 54 i 55].

Od szeregu lat daje się zauważyć w literaturze zainteresowanie problemem stateczności równań różnicowych i kryteriami stateczności. Dotychczasowe rezultaty dotyczą liniowych równań różnicowych aproksymujących liniowe równania różniczkowe. Rozważmy najpierw zagadnienie początkowo-brzegowe dla liniowego niejednorodnego układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu i sformułujmy definicję stateczności w przypadku przybliżonego rozwiązywania tego problemu.

Niech $(\mathbf{x}, t) = (x_0, x_1, \dots, x_n, t) = (x_0, \mathbf{x}', t)$ będzie punktem $n+2$ -wymiarowej przestrzeni rzeczywistej \mathcal{R}_{n+2} i niech

$$\mathcal{V}_t = \{(\mathbf{x}, s) : 0 \leq x_0 < \infty, 0 \leq s \leq t, -\infty < x_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\varphi_t = \{(\mathbf{x}, t) : 0 \leq x_0 < \infty, -\infty < x_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\varphi_t^- = \{(0, \mathbf{x}', s) : -\infty < x_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n, 0 \leq s \leq t\}.$$

Niech $T > 0$. W obszarze \mathcal{V}_T rozpatrujemy liniowy operator różniczkowy pierwszego rzędu

$$(2.1) \quad \mathcal{L} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{G} \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Na φ_0 spełniony jest warunek

$$(2.2) \quad l^0 \mathbf{u} = \mathbf{f}^0,$$

a na φ_T^-

$$(2.3) \quad l^- \mathbf{u} = \mathbf{f}^-,$$

gdzie \mathbf{A}_i i \mathbf{G} są macierzami kwadratowymi, a \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{f}^0 i \mathbf{f}^- wektorami kolumnowymi o elementach zespolonych. Wszystkie rozważane wielkości są funkcjami dostateczną ilość razy różniczkowalnymi.

Zastąpmy równania różniczkowe (2.1) równaniami różnicowymi. Jeśli oznaczymy

$$V_\tau = \{(\mathbf{x}, t) : x_0 = \xi_0 h, x_i = \xi_i h, t = \mu k, \xi_0 = 0, 1, \dots, \\ \xi_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n, \mu = 0, 1, 2, \dots, \tau\},$$

$$S_\tau = \{(\mathbf{x}, t) : x_0 = \xi_0 h, x_i = \xi_i h, t = \tau k, \xi_0 = 0, 1, 2, \dots, \\ \xi_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$S_\tau^- = \{(0, \mathbf{x}', t) : x_i = \xi_i h, t = \mu k, \xi_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n, \\ \mu = 0, 1, \dots, \tau\},$$

gdzie h i k są dodatnimi liczbami rzeczywistymi i $h/k = \text{const}$, to w obszarze V_T mamy określony operator różnicowy

$$(2.4) \quad L_h \mathbf{u}^h = \mathbf{F}$$

z warunkami

$$(2.5) \quad l_h^0 \mathbf{u}^h = \mathbf{f}_h^0 \quad \text{na} \quad S_0,$$

oraz

$$(2.6) \quad l_h^- \mathbf{u}^h = \mathbf{f}_h^- \quad \text{na} \quad S_T^-.$$

Operator różnicowy $L_h \mathbf{u}^h$ otrzymaliśmy z operatora (2.1) przez zastąpienie pochodnej względem czasu wzorem

$$(2.7) \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t+k) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)}{k},$$

a pochodne cząstkowe względem współrzędnych przestrzennych najczęściej są aproksymowane za pomocą funkcji

$$(2.8) \quad hD_{+j} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}), \quad hD_{-j} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_j), \\ 2hD_{0j} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_j),$$

gdzie \mathbf{e}_j jest j -tym wektorem jednostkowym. Zauważamy, że warunek (2.4) wyraża zależność rozwiązania określonego w chwili $t+k$ od rozwiązania wziętego w chwili t .

Wprowadźmy definicję rzędu aproksymacji, a następnie definicję stateczności. Zakładamy, że wszystkie funkcje wektorowe są dla każdego ustalonego t całkowalne z kwadratem w \mathcal{R}_{n+1} . Jako normę dla wektorów przyjmujemy więc L_2 — normę

$$\|\mathbf{v}\| = \int_{\mathcal{R}_{n+1}} \mathbf{v}^* \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

DEFINICJA 1. Układ równań różnicowych (2.4) aproksymuje równania różniczkowe (2.1) z dokładnością rzędu m , jeżeli dla wszystkich rozwiązań układu (2.1)

$$(2.9) \quad \|\mathcal{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - L_h \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leq o(k^m).$$

DEFINICJA 2. Jeżeli jako wartości początkowe i brzegowe dla układu (2.4) dopuszczalne są wszystkie funkcje przestrzeni L_2 , to aproksymacja różnicowa (2.4) jest stateczna, jeżeli istnieją stałe K_1, K_2, K_3 niezależne od h i $t = \mu k$, takie że dla wszystkich h i $t = \mu k$ oraz wszystkich rozwiązań układu (2.4) zachodzi nierówność

$$(2.10) \quad \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)\| \leq K_1 \|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\| + K_2 \|\mathbf{f}_h^0(\mathbf{x}, 0)\| + K_3 \|\mathbf{f}_h^-(0, \mathbf{x}', t)\|.$$

Warunek (2.10) jest równoważny warunkowi

$$(2.11) \quad \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)\| \leq K_1 \|L_h \mathbf{u}^h\| + K_2 \|l_h^0 \mathbf{u}^h\| + K_3 \|l_h^- \mathbf{u}^h\|.$$

Widzimy więc, że układ równań różnicowych jest stateczny, jeżeli jego rozwiązania dla każdego t są jednostajnie ograniczone przez prawą stronę równań (2.4) oraz warunki początkowe i brzegowe.

Wyżej sformułowana definicja stateczności dla problemu początkowo-brzegowego równań (2.4) została wykorzystana między innymi w pracach [20, 28, 64–67], przy czym jako normę przyjmowano maksimum-normę $\|\mathbf{v}\|_Q = \sup_Q |v^i|$, gdzie $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^l)$.

Aproksymacja i stateczność schematów różnicowych odgrywają dużą rolę, bowiem te własności równań różnicowych decydują o zbieżności przybliżonego rozwiązania do ścisłego rozwiązania równań różniczkowych. Zachodzi mianowicie (por. [20, 28, 54, 55]) twierdzenie 1.

TWIERDZENIE 1. Jeżeli układ równań różnicowych (2.4) aproksymuje układ równań różniczkowych (2.1) oraz schemat różnicowy (2.4) jest stateczny, to rozwiązanie równań różnicowych (2.4) jest zbieżne do ścisłego rozwiązania równań różniczkowych (2.1), gdy $h \rightarrow 0$.

Wykazywanie stateczności aproksymacji różnicowych (2.4)–(2.6) korzystając bezpośrednio z definicji 2 jest raczej niewygodne. Kryteria stateczności dla takich problemów nie zostały dotychczas opracowane. Szerzej omówiona jest stateczność równań różnicowych aproksymujących zagadnienia Cauchy'ego dla liniowych jednorodnych układów równań różniczkowych cząstkowych. Dla takich równań istnieje kilka definicji stateczności. Zostały one sformułowane dla liniowych równań różnicowych o stałych współczynnikach i w niektórych przypadkach można je przenieść na układy równań o zmiennych współczynnikach. Opracowano również konieczne i dostateczne kryteria stateczności.

Niech w przedziale $0 \leq t \leq T$, gdzie $T > 0$, będzie sformułowane zagadnienie Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych cząstkowych

$$(2.12) \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{P} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

przy czym $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ jest punktem s -wymiarowej przestrzeni rzeczywistej R_s , $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ są wektorami funkcyjnymi w zespolonej przestrzeni \mathcal{S}_n , a $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{x}, \partial/\partial \mathbf{x})$ jest operatorem różniczkowym m -tego rzędu postaci

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, \partial/\partial \mathbf{x}) = \sum_{|\nu| \leq m} A_{\nu_1 \dots \nu_s}(\mathbf{x}) \partial^{|\nu|} / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_s^{\nu_s}, \quad \sum_i \nu_i = |\nu|,$$

przy czym A_{v_1, \dots, v_s} są macierzami kwadratowymi $n \times n$, ograniczonymi i różniczkowalnymi wystarczającą ilość razy.

Równania (2.12) aproksymujemy równaniami różnicowymi, które przedstawiamy w postaci

$$(2.13) \quad \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t+k) = (\mathbf{I}+k\mathbf{Q}) \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t),$$

o rozwiązaniu $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$ otrzymywanym w obszarze $\{(\mathbf{x}, t): x_i = \xi_i h, t = \mu k, \xi_i = 0, \pm 1, \dots, \mu = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, s\}$, $0 \leq h \leq h_0$, $k/h^m = \text{const}$. Równania (2.13) zostały uzyskane z równań (2.12) po zastąpieniu pochodnej względem czasu ilorazem różnicowym (2.7), a przy aproksymowaniu pozostałych pochodnych korzystano ze wzorów (2.8). Równania te wyrażają fakt, iż rozwiązanie \mathbf{u}^h w chwili $t+k$ jest określone przez rozwiązania wzięte w chwili t . Zależą one od parametru h i formalnie, gdy $h \rightarrow 0$, są zbieżne do równań (2.12); \mathbf{I} jest operatorem jednostkowym, \mathbf{Q} operatorem różnicowym, który jest wielomianem, o współczynnikach macierzowych względem $D_{\pm j}$ i D_0j , określonych wzorem (2.8).

Zakładamy, że wszystkie funkcje wektorowe są dla każdego ustalonego t całkowalne z kwadratem w \mathcal{R}_s , czyli należą do przestrzeni L_2 . W L_2 jak zwykle są określone iloczyn skalarny i norma. Jeżeli $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, 0) \in L_2$, to z (2.13) wynika, że dla wszystkich $t \in \langle 0, T \rangle$, $t = \mu k$ należy również do tej przestrzeni funkcja

$$(2.14) \quad \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{I}+k\mathbf{Q})^{t/h} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, 0).$$

Przejdźmy do sformułowania definicji stateczności dla aproksymacji różnicowych (2.13). W literaturze najczęściej spotyka się trzy następujące definicje stateczności.

DEFINICJA 3. Jeżeli jako wartości początkowe dla równań różnicowych (2.13) przy $t = 0$ są dopuszczalne wszystkie $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in L_2$, to aproksymacja różnicowa (2.13) jest stateczna w przedziale $0 \leq t \leq T$:

A) jeśli istnieją liczby rzeczywiste $K \geq 0$ i $\alpha \geq 0$ takie, że dla wszystkich h i $t \in \langle 0, T \rangle$, $t = \mu k$, $\mu = 0, 1, \dots$ i dla wszystkich rozwiązań (2.13) zachodzi nierówność

$$(2.15) \quad \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)\| \leq K k^{-\alpha} \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, 0)\|;$$

B) jeśli istnieje liczba rzeczywista $K \geq 0$ taka, że dla wszystkich h i $t \in \langle 0, T \rangle$, $t = \mu k$, $\mu = 0, 1, \dots$ oraz dla wszystkich rozwiązań (2.13) zachodzi nierówność

$$(2.16) \quad \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)\| \leq K \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, 0)\|;$$

C) jest silnie stateczna ze względu na normę, gdy istnieją stałe K_1 i K_2 takie, że 1) dla każdego ustalonego h istnieje w całej przestrzeni L_2 operator różniczkowy $\mathcal{Q}(h)$ taki, że dla wszystkich $\mathbf{u} \in L_2$

$$(2.17) \quad K_1^{-1} \|\mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|_h^2 \leq K_1 \|\mathbf{u}\|^2, \quad \|\mathbf{u}\|_h^2 = (\mathbf{u}, \mathcal{Q}(h) \mathbf{u}),$$

2) dla wszystkich rozwiązań (2.13), dla wszystkich h i $t \in \langle 0, T \rangle$, $t = \mu k$ spełniony jest warunek

$$(2.18) \quad \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t+k)\|_h^2 \leq (1+K_2 k) \|\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)\|_h^2.$$

Definicja A jest najogólniejsza. Stosowana była między innymi przez W. G. STRANGA [58] oraz przez G. E. FÖRSYTHE'A i W. R. WASOWA [16]. Definicję tę uzyskano z praktyki obliczeń numerycznych: wymaga się, aby kumulatywny błąd obliczeń nie rósł szybciej niż pewna potęga k^{-1} i gdy $k \rightarrow 0$ dążył do zera wraz z błędem popełnionym w pojedynczym punkcie siatki. Definicja B, sformułowana po raz pierwszy przez F. JOHNA [25] dla równań parabolicznych, rozpozszeczniona przez P. D. LAXA i R. D. RICHTMYERA i zwana coraz powszechniej definicją Laxa-Richtmyera — jest analogiczna do definicji poprawnego postawienia zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych cząstkowych. Definicja ta jest między innymi wykorzystana w pracach [36, 38, 40, 41 i 54]. Jest ona szczególnym przypadkiem definicji A. Definicja 2 stateczności jest uogólnieniem definicji B dla problemu początkowo-brzegowego liniowych układów równań różnicowych niejednorodnych. Definicja C została zaproponowana przez H. O. KREISSA [31]. Uzyskano ją ze spostrzeżenia, że w praktyce nieznane są równania różniczkowe cząstkowe, których rozwiązania nie spełniałyby *a priori* nierówności

$$\frac{\partial \| \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \|_1^2}{\partial t} \leq K \| \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \|_1^2, \quad K = \text{const},$$

której aproksymacją różnicową jest (2.18).

Definicje A, B i C zostały sformułowane dla układów równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Wykorzystując jednorodność równań (2.13) i stałość występujących w nich współczynników często w literaturze wychodzi się z innych definicji stateczności, równoważnych definicji A lub B. Definicje formułuje się mianowicie dla transformat Fouriera rozwiązania równania różnicowego. Oznaczmy przez \mathcal{R}'_s przestrzeń wszystkich wektorów rzeczywistych $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$, a przez

$$\Psi(\omega) = (2\pi)^{-s/2} \int_{\mathcal{R}_s} e^{-i\omega x} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

transformatę Fouriera dla funkcji $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in L_2$. Równania różnicowe (2.13) po transformacji Fouriera przyjmują postać

$$(2.19) \quad \Psi(\omega, t+k) = (\mathbf{I} + k\hat{\mathbf{Q}}) \Psi(\omega, t).$$

Wobec tego dla wszystkich $t = \mu k$

$$(2.20) \quad \Psi(\omega, t) = (\mathbf{I} + k\hat{\mathbf{Q}})^{t/k} \Psi(\omega, 0),$$

gdzie $\Psi(\omega, t)$ i $\hat{\mathbf{Q}}$ oznaczają transformaty Fouriera, odpowiednio dla $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$ i \mathbf{Q} . Słuszne jest wtedy [31]

TWIERDZENIE 2. *Aproksymacja różnicowa (2.13) jest stateczna wtedy i tylko wtedy, gdy*

1) dla definicji A: istnieją stałe $K_3 > 0$ i $\alpha_1 \geq 0$ takie, że dla wszystkich $t \in \langle 0, T \rangle$, $t = \mu k$ i dla wszystkich h spełniony jest związek

$$(2.21) \quad |(\mathbf{I} + k\hat{\mathbf{Q}})^{t/k}| \leq K_3 k^{-\alpha_1};$$

2) dla definicji B; istnieje stała $K_3 > 0$ taka, że dla wszystkich $t \in \langle 0, T \rangle$, $t = \mu k$ i dla wszystkich h spełniony jest związek

$$(2.22) \quad |(\mathbf{I} + k\hat{\mathbf{Q}})^{t/k}| \leq K_3,$$

gdzie $|\mathbf{A}|$ oznacza normę Euklidesową dla macierzy.

Najwygodniejsza przy wykorzystywaniu w praktyce jest definicja stateczności A. Okazuje się, że warunkiem koniecznym i dostatecznym stateczności w przypadku definicji A jest kryterium von Neumanna, tzn. zachowanie przez wartości własne macierzy $\mathbf{I} + k\hat{\mathbf{Q}}$ czyli spełnione przez rozwiązania równania

$$\det [\mathbf{I} (1 - \lambda) + k\hat{\mathbf{Q}}] = 0$$

nierówności

$$(2.23) \quad \max_{j, \omega} |\lambda_j(\omega, h)| \leq 1 + o(k).$$

Dla definicji B kryterium von Neumanna (2.23) jest tylko warunkiem koniecznym. Warunki dostateczne stateczności mają o wiele bardziej skomplikowaną postać. Cztery równoważne sobie warunki konieczne i dostateczne zostały podane w pracy H. O. KREISSA [31]. Inne warunki dostateczne są sformułowane i wykorzystywane w pracach [32, 41, 45, 54 i 68].

H. O. KREISS w [31] dokonał porównania definicji A, B i C. Okazuje się, że definicja B w porównaniu z definicją A może być stosowana do badania stateczności szerszej klasy schematów różnicowych, mianowicie również w przypadku równań różnicowych aproksymujących układ równań różniczkowych cząstkowych postaci

$$(2.24) \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{P} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{B} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

gdzie \mathcal{P} jest stałym operatorem różniczkowym, a \mathcal{B} dowolnym jednostajnie ograniczonym operatorem, określonym w L_2 . Dla jednego równania definicje A i B są sobie równoważne.

W przypadku równań różnicowych (2.13) o zmiennych współczynnikach naturalną myślą było przenieść «punktowo» definicje stateczności dla stałych współczynników na zmienne, tzn. przyjąć, że aproksymacja różnicowa (2.13) o zmiennych współczynnikach jest stateczna, jeżeli jest stateczna dla każdego ustalonego \mathbf{x} . W pracy [31] zbadano możliwości takiego postępowania. Okazuje się, że definicji A nie można na ogół przenieść «punktowo» na równania różnicowe ze zmiennymi współczynnikami. Przy takim postępowaniu w przypadku definicji B należy zachować ostrożność głównie przy równaniach różnicowych, które aproksymują równania różniczkowe cząstkowe rzędu wyższego niż pierwszy. Związane jest to z problemem poprawnego postawienia zagadnienia Cauchy'ego dla aproksymowanych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. H. O. KREISS [31] wykazał, że definicje B i C są sobie równoważne w przypadku schematów różnicowych o stałych współczynnikach. Przypuszcza on, że definicja C w innych przypadkach będzie mogła być również stosowana.

Ze względu na to, iż stateczność jest własnością równań różnicowych, istotne znaczenie ma sposób aproksymowania wyjściowego układu równań różniczkowych. Wzory (2.7) i (2.8) nie są oczywiście jedynymi możliwymi przy przybliżaniu pochodnych cząstkowych względem czasu i względem zmiennych przestrzennych. Są one często stosowane. Ciekawą dyskusję dotyczącą różnych wariantów aproksymowania pewnych równań różniczkowych, z wyróżnieniem najbardziej korzystnych przeprowadził P. D. LAX [37].

3. Metoda R. Couranta

W pracach [11 i 12] R. COURANT zaproponował oryginalną metodę iteracyjną do rozwiązywania początkowych i początkowo-brzegowych problemów dla liniowych, prawie-liniowych i quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych. Podstawą jego metody jest sprowadzenie wyjściowego układu równań różniczkowych cząstkowych do równań różniczkowych zwyczajnych, w których występowałoby tylko różniczkowanie w kierunkach charakterystycznych i poszukiwanie rozwiązań tych równań za pomocą metody kolejnych przybliżeń.

Zakres stosowalności metody Couranta można rozszerzyć na pewne problemy graniczne. Ten fakt pozwala na wykorzystywanie metody iteracyjnej Couranta do rozwiązywania niektórych problemów falowych w ośrodkach niesprężystych, sprowadzających się do zagadnień nie objętych pracami [11 i 12].

Niech $Q = \{(x, t) : x_0 \leq x \leq \theta(t), t(x) \leq t \leq \vartheta(x)\}$ będzie zamkniętym krzywoliniowym czworobokiem na płaszczyźnie x, t , ograniczonym prostą $x = x_0$, gładką krzywą $t = t(x)$ oraz dwiema granicznymi charakterystykami wychodzącymi z ustalonego punktu (x^*, t^*) , o równaniach $x = \theta(t)$, $t = \vartheta(x)$, gdzie $x^* > x_0$, $t^* > 0$.

Rozpatrzmy prawie-liniowy układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych

$$(3.1) \quad U_t + AU_x + B = 0,$$

gdzie U jest nieznanym wektorem kolumnowym o n składowych, A jest macierzą kwadratową $n \times n$, B jest danym wektorem kolumnowym o n składowych, U_t, U_x są odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi wektora U . Dana macierz A zależna jest od współrzędnej miejsca x i czasu t , a wektor B od współrzędnej miejsca x , czasu t i wektora U . Przez rozwiązanie układu równań (3.1) rozumiemy wektor-funkcję $U(x, t) \in C^1_Q$, czyli funkcję U ciągłą wraz z pochodnymi pierwszego rzędu w obszarze Q .

Żądamy, aby rozwiązanie U układu (3.1) spełniało warunki

$$(3.2) \quad \begin{aligned} U(x, t(x)) &= \varphi(x) && \text{na krzywej} && t = t(x), \\ MU(x_0, t) &= \psi(t) && \text{na prostej} && x = x_0, \end{aligned}$$

gdzie macierz M jest daną macierzą prostokątną $n \times r$, $\varphi(x)$ i $\psi(t)$ są danymi wektorami kolumnowymi odpowiednio n i r składowymi, a r jest równe liczbie charakterystyk wychodzących z punktu $(x_0, 0)$ w obszar Q .

TWIERDZENIE 3. Jeżeli spełnione są następujące warunki (które oznaczać będziemy (3.3)):

- 1) macierz \mathbf{A} ma n rzeczywistych wartości własnych $\lambda^i(x, t)$ i n liniowo niezależnych lewych wektorów własnych \mathbf{l}^i ($i = 1, 2, \dots, n$),
- 2) macierz $\mathbf{A}(x, t)$ oraz wektory $\mathbf{l}^i(x, t)$, $\boldsymbol{\varphi}(x)$ i $\boldsymbol{\psi}(t)$ są klasy \mathcal{C}_Q^1 ,
- 3) wektor \mathbf{B} jest funkcją ciągłą wraz z pochodnymi względem x, t, \mathbf{U} ,
- 4) $n\kappa\varepsilon < 1$, gdzie κ jest maksymalną odległością między rzędnymi rozważanych punktów obszaru Q , a ε jest norma funkcji $\mathbf{F}_w = [-\mathbf{LB} - (\mathbf{DL})\mathbf{L}^{-1}\mathbf{W}]_w$, to wtedy w każdym punkcie obszaru Q istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie $\mathbf{U}(x, t) \in \mathcal{C}_Q^1$ problemu (3.1)–(3.2).

Dowód. Rozpatrzmy liniową przestrzeń \mathcal{C}_Q^1 wektor funkcji $\mathbf{V}(x, t)$, czyli przestrzeń funkcji ciągłych wraz z pierwszymi pochodnymi w obszarze Q . Normę w tej przestrzeni zdefiniujmy następująco:

$$(3.4) \quad \|\mathbf{V}(x, t)\| = \sup_{j=1,2,\dots,n} |v^j(x, t)| + \sup_{j=1,2,\dots,n} |v_x^j(x, t)| + \sup_{j=1,2,\dots,n} |v_t^j(x, t)|,$$

gdzie v^j oznaczają składowe wektora \mathbf{V} .

Zbieżność w przestrzeni \mathcal{C}_Q^1 oznacza jednostajną zbieżność w obszarze Q dla funkcji $\mathbf{V}(x, t)$ i jej pochodnych pierwszego rzędu. Wobec tego przestrzeń \mathcal{C}_Q^1 jest przestrzenią zupełną.

Dokonajmy pewnych przekształceń układu (3.1). Pomnóżmy lewostronnie (3.1) przez każdy z lewych wektorów własnych macierzy \mathbf{A} . Otrzymamy wtedy układ równań postaci

$$(3.5) \quad \mathbf{l}^i d^i \mathbf{U} + \mathbf{l}^i \mathbf{B} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie d^i jest operatorem

$$d^i = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda^i \frac{\partial}{\partial x}$$

i oznacza różniczkowanie wzdłuż i -tej charakterystyki układu równań (3.1). Ze względu na liniową niezależność wektorów \mathbf{l}^i ($i = 1, 2, \dots, n$) układ (3.5) jest układem n liniowo niezależnych równań. Wprowadzając nową funkcję $\mathbf{w}^i = \mathbf{l}^i \mathbf{U}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), co można zapisać prościej $\mathbf{W} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ (\mathbf{W} i \mathbf{U} są wektorami kolumnowymi o n składowych, a \mathbf{L} jest macierzą kwadratową $n \times n$, w której i -ty wiersz złożony jest ze składowych wektora \mathbf{l}^i) i wykorzystując wzór Leibniza dla pochodnych otrzymujemy

$$(3.6) \quad \mathbf{D}\mathbf{W} = -\mathbf{L}\mathbf{B} - (\mathbf{D}\mathbf{L})\mathbf{U}.$$

$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{W})$ można wyrazić poprzez \mathbf{W} . Układ (3.1) został więc przekształcony w układ n równań wzdłuż charakterystyk, który można w ogólnej postaci przedstawić następująco:

$$(3.7) \quad \mathbf{D}\mathbf{W} = \mathbf{F}(x, t; \mathbf{W}).$$

Wektor \mathbf{F} o n składowych na podstawie (3.3) i (3.6) jest funkcją ciągłą wraz z pierwszymi pochodnymi względem x , t oraz \mathbf{W} , a \mathbf{D} jest macierzą diagonalną $n \times n$ o składowych d^i na diagonalu.

Układ (3.7) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, przy czym i -te równanie (3.7) jest spełnione wzdłuż i -tej charakterystyki układu (3.1).

Problem (3.1)–(3.2) został sprowadzony do znalezienia wektora $\mathbf{W}(x, t) \in \mathcal{C}_Q^1$ spełniającego równanie (3.7) i warunki

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}(x, t(x)) &= \Phi(x) && \text{na krzywej} && t = t(x), \\ \mathbf{S}\mathbf{W}(x_0, t) &= \Psi(t) && \text{na prostej} && x = x_0, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{S} jest macierzą prostokątną $n \times r$, Φ i Ψ wektorami o n i r składowych. Na podstawie (3.3) $\Phi(x)$ i $\Psi(t)$ są klasy \mathcal{C}_Q^1 .

Wprowadźmy w przestrzeni \mathcal{C}_Q^1 całkowite transformacje przekształcające funkcję $\mathbf{W}(x, t) \in \mathcal{C}_Q^1$ w funkcję $\mathbf{V}(x, t)$:

$$(3.9) \quad v^i(\xi, \eta) = v_0^i(\xi, \eta) + \int_{P_i}^P f^i(x(t), t; \mathbf{W}) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Drugi składnik transformacji jest całką wzdłuż łuku i -tej charakterystyki układu (3.1) od punktu $P_i(\xi_i, \eta_i)$, będącego punktem przecięcia i -tej charakterystyki wychodzącej z punktu $P(\xi, \eta)$ z brzegiem lub krzywą $t = t(x)$ do punktu $P(\xi, \eta)$, a $v_0^i(\xi, \eta)$ jest wartością i -tej składowej rozwiązania w punkcie $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Funkcje $v^i(\xi, \eta)$ określone przez (3.9) i ich pierwsze pochodne są ciągłe w obszarze Q . Wobec tego transformacje (3.9) przekształcają przestrzeń \mathcal{C}_Q^1 w siebie. Łatwo zauważyć, że funkcja $\mathbf{W}(x, t)$, która jest punktem stałym przekształcenia (3.9) spełnia równanie (3.7) i warunki (3.8). Wystarczy więc wykazać, że istnieje dokładnie jeden punkt stały przekształcenia (3.9).

Biorąc różnicę dwóch funkcji $\mathbf{V}_1(x, t)$ i $\mathbf{V}_2(x, t)$ i wykorzystując twierdzenie o wartości średniej dla \mathbf{F} otrzymujemy

$$(3.10) \quad v_1^i - v_2^i = \int_{\eta_i}^{\eta} f_{\mathbf{W}}^i(x(t), t; \mathbf{W}^*) (w_1^i - w_2^i) dt,$$

gdzie \mathbf{W}^* jest wartością pośrednią między \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 . Po przejściu do norm mamy

$$(3.11) \quad \|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2\| \leq m \|\mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_2\|,$$

przy czym

$$(3.12) \quad m = \max_{i=1, 2, \dots, n} |\eta - \eta_i| \|\mathbf{F}_{\mathbf{W}}\| n = n k \varepsilon.$$

Na podstawie założeń (3.3) $m < 1$, a więc operacja całkowita (3.9), przekształcająca przestrzeń \mathcal{C}_Q^1 w siebie, jest operacją zwiężającą. Wobec tego z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że transformacja (3.9) pozwala uzyskać jedno i tylko jedno rozwiązanie $\mathbf{W}(x, t) \in \mathcal{C}_Q^1$ problemu (3.7)–(3.8). Tym samym problem

(3.1)–(3.2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $U(x, t) \in C_Q^1$, które wyraża się przez $W(x, t)$ za pomocą wzoru

$$(3.13) \quad U = L^{-1}W.$$

Bazując na transformacji (3.9) rozwiązanie problemu (3.7)–(3.8) uzyskujemy za pomocą metody kolejnych przybliżeń wykorzystując następujące wzory iteracyjne:

$$(3.14) \quad w_{j+1}^i(P) = w_0^i(P) + \int_{P_i}^P f^i(x(t), t; W_j) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

w których zerowa iteracja w_0^i jest wartością i -tej składowej wektora W w punkcie P_i przecięcia i -tej charakterystyki wychodzącej z punktu P z krzywą graniczną lub z brzegiem.

Powyższe rozważania zostały przeprowadzone dla układu równań prawie-liniowych. Można je uogólnić w przypadku pewnych problemów granicznych dla układów równań quasi-liniowych (por. R. COURANT [12]).

Technika numerycznego liczenia za pomocą metody Couranta jest stosunkowo prosta. Obszar Q pokrywamy siatką utworzoną przez charakterystyki układu równań (3.1). Przybliżone rozwiązanie w punkcie siatki P otrzymujemy według wzorów (3.14), korzystając z uprzednio już policzonych przybliżonych rozwiązań w sąsiednich punktach siatki P_i , leżących na i -tych charakterystykach przechodzących przez punkt P . Za składowe zerowej iteracji rozwiązania W w punkcie P przyjmujemy najwyższe wyliczone już iteracje odpowiednich składowych rozwiązania w punktach P_i .

4. Metoda Kellera-Thomégo

Pewna bezwzględnie stateczna metoda różnicowa została zaproponowana przez H. B. KELLERA [27] do przybliżonego rozwiązywania niektórych początkowo-brzegowych problemów dla prawie-liniowych układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych. W pracy H. B. KELLERA i V. THOMÉGO [28] metoda ta została zastosowana do rozwiązywania układów równań liniowych i quasi-liniowych w przypadku ogólniejszych warunków brzegowych.

Rozpatrzmy w obszarze $\mathcal{V} \{ (x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \delta, \delta > 0 \}$ w \mathcal{R}^2 o odcinku początkowym $\varphi_0 = \mathcal{V} \cap \{ t = 0 \}$ i brzegach $\varphi^- = \mathcal{V} \cap \{ x = 0 \}$, $\varphi^+ = \mathcal{V} \cap \{ x = 1 \}$ problem początkowo-brzegowy dla układu równań

$$(4.1) \quad \mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{D}(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{F}(x, t, u) \text{ określonych w } \mathcal{V}$$

z następującymi danymi:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{f}^0(x) && \text{na } \varphi_0, \\ \sigma^- \mathbf{u} - \mathbf{f}^-(t, (\mathbf{I} - \sigma^- \mathbf{u})) &= 0 && \text{na } \varphi^-, \\ \sigma^+ \mathbf{u} - \mathbf{f}^+(t, (\mathbf{I} - \sigma^+ \mathbf{u})) &= 0 && \text{na } \varphi^+, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{D} = (\delta_{ij} d^i)$ jest rzeczywistą macierzą diagonalną, $\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{f}^\mp$ są kolumnowymi wektorami oraz $\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{f}^\mp$ i \mathbf{f}^0 są funkcjami klasy \mathcal{C}^1 . Macierze $\sigma^\mp = \sigma^\mp(t, \mathbf{u}(x, t))$ są macierzami diagonalnymi z następującymi elementami na diagonalni:

$$[\sigma^-(\mathbf{u})]^i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } d^i(0, t, \mathbf{u}(0, t)) < 0, \\ 0, & \text{gdy } d^i(0, t, \mathbf{u}(0, t)) \geq 0, \end{cases}$$

$$[\sigma^+(\mathbf{u})]^i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } d^i(1, t, \mathbf{u}(1, t)) > 0, \\ 0, & \text{gdy } d^i(1, t, \mathbf{u}(1, t)) \leq 0. \end{cases}$$

W pracy [28] zaproponowano rozwiązanie problemu (4.1)–(4.2) w sposób przybliżony przez rozwiązanie odpowiedniego problemu różnicowego

$$(4.3) \quad \begin{aligned} L\mathbf{v}_{\xi, \tau} &= \mathbf{F}_{\xi, \tau}, & \text{gdy } (\xi h, \tau k) \in V_{T-1}, \\ \mathbf{v}_{\xi, 0} &= \mathbf{f}_{\xi}^0, & \text{gdy } (\xi h, 0) \in S_0, \\ \sigma_{\tau}^-(\mathbf{v}) \mathbf{v}_{0, \tau+1} &= \mathbf{f}^-(\tau+1)k, (\mathbf{I} - \sigma_{\tau}^-(\mathbf{v})) \mathbf{v}_{0, \tau}, & \text{gdy } (0, \tau k) \in S_{T-1}^-, \\ \sigma_{\tau}^+(\mathbf{v}) \mathbf{v}_{X, \tau+1} &= \mathbf{f}^+(\tau+1)k, (\mathbf{I} - \sigma_{\tau}^+(\mathbf{v})) \mathbf{v}_{X, \tau}, & \text{gdy } (1, \tau k) \in S_{T-1}^+, \end{aligned}$$

gdzie $h = 1/X$, $k = \delta/T$, X i T są liczbami całkowitymi dodatnimi, $k/h = \lambda$ jest wielkością ograniczoną, a zbiory V_{τ} , S_{τ} i S_{τ}^{\pm} tworzymy w sposób następujący:

$$V_{\tau} = \{(\xi h, \eta k) : \xi = 0, 1, \dots, X; \eta = 0, 1, \dots, \tau\}, \quad S_{\tau} = \{(\xi h, \tau k) : \xi = 0, 1, \dots, X\},$$

$$S_{\tau}^- = \{(0, \eta k) : \eta = 1, 2, \dots, \tau\}, \quad S_{\tau}^+ = \{(1, \eta k) : \eta = 1, 2, \dots, \tau\}.$$

Funkcja $\mathbf{v}_{\xi, \tau} = \mathbf{v}(\xi h, \tau k)$ jest rozwiązaniem równań różnicowych (4.3), z których każde i -te równanie w zależności od wielkości $d_{\xi, \tau}^i(\mathbf{v}) = d^i(\xi h, \tau k; \mathbf{v}_{\xi, \tau})$, przyjmuje jedną z poniższych postaci:

$$(4.4) \quad kF_{\xi, \tau}^i = \begin{cases} (v_{\xi+1, \tau+1}^i - v_{\xi+1, \tau}^i) - \lambda d_{\xi, \tau}^i(\mathbf{v})(v_{\xi+1, \tau+1}^i - v_{\xi, \tau+1}^i), & \text{gdy } 1 < \lambda d_{\xi, \tau}^i, \\ (v_{\xi, \tau+1}^i - v_{\xi, \tau}^i) - \lambda d_{\xi, \tau}^i(\mathbf{v})(v_{\xi+1, \tau}^i - v_{\xi, \tau}^i), & \text{gdy } 0 \leq \lambda d_{\xi, \tau}^i \leq 1, \\ (v_{\xi, \tau+1}^i - v_{\xi, \tau}^i) - \lambda d_{\xi, \tau}^i(\mathbf{v})(v_{\xi, \tau}^i - v_{\xi-1, \tau}^i), & \text{gdy } -1 \leq \lambda d_{\xi, \tau}^i < 0, \\ (v_{\xi-1, \tau+1}^i - v_{\xi-1, \tau}^i) - \lambda d_{\xi, \tau}^i(\mathbf{v})(v_{\xi, \tau+1}^i - v_{\xi-1, \tau+1}^i), & \text{gdy } \lambda d_{\xi, \tau}^i < -1. \end{cases}$$

Układ równań różnicowych (4.3)₁ aproksymuje układ równań różniczkowych (4.1) z dokładnością rzędu $o(k)$. W przypadku gdy równania (4.1) są liniowe, wymagana jest tylko ciągłość wielkości $\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{f}^\mp$ i \mathbf{f}^0 . Bez względu na stateczność zaproponowanej metody rozwiązywania problemu (4.1)–(4.2) oraz zbieżność przybliżonego rozwiązania do ścisłego rozwiązania problemu (4.1)–(4.2) zostały wykazane w [28] dla układów równań liniowych i quasi-liniowych, a w pracy [27] dla równań prawie-liniowych. Rozważane wielkości są funkcjami rzeczywistymi. Dowody przeprowadzono przy użyciu maximum-normy.

Metoda Kellera-Thomégo została wykorzystana i przystosowana przez J. FONGA [14] do przybliżonego rozwiązywania problemów początkowo-brzegowych z jednym brzegiem nieznanym dla układu (4.1).

5. Metody iteracyjne dla równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu

Niektóre układy równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych można sprowadzić do równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu. Problemy graniczne dla takich równań są stosunkowo dobrze opracowane w literaturze. Między innymi proponowanymi metodami rozwiązywania są metody kolejnych przybliżeń. W przypadku metod iteracyjnych można wyróżnić dwa schematy postępowania w zależności od tego, czy wyjściowe równanie jest prawie-liniowe, czy liniowe.

Rozważmy nieliniowy problem graniczny dla tych równań. Niech $Q \{(x, y) : 0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0\}$ będzie zamkniętym prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych $x_0 > 0, y_0 > 0$. Niech w Q określone jest równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu prawie-liniowe

$$(5.1) \quad u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

lub liniowe

$$(5.2) \quad u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y),$$

gdzie u jest niewiadomą funkcją spełniającą warunki graniczne

$$(5.3) \quad \begin{aligned} u_x(x, \varphi(x)) &= g(x, u(x, \varphi(x)), u_y(x, \varphi(x))) \quad \text{na } y = \varphi(x), \\ u_y(\psi(y), y) &= h(y, u(\psi(y), y), u_x(\psi(y), y)) \quad \text{na } x = \psi(y), \\ u(x^*, y^*) &= u^*. \end{aligned}$$

Symbol (x^*, y^*) oznacza punkt w Q , u^* jest daną stałą, g i h są danymi funkcjami ciągłymi w Q . Problem (5.1)–(5.3) został postawiony i rozwiązany przez Z. SZMYDT, która udowodniła

TWIERDZENIE 4. Jeżeli

- 1) funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ są ciągłe w Q oraz $0 \leq \varphi(x) \leq y_0, 0 \leq \psi(y) \leq x_0$;
- 2) f, g i h są ciągłymi rzeczywistymi funkcjami x, y, u, u_x, u_y w Q , spełniającymi warunki Lipschitza

$$|f(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) - f(x, y, u, u_x, u_y)| \leq L(|\bar{u} - u| + |\bar{u}_x - u_x| + |\bar{u}_y - u_y|),$$

$$|g(x, \bar{u}, \bar{u}_y) - g(x, u, u_y)| \leq L|\bar{u} - u| + M|\bar{u}_y - u_y|,$$

$$|h(y, \bar{u}, \bar{u}_x) - h(y, u, u_x)| \leq L|\bar{u} - u| + N|\bar{u}_x - u_x|;$$

- 3) zachodzą nierówności

$$2L(X_0^2 + 2X_0 + 1) < 1,$$

$$2L(X_0^2 + X_0) + N(X_0 + 1) < 1,$$

$$2L(X_0^2 + X_0) + M(X_0 + 1) < 1,$$

gdzie $X_0 = \max(x_0, y_0)$, a L, M, N są pewnymi stałymi, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $u(x, y) \in \mathcal{C}_Q^1$ zagadnienia granicznego (5.1) i (5.3). Rozwiązanie to otrzymujemy metodą kolejnych przybliżeń opierając się na transformacji całkowej

$$(5.4) \quad \mathcal{R}[u(x, y)] = u^* + \int_{x^*}^x g(s, u(s, \varphi(s)), u_y(s, \varphi(s))) ds + \\ + \int_{y^*}^y h(z, u(\psi(z), z), u_x(\psi(z), z)) dz + \int_{y^*}^y \int_{\varphi(z)}^{x^*} f(s, z, u(s, z), u_x(s, z), u_y(s, z)) ds dz + \\ + \int_{x^*}^x \int_{\varphi(s)}^y f(s, z, u(s, z), u_x(s, z), u_y(s, z)) dz ds$$

i wykorzystując algorytm

$$(5.5) \quad u_1(x, y) = u^*, \quad u_{n+1}(x, y) = \mathcal{R}[u_n(x, y)], \\ u_{x_{n+1}}(x, y) = \mathcal{R}_x[u_n(x, y)], \quad u_{y_{n+1}}(x, y) = \mathcal{R}_y[u_n(x, y)].$$

Nieliniowy problem graniczny (5.3) dla liniowego równania (5.2) rozpatrywany był przez P. PERZYŃĘ [47]. Obejmuje on między innymi liniowe problemy graniczne zbadane przez A. K. AZIZA i J. B. DIAZA [1], C. CHU i J. B. DIAZA [8] oraz problem Picarda postawiony i rozwiązany przez G. MAJCHEROWĄ [44]. W [47] udowodniono

TWIERDZENIE 5. Jeżeli

- 1) rzeczywiste funkcje $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ i $d(x, y)$ są ciągłe w Q ;
- 2) funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła dla $0 \leq x \leq x_0$, a funkcja $\psi(y)$ dla $0 \leq y \leq y_0$ oraz $0 \leq \varphi(x) \leq y_0$, $0 \leq \psi(y) \leq x_0$;
- 3) funkcje g i h są ciągłe w Q i spełniają warunki Lipschitza

$$|g(x, \bar{u}, \bar{u}_y) - g(x, u, u_y)| \leq M^* |\bar{u} - u| + N^* |\bar{u}_y - u_y|,$$

$$|h(y, \bar{u}, \bar{u}_x) - h(y, u, u_x)| \leq M^* |\bar{u} - u| + N^* |\bar{u}_x - u_x|;$$

- 4) spełniona jest nierówność przez stałe K^0, M^*, N^*, K^* i X_0 ,

$$2K^0 X_0 \left(1 + \frac{M^* + N^*}{K^*} \right) + N^* < 1,$$

to istnieje w obszarze Q jednoznaczne rozwiązanie $u(x, y) \in \mathcal{C}_Q^1$ zagadnienia granicznego (5.2)–(5.3).

Rozwiązanie to wyraża się wzorem

$$(5.6) \quad u(x, y) = \mathcal{F}(x, y) + \int_{x^*}^x \Omega(\xi) V(\xi, y^*; x, y) d\xi + \int_{y^*}^y II(\eta) V(x^*, \eta; x, y) d\eta,$$

gdzie

$$\mathcal{F}(x, y) = u^* V(x^*, y^*; x, y) + \int_{x^*}^x \int_{y^*}^y d(\xi, \eta) V(\xi, \eta; x, y) d\eta d\xi,$$

$V(\xi, \eta; x, y)$ jest funkcją Riemanna dla jednorodnego równania (5.2), a funkcje $\Omega(x)$ i $\Pi(y)$ tak dobrane, aby rozwiązanie spełniało warunki graniczne (5.3), otrzymuje się metodą iteracji z następującego układu równań funkcyjno-całkowych:

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & G(x) + \int_{x^*}^x \Omega(\xi) \kappa_1(\xi, x) d\xi + \int_{y^*}^{\varphi(x)} \pi(\eta) \kappa_2(\eta, x) d\eta + \\ & + [V(x, y^*; x, \varphi(x))]^{-1} g\left(x, \mathcal{F}(x, \varphi(x)) + \int_{x^*}^x \Omega(\xi) \kappa_3(\xi, x) d\xi + \right. \\ & + \int_{y^*}^{\varphi(x)} \Pi(\eta) \kappa_4(\eta, x) d\eta, \mathcal{F}_y(x, \varphi(x)) + \int_{x^*}^x \Omega(\xi) \kappa_5(\xi, x) d\xi + \\ & \left. + \int_{y^*}^{\varphi(x)} \Pi(\eta) \kappa_6(\eta, x) d\eta + \Pi(\varphi(x)) V(x^*, \varphi(x); x, \varphi(x))\right), \\ \pi(y) = & H(y) + \int_{x^*}^{\psi(y)} \Omega(\xi) \kappa_7(\xi, y) d\xi + \int_{y^*}^y \Pi(\eta) \kappa_8(\eta, y) d\eta + \\ & + [V(x^*, y; \psi(y), y)]^{-1} h\left(y, \mathcal{F}(\psi(y), y) + \int_{x^*}^{\psi(y)} \Omega(\xi) \kappa_9(\xi, y) d\xi + \right. \\ & + \int_{y^*}^y \Pi(\eta) \kappa_{10}(\eta, y) d\eta, \mathcal{F}_x(\psi(y), y) + \int_{x^*}^{\psi(y)} \Omega(\xi) \kappa_{11}(\xi, y) d\xi + \\ & \left. + \Omega(\psi(y)) V(\psi(y), y^*; \psi(y), y) + \int_{y^*}^y \Pi(\eta) \kappa_{12}(\eta, y) d\eta\right). \end{aligned}$$

Funkcje $G(x)$, $H(y)$ i κ_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) podane są w pracach [47 i 49].

6. Metoda bezpośredniego całkowania (1)

Metoda bezpośredniego całkowania może być stosowana do przybliżonego rozwiązywania granicznych problemów dla hiperbolicznych układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych niezależnych postaci

$$(6.1) \quad \mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B} = 0,$$

gdzie $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ jest nieznanym wektorem o n składowych, macierz $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, t)$ jest macierzą kwadratową $n \times n$ i posiada n rzeczywistych wartości własnych λ^i oraz n liniowo niezależnych lewych wektorów własnych \mathbf{l}^i , a $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, t, \mathbf{U})$ jest wektorem o n składowych i jest liniową funkcją względem składowych u^j wektora \mathbf{U} .

Rozpatrzmy w obszarze $\bar{Q} \{(x, t) : x_0 \leq x \leq \theta(t), t(x) \leq t \leq \vartheta(x)\}$, ograniczonym prostą $x = x_0$, gładką krzywą $t = t(x)$ oraz dwiema granicznymi charakterystykami o równaniach $x = \theta(t)$, $t = \vartheta(x)$, wychodzącymi z ustalonego

(1) Koncepcję tej metody podał B. Jasiński [72].

punktu (x^0, t^0) , gdzie $x^0 > x_0$, $t^0 > 0$, zagadnienie graniczne dla układu równań (6.1) z warunkami

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}(x, t(x)) &= \boldsymbol{\varphi}(x) && \text{na krzywej} && t = t(x), \\ \mathbf{M}\mathbf{U}(x_0, t) &= \boldsymbol{\psi}(t) && \text{na prostej} && x = x_0, \end{aligned}$$

przy czym wektory $\boldsymbol{\varphi}(x)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ oraz macierz \mathbf{M} są dane. Wszystkie dane wielkości są funkcjami ciągłymi. Funkcje $\boldsymbol{\varphi}(x)$ i $\boldsymbol{\psi}(t)$ są wektorami odpowiednio n i r składowymi, \mathbf{M} jest macierzą prostokątną $n \times r$, r jest równe ilości charakterystyk wychodzących z punktu $(x_0, 0)$ w obszar \mathcal{Q} .

Metoda bezpośredniego całkowania polega na pewnym przekształceniu związków wzdłuż charakterystyk układu równań (6.1). Do związków tych można dojść, podobnie jak w metodzie Couranta, mnożąc układ równań (6.1) przez macierz \mathbf{L} lewych wektorów własnych macierzy \mathbf{A} (i -ty wiersz w macierzy \mathbf{L} złożony jest ze składowych i -tego wektora własnego \mathbf{l}). W przypadku prawie-liniowego układu równań (6.1) otrzymujemy

$$(6.3) \quad \mathbf{D}\mathbf{W} = -\mathbf{L}\mathbf{B} - (\mathbf{D}\mathbf{L})\mathbf{L}^{-1}\mathbf{W},$$

gdzie $\mathbf{W} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, a \mathbf{D} jest macierzą diagonalną $n \times n$ z wielkościami $d^i = \partial/\partial t + \lambda^i \partial/\partial x$ na diagonalu. Układ (6.3) jest układem n równań różniczkowych zwyczajnych, przy czym i -te równanie tego układu jest spełnione wzdłuż i -tej charakterystyki układu (6.1).

Niech $P = P(x, t)$ będzie dowolnym wewnętrznym punktem obszaru \mathcal{Q} . Z punktu tego wychodzi n charakterystyk. Niech $P_i = P_i(x_i, t_i)$ będzie punktem przecięcia i -tej charakterystyki, wychodzącej z punktu P , z krzywą $t = t(x)$ lub z prostą $x = x_0$.

Rozważmy układ równań (6.3) w punkcie P . W naszym przypadku każde z równań (6.3) można napisać następująco:

$$(6.4) \quad \frac{dw^i(P)}{dt} = R(t)w^i(P) + S(t, u^1(P), u^2(P), \dots, u^n(P)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rozwiązanie równania (6.4) ma postać

$$(6.5) \quad w^i(P) = \exp \left[\int_{t_i}^t R(z) dz \right] \left\{ \int_{t_i}^t S(z, u^j(z)) \exp \left[- \int_{t_i}^z R(s) ds \right] dz + w^i(P_i) \right\}.$$

Funkcję (6.5) zastępujemy wyrażeniem

$$(6.6) \quad w^i(P) = S(t, u^j(P)) \frac{t-t_i}{2} + \exp \left[\int_{t_i}^t R(z) dz \right] \left[S(t_i, u^j(P_i)) \frac{t-t_i}{2} + w^i(P_i) \right],$$

otrzymanym przez aproksymację całki (6.5), której funkcja podcałkowa zależy od nieznanymi wielkości u^j , za pomocą metody trapezów.

Zauważmy, że funkcje S i $w^i = \mathbf{l}^i \mathbf{U}$ są liniowe względem u^j . Po uzyskaniu zatem wzorów (6.6) dla $i = 1, 2, \dots, n$ i uporządkowaniu ich względem u^j ($j = 1, 2, \dots, n$) otrzymujemy w punkcie P układ n równań algebraicznych dla składowych wektora

U w zależności od znanych ich wartości w punktach P_i , wziętych ze związków (6.2). Wyrażenie (6.6) daje aproksymację funkcji (6.5) rzędu $o(k^2)$, gdzie $k = t - t_i$.

Przy obliczeniach numerycznych obszar Q pokrywamy odpowiednią siatką utworzoną z charakterystyk. Wtedy, aby uzyskać przybliżone rozwiązanie problemu (6.1)–(6.2), w każdym punkcie siatki rozwiązujemy układ n równań algebraicznych (6.6), przy czym jako punkty P_i traktujemy odpowiednie sąsiednie punkty siatki, w których rozwiązanie jest już znane.

7. Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk

Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk może być stosowana do rozwiązywania hiperbolicznych układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o dwu zmiennych niezależnych postaci

$$(7.1) \quad U_t + AU_x + B = 0,$$

gdzie $U = U(x, t)$ jest nieznanym wektorem o n składowych, macierz $A = A(x, t, U)$ jest macierzą kwadratową $n \times n$ i posiada n rzeczywistych wartości własnych λ^i oraz n liniowo niezależnych lewych wektorów własnych I^i , a $B = B(x, t, U)$ jest wektorem o n składowych.

Rozpatrzmy przypadek, gdy (7.1) jest prawie-liniowym układem równań. Wtedy $A = A(x, t)$. Niech obszar $Q = \{(x, t) : x_0 \leq x \leq \theta(t), t(x) \leq t \leq \vartheta(x)\}$ będzie ograniczony prostą $x = x_0$, gładką krzywą $t = t(x)$ oraz dwiema granicznymi charakterystykami o równaniach $x = \theta(t)$, $t = \vartheta(x)$, wychodzącymi z ustalonego punktu (x^0, t^0) , gdzie $x^0 > x_0$, $t^0 > 0$. W obszarze Q rozpatrzmy zagadnienie graniczne dla układu równań (7.1) z warunkami

$$(7.2) \quad \begin{aligned} U(x, t(x)) &= \varphi(x) & \text{na krzywej} & \quad t = t(x), \\ MU(x_0, t) &= \psi(t) & \text{na prostej} & \quad x = x_0, \end{aligned}$$

przy czym wektory $\varphi(x)$ i $\psi(t)$ są dane. Wszystkie rozważane wielkości są funkcjami ciągłymi. Funkcje $\varphi(x)$, $\psi(t)$ są wektorami odpowiednio o n i r składowych, M jest macierzą prostokątną $n \times r$ oraz r jest równe ilości charakterystyk wychodzących z punktu $(x_0, 0)$ w obszar Q .

Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk polega na sprowadzeniu układu (7.1) do równoważnego układu równań różniczkowych zwyczajnych, w którym każde z równań jest spełnione wzdłuż jednej z charakterystyk układu (7.1), a następnie zastąpienie tych równań różniczkowych równaniami różnicowymi. Do związków wzdłuż charakterystyk możemy dojść, podobnie jak w metodzie Couranta oraz w metodzie bezpośredniego całkowania, mnożąc układ równań (7.1) przez macierz L lewych wektorów własnych macierzy A (i -ty wiersz macierzy L złożony jest ze składowych i -tego wektora własnego I^i). W przypadku prawie-liniowego układu równań (7.1) otrzymujemy

$$(7.3) \quad DW = -LB - (DL)L^{-1}W,$$

gdzie $\mathbf{W} = \mathbf{LU}$, a \mathbf{D} jest macierzą diagonalną $n \times n$ z wielkościami $d^i = \partial/\partial t + \lambda^i (\partial/\partial x)$ na diagonalach.

Niech $P = P(x, t)$ będzie dowolnym wewnętrznym punktem obszaru \bar{Q} . Z punktu tego wychodzi n charakterystyk. Niech $P_i = P_i(x_i, t_i)$ będzie punktem przecięcia i -tej charakterystyki wychodzącej z punktu P , z krzywą $t = t(x)$ lub z prością $x = x_0$.

Rozważmy układ równań (7.3) w punktach P_i . Każde z nich można napisać w postaci

$$(7.4) \quad \frac{dw^i(P_i)}{dt} = f(\mathbf{W}(P_i), x_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zastępując pochodne wzdłuż charakterystyki ilorazem różnicowym

$$(7.5) \quad \frac{w^i(P) - w^i(P_i)}{t - t_i} = f(\mathbf{W}(P_i), x_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

otrzymujemy układ n równań algebraicznych, z którego znajdujemy przybliżone rozwiązanie $\mathbf{W}(P)$ w punkcie P .

Przy obliczeniach numerycznych obszar Q pokrywamy dostatecznie gęstą siatką charakterystyk. Aby otrzymać przybliżone rozwiązanie problemu (7.1)–(7.2) w każdym punkcie siatki rozwiązujemy układ równań algebraicznych (7.5), przy czym jako punkty P_i traktujemy odpowiednie sąsiednie punkty siatki.

Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk jest na ogół znana. W przypadku quasi-liniowego układu (7.1), gdy $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, t, \mathbf{U})$ i równania charakterystyk są uzależnione od rozwiązania, sposób postępowania jest bardziej skomplikowany. Stosowana jest wtedy zazwyczaj metoda Massou. Jej opis można znaleźć w szeregu prac m.in. w pracach [3, 42 i 70]. Dotychczas nie wykazano jeszcze, iż metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyki zapewnia zbieżność przybliżonego rozwiązania do rozwiązania ścisłego układu równań (7.1).

8. Przykład

Rozpatrzmy jako przykład problem rozprzestrzeniania się cylindrycznej fali ścinania w jednorodnym ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym z liniową funkcją lepkości. Problem ten opisuje prawie-liniowy układ dwu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego. W ortogonalnym układzie współrzędnych r, t ma on postać [50]

$$(8.1) \quad \begin{bmatrix} \tau_t \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_r \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \left[\frac{v}{r} + 2\gamma \left(\frac{\tau}{\kappa} - 1 \right) \right] \\ -\frac{2}{r} \frac{\tau}{\rho} \end{bmatrix} = 0.$$

Na brzegu $r = r_0$ dane jest naprężenie

$$(8.2) \quad \tau(r_0, t) = p(t) = 6\kappa(1 - 10^6 t),$$

a na charakterystyce $r = r_0 + ct$ naprężenie i prędkość

$$(8.3) \quad \begin{bmatrix} \tau \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{c\varrho\gamma}{\kappa}(r_0 - r)\right] \left\{ \gamma\varrho c \int_{r_0}^r \left(\frac{\xi}{r_0}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{c\varrho\gamma}{\kappa}(\xi - r_0)\right] d\xi + 6\kappa \right\} \\ - \frac{c}{\mu} \tau \end{bmatrix},$$

przy czym warunki (8.3) otrzymano z dynamicznego związku zgodności. Szukanymi wielkościami są naprężenie ścinające τ i prędkość v ; ϱ oznacza gęstość, μ moduł sprężystego ścinania, γ jest współczynnikiem lepkości, a κ granicą plastyczności dla prostego ścinania. Rozpatrywany jest tylko proces obciążania.

Charakterystykami układu (8.1) są dwie rodziny prostych $r = r_0 \pm ct + \text{const}$, gdzie $c = (\mu/\varrho)^{1/2}$. Związki wzdłuż charakterystyk mają postać

$$(8.4) \quad -\frac{dv}{dr} \pm \frac{2}{\mu r} c\tau + 2\gamma \left(\frac{\tau}{\kappa} - 1\right) + \frac{v}{r} \pm \frac{c}{\mu} \frac{d\tau}{dr} = 0.$$

Problem (8.1)–(8.3) można rozwiązać czterema metodami opisanymi w p. 3, 5, 6 i 7: metodą iteracyjną Couranta, metodą różnic skończonych wzdłuż charakterystyk, metodą bezpośredniego całkowania oraz metodą wykorzystującą funkcję Riemanna. W pierwszych trzech metodach rozpatrywany obszar $Q \{(r, t) : r_0 \leq r \leq r_0 - ct + \text{const}, (r - r_0)/c \leq t \leq [(r - r_0)/c] + \text{const}\}$ pokrywamy siatką charakterystyk (rys. 1). Rozwiązanie w dowolnym wewnętrznym punkcie $P(r^*, t^*)$ obszaru Q znajdujemy w zależności od znanych już rozwiązań w sąsiednich punktach siatki: $P_1(r_1, t_1)$ leżącego na charakterystyce $r = r^* + c(t - t^*)$ i $P_2(r_2, t_2)$ leżącego na prostej $r = r^* - c(t - t^*)$.

a) Metoda Couranta. Zgodnie z oznaczeniami w (3.1)

$$(8.5) \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tau \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\varrho} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu \left[\frac{v}{r} + 2\gamma \left(\frac{\tau}{\kappa} - 1 \right) \right] \\ -\frac{2}{\varrho} \frac{\tau}{r} \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A} wynoszą $\lambda^{1,2} = \pm(\mu/\varrho)^{1/2} = \pm c$, a jej lewe wektory własne

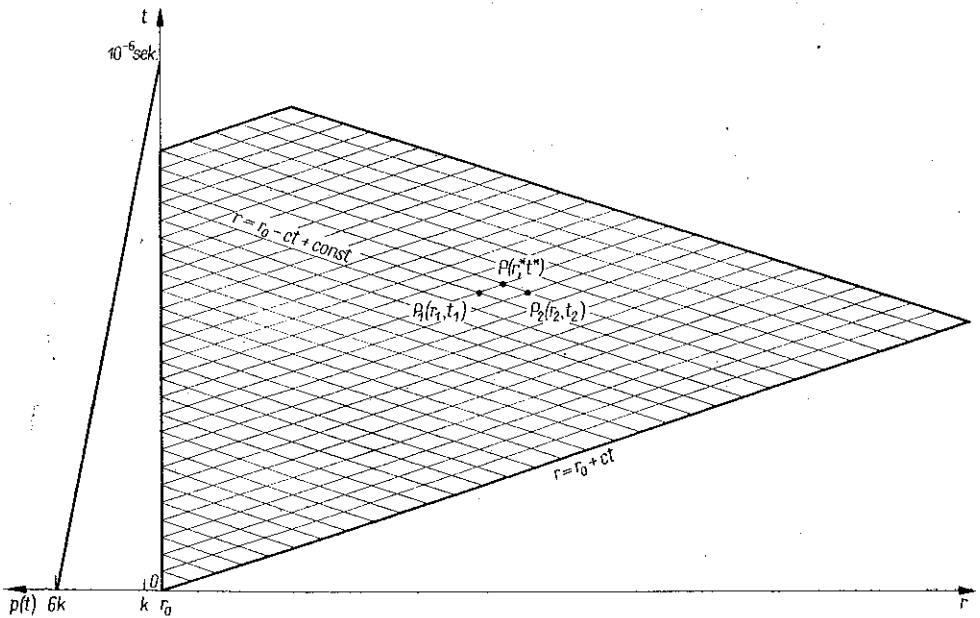
$$(8.6) \quad \mathbf{l}^i = \begin{bmatrix} -\frac{c}{\mu} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}^2 = \begin{bmatrix} \frac{c}{\mu} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mnożąc (8.1) przez wektory (8.6) i wprowadzając nowe funkcje

$$(8.7) \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{\mu} \tau + v \\ \frac{c}{\mu} \tau + v \end{bmatrix}$$

otrzymujemy układ równań

$$(8.8) \quad DW = \begin{bmatrix} d^1 w^1 \\ d^2 w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \left[w^1 \left(\frac{1}{2r} + \beta \right) - w^2 \left(\frac{3}{2r} + \beta \right) + 2\gamma \right] \\ -c \left[w^1 \left(\frac{3}{2r} - \beta \right) - w^2 \left(\frac{1}{2r} - \beta \right) - 2\gamma \right] \end{bmatrix},$$



Rys. 1

gdzie $d^{1,2} = \partial/\partial t + \lambda^{1,2} \partial/\partial x$, $\beta = \rho c \gamma / \kappa$. Pierwsze równanie zachodzi wzdłuż charakterystyk $r = r_0 + ct + \text{const}$, drugie zaś wzdłuż charakterystyk $r = r_0 - ct + \text{const}$. Wektor W spełnia warunki

$$(8.9) \quad \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}_{t = \frac{1}{c}(r-r_0)} = \begin{bmatrix} w^2(r_0, t) = w^1(r_0, t) + \frac{12 \kappa (1 - 10^6 t) c}{\mu} \\ -2 \frac{c}{\mu} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/2} \exp[\beta(r_0 - r)] \left\{ 6\kappa + \rho c \gamma \int_{r_0}^r \left(\frac{z}{r_0} \right)^{1/2} \exp[\beta(z - r_0)] dz \right\} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązania w wewnętrznym punkcie $P(r^*, t^*)$ obszaru Q szukamy za pomocą następujących wzorów iteracyjnych:

$$(8.10) \quad w_{n+1}^1(r^*, t^*) = -c \int_{t_1}^{t^*} \left\{ w_n^1(r^* + cz - ct^*, z) \left[\frac{1}{2[r^* + c(z - t^*)]} + \beta \right] - \right. \\ \left. - w_n^2(r^* + cz - ct^*, z) \left[\frac{3}{2[r^* + c(z - t^*)]} + \beta \right] + 2\gamma \right\} dz + w_0^1,$$

$$w_{n+1}^2(r^*, t^*) = -c \int_{t_2}^{t^*} \left\{ w_n^1(r^* + cz - ct^*, z) \left[\frac{3}{2[r^* - c(z - t^*)]} - \beta \right] - \right. \\ \left. - w_n^2(r^* + ct^* - cz, z) \left[\frac{1}{2[r^* - c(z - t^*)]} - \beta \right] - 2\gamma \right\} dz + w_0^2,$$

przy czym za zerowe iteracje w_0^i przyjmujemy odpowiednie składowe rozwiązania w punktach P_i ($i = 1, 2$). Wzory (8.10) pozwalają znaleźć przybliżone rozwiązanie zbieżne do rozwiązania ścisłego klasy C_Q^1 układu równań (8.8), jeżeli

$$(8.11) \quad \|W_{n+1} - W_n\| \leq 2k \|F_w\| \|W_n - W_{n-1}\|$$

oraz

$$(8.12) \quad 2k \|F_w\| < 1,$$

gdzie wektor F , to prawa strona równań (8.8), $k = t - t_1 = t - t_2$. Z (8.12) mamy

$$(8.13) \quad k < \frac{r_0^2}{c(2\beta r_0^2 + 3r_0 + 3)}.$$

W warunku (8.11) nie odgrywają roli zerowe iteracje rozwiązania występujące w (8.10). Wobec tego związki (8.10) pozwalają znaleźć w dowolnym punkcie siatki pokrywającej obszar Q przy spełnionej nierówności (8.13), rozwiązanie przybliżone równań (8.8), zbieżne do rozwiązania ścisłego klasy C_Q^1 . Przy numerycznym rozwiązywaniu problemu (8.8)–(8.9) w każdym punkcie $P(r^*, t^*)$ liczono trzy iteracje: zerową, pierwszą i drugą. Wzory można znaleźć w pracy [51]. Po obliczeniu W naprężenie i prędkość znajdujemy z równości

$$(8.14) \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tau \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{c} \frac{w^2 - w^1}{2} \\ \frac{w^1 + w^2}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Metoda bezpośredniego całkowania. Napiszmy związki wzdłuż charakterystyk (8.8) w postaci

$$(8.15) \quad \frac{d}{dr}(T - v) = \frac{1}{r}(T - v) - T \left(\frac{3}{r} + 2\beta \right) + 2\gamma, \\ \frac{d}{dr}(T + v) = \frac{1}{r}(T + v) + T \left(2\beta - \frac{3}{r} \right) - 2\gamma,$$

gdzie $T = c\tau/\mu$, $\beta = \rho c\gamma/\varkappa$. Każde z warunków (8.15) ma postać następującego równania różniczkowego:

$$(8.16) \quad z'(r) = \frac{1}{r} z(r) + f(r, T(r))$$

o rozwiązaniu

$$(8.17) \quad z(r) = Cr + r \int \frac{1}{r} f(r, T(r)) dr.$$

Przekształcając (8.15) przy wykorzystaniu (8.17), aproksymując przy tym nierozwiązalne całki metodą trapezów, otrzymujemy układ dwu równań algebraicznych dla rozwiązania w punkcie $P(r^*, t^*)$ siatki charakterystyk, pokrywającej obszar Q :

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \tau^* \frac{c}{\mu} \left[1 + \left(\beta + \frac{3}{2r^*} \right) (r^* - r_1) \right] - v^* &= \frac{\tau_1 \frac{c}{\mu} - v_1}{r_1} r^* + \\ &+ 2\gamma r^* \ln \frac{r^*}{r_1} - \frac{r^*}{2r_1} \left(\frac{3}{r_1} + 2\beta \right) (r^* - r_1) \tau_1 \frac{c}{\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^* \frac{c}{\mu} \left[1 + \left(\frac{3}{2r^*} - \beta \right) (r^* - r_2) \right] + v^* &= \frac{\tau_2 \frac{c}{\mu} + v_2}{r_2} r^* - \\ &- 2r^* \gamma \ln \frac{r^*}{r_2} + \frac{r^*}{r_2} \tau_2 \frac{c}{\mu} \left(\beta - \frac{3}{2r_2} \right) (r^* - r_2). \end{aligned}$$

c) Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk. Rozwiązanie w punkcie $P(r^*, t^*)$ siatki pokrywającej obszar Q znajdujemy rozwiązując układ dwu następujących równań

$$(8.19) \quad \begin{aligned} \frac{c}{\mu} \tau^* - v^* + v_1 \left(1 - \frac{r^* - r_1}{r_1} \right) + \frac{c}{\mu} \tau_1 \left(2 \frac{r^* - r_1}{r_1} - 1 \right) + \\ + 2\gamma \left(\frac{\tau_1}{\varkappa} - 1 \right) (r^* - r_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\mu} \tau^* + v^* - v_2 \left(1 - \frac{r^* - r_2}{r_2} \right) + \frac{c}{\mu} \tau_2 \left(2 \frac{r^* - r_2}{r_2} - 1 \right) - \\ - 2\gamma \left(\frac{\tau_2}{\varkappa} - 1 \right) (r^* - r_2) = 0. \end{aligned}$$

Równania (8.19) zostały otrzymane z równań (8.4) po zastąpieniu pochodnych ilorazami różnicowymi.

d) Metoda z funkcją Riemanna. Problem (8.1)–(8.3) rozprzestrzeniania się cylindrycznej fali ścinania można sprowadzić do rozwiązania jednego równania różnic-

kowego cząstkowego drugiego rzędu, określonego w obszarze $Q_1 \{(x, y) : y \leq x \leq x_0 + x_1, 0 \leq y \leq x_0\}$, gdzie x_0, x_1 są dodatnimi stałymi. Równanie to ma postać

$$(8.20) \quad \tau_{xy} + a(x, y) \tau_x + b(x, y) \tau_y + c(x, y) \tau = 0,$$

przy czym

$$a(x, y) = -\frac{c}{2} \left[\frac{1}{2r_0 + c(x-y)} - \frac{c\gamma\varrho}{\kappa} \right],$$

$$b(x, y) = \frac{c}{2} \left[\frac{1}{2r_0 + c(x-y)} + \frac{c\gamma\varrho}{\kappa} \right],$$

$$c(x, y) = 4c^2 [2r_0 + c(x-y)]^{-2}$$

z warunkami

$$(8.21) \quad \tau(x, 0) = \sigma(x), \quad \tau(y, y) = 6\kappa(1 - 10^6 y) = p(y),$$

gdzie

$$(8.22) \quad \sigma(x) = \left(1 + \frac{cx}{2r_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\varrho \frac{c^2}{2} \frac{\gamma}{\kappa} x\right) \left\{ 6\kappa + \varrho c\gamma \int_{r_0}^{r_0 + \frac{\varrho}{2}x} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} \exp\left[\varrho c \frac{\gamma}{\kappa} (r - r_0)\right] dr \right\}.$$

Przy rozwiązywaniu problemu (8.20)–(8.21) opieramy się głównie na pracy G. MAJCHEROWEJ [44]. Ograniczamy się zatem do obszaru $Q_2 \{(x, y) : y \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq x_0\}$. Rozwiązaniem zagadnienia Darboux, określonym w pozostałej części obszaru Q_1 , zajmować się nie będziemy.

Aby rozwiązać problem (8.20)–(8.21) znajdujemy najpierw funkcję Riemanna dla równania (8.20). Szukamy jej w postaci szeregu (por. [46])

$$(8.23) \quad V(s, z; x, y) = V_0(s, z; x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(s, z; x, y),$$

gdzie

$$(8.24) \quad V_0(s, z; x, y) = -1 + \exp\left\{\int_z^y \frac{c}{2} \left[\frac{1}{2r_0 + c(s-v)} - \frac{c\gamma\varrho}{\kappa} \right] dv\right\} + \\ + \exp\left\{-\frac{c}{2} \int_s^x \left[\frac{1}{2r_0 + c(v-z)} + \frac{c\gamma\varrho}{\kappa} \right] dv\right\},$$

$$V_n(s, z; x, y) = \int_s^x \int_z^y \left\{ \frac{c}{2} \left[\frac{1}{2r_0 + c(v-\omega)} - \frac{c\gamma\varrho}{\kappa} \right] \frac{\partial V_{n-1}(s, z; v, \omega)}{\partial v} - \right. \\ \left. - \frac{c}{2} \left[\frac{1}{2r_0 + c(v-\omega)} + \frac{c\gamma\varrho}{\kappa} \right] \frac{\partial V_{n-1}(s, z; v, \omega)}{\partial \omega} - \right. \\ \left. - 4c^2 [2r_0 + c(v-\omega)]^{-2} V_{n-1}(s, z; v, \omega) \right\} dv d\omega.$$

Rozwiązanie problemu (8.20)–(8.21) wyraża się wtedy wzorem (por. [44])

$$(8.25) \quad \tau(x, y) = \tau(0, 0) V(0, 0; x, y) + \int_0^y \Omega(s) V(x_0, s; x, y) ds + \int_y^x \psi(z) V(z, z; x, y) dz,$$

przy czym funkcje $\Omega(y)$ i $\psi(x)$ są tak określone, aby rozwiązanie (8.25) spełniało warunki graniczne. To prowadzi przy założeniu, że funkcje $V(0, 0; x, 0)$, $V(z, z; x, 0)$, $V(0, 0; y, y)$ i $V(x_0, s; y, y)$ są różniczkowalne odpowiednio względem x i y oraz, gdy $V(x, x; x, 0) \neq 0$ i $V(x_0, y; y, y) \neq 0$, do dwu równań Voltery drugiego rodzaju

$$(8.26) \quad \begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^x N(z, x) \psi(z) dz + g(x), \\ \Omega(y) &= \int_0^y M(s, y) \Omega(s) ds + h(y), \end{aligned}$$

gdzie

$$(8.27) \quad \begin{aligned} N(z, x) &= -\frac{\partial V(z, z; x, 0)/\partial x}{V(x, x; x, 0)}, & g(x) &= \frac{\sigma'(x) - \tau(0, 0)V'(0, 0; x, 0)}{V(x, x; x, 0)}, \\ M(s, y) &= -\frac{\partial V(x_0, s; y, y)/\partial y}{V(x_0, y; y, y)}, & h(y) &= \frac{p'(y) - \tau(0, 0)V'(0, 0; y, y)}{V(x_0, y; y, y)}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równań całkowych (8.26) ma postać

$$(8.28) \quad \begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} N_n(z, x) \right] g(z) dz + g(x), \\ \Omega(y) &= \int_0^y \left[\sum_{n=0}^{\infty} M_n(s, y) \right] h(s) ds + h(y), \end{aligned}$$

przy czym funkcje $N_n(z, x)$ i $M_n(s, y)$ otrzymuje się według następujących wzorów rekurencyjnych:

$$(8.29) \quad \begin{aligned} N_0(z, x) &= N(z, x), & N_n(z, x) &= \int_z^x N(s, x) N_{n-1}(z, s) ds, \\ M_0(s, y) &= M(s, y), & M_n(s, y) &= \int_s^y M(z, y) M_{n-1}(s, z) dz. \end{aligned}$$

9. Porównania i dyskusja

Spśród pięciu opisanych w p. 3–7 metod rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego o dwu zmiennych niezależnych — trzy metody bezpośrednio wykorzystują związki wzdłuż charakterystyk rozpatrywanego układu równań. Należą do nich: metoda iteracyjna Couranta, metoda bezpośredniego całkowania oraz metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk. Stosując te metody, numerycznego rozwiązania szukamy w punktach

siatki pokrywającej obszar, utworzonej przez rodziny charakterystyk. W metodzie Kellera-Thomégo obszar pokryty jest siatką prostokątną. Pozostałe metody, tzn. metody iteracyjne, opisane w p. 5, mogą być stosowane do rozwiązywania tylko takich układów hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, które sprowadzają się do równań różniczkowych drugiego rzędu. Metody te pozwalają otrzymywać rozwiązanie bezpośrednio w konkretnym punkcie obszaru, tzn. nie wymagają znajomości rozwiązania w szeregu punktach obszaru po to, by znaleźć rozwiązanie w danym punkcie.

Metoda Kellera-Thomégo może być wykorzystywana do rozwiązania problemów początkowo-brzegowych z dwoma brzegami dla liniowych, prawie-liniowych i quasi-liniowych układów równań. Proponowany schemat różnicowy (4.4) przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych (4.1) jest schematem niebezpośrednim. Daje on aproksymację wyjściowego układu równań (4.1) rzędu $o(k)$. Metoda ta charakteryzuje się bezwzględną statecznością, co wykazano w pracy [28], tzn. że układ równań (4.4) jest stateczny niezależnie od wymiarów oczek siatki pokrywającej interesujący nas obszar. Stateczność aproksymującego równania różniczkowego schematu różnicowego pociąga za sobą zbieżność przybliżonego rozwiązania do rozwiązania ścisłego układu równań różniczkowych (4.1).

W punkcie 3 wykazano możliwość zastosowania iteracyjnej metody Couranta do rozwiązywania granicznych problemów (3.2) dla prawie-liniowych układów równań (3.1). Metoda ta może być również użyta w przypadku pewnych zagadnień dla quasi-liniowych układów hiperbolicznych równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu z dwiema zmiennymi niezależnymi [12]. Udowodniono, że przybliżone rozwiązanie, otrzymane za pomocą wzorów (3.14), jest zbieżne do rozwiązania ścisłego układu równań (3.1), gdy spełniony jest warunek (3.3)₄. Wykorzystując tę metodę można by, podobnie jak w przypadku iteracyjnych metod opisanych w p. 5, szukać rozwiązania w konkretnym punkcie obszaru, gdyż wzory iteracyjne (3.14) dają rozwiązanie w zależności od danych granicznych. Jednakże w metodzie Couranta bazujemy na związkach wzdłuż charakterystyk układu równań (3.1). Pozwala to (po podzieleniu rozważanego obszaru charakterystykami) szukać rozwiązań w punktach siatki wykorzystując obliczone już rozwiązania w sąsiednich punktach siatki. Fakt, że odległość między danym punktem obszaru a sąsiednimi punktami siatki jest mniejsza od odległości tego punktu od krzywych ograniczających obszar, pozwala na uzyskanie dokładniejszego rozwiązania przy tej samej liczbie iteracji. Ilość liczonych w każdym punkcie iteracji ma istotne znaczenie przy tej metodzie. Wykorzystywanie wyższych iteracji jest równoznaczne z operowaniem bardziej skomplikowanymi wyrażeniami analitycznymi, co wpływa na przedłużenie czasu wykonywania obliczeń numerycznych.

Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk ma stosunkowo szerokie zastosowanie. Można ją stosować w przypadku liniowych, prawie-liniowych i quasi-liniowych układów równań. Równania różnicowe tej metody aproksymują związki wzdłuż charakterystyk z dokładnością rzędu $o(k)$.

Metoda bezpośredniego całkowania może być stosowana przy rozwiązywaniu liniowych i niektórych prawie-liniowych układów równań różniczkowych cząstko-

wych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego. Daje ona aproksymację związków wzdłuż charakterystyk rzędu $o(k^2)$.

Opisane metody porównano na przykładzie propagacji cylindrycznej fali ścinania w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym z liniową funkcją lepkości. Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania problemu (8.1)–(8.3). Okazało się, że problem (8.1)–(8.3) można rozwiązać za pomocą czterech metod: metody iteracyjnej Couranta, metody wykorzystującej funkcję Riemanna, metody bezpośredniego całkowania oraz metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk. Wzory zostały podane w p. 8. Metoda Kellera-Thomégo okazała się w tym przypadku nieprzydatna. Nie obejmuje ona problemu granicznego, do którego sprowadza się rozwiązanie zagadnienia rozprzestrzeniania się cylindrycznej fali ścinania: wyklucza możliwość postawienia warunków na linii charakterystycznej, a wymaga natomiast określenia warunków na dwu brzegach.

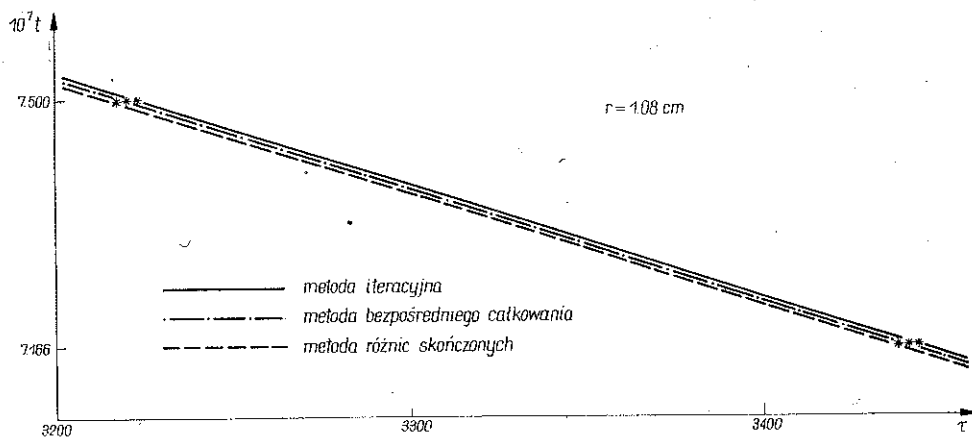
Obliczeń numerycznych dla problemu (8.1)–(8.3) dokonano dla miękkiej stali przyjmując gęstość $\rho = 7,8 \cdot 10^{-8}$ kGcm $^{-2}$, moduł sprężystego ścinania $\mu = 0,82 \cdot 10^6$ kG cm $^{-2}$, współczynnik lepkości $\gamma = 250$ s $^{-1}$, granicę plastyczności dla prostego ścinania $\kappa = 1180$ kGcm $^{-2}$, $r_0 = 1$ cm. Wyniki dla podziału odcinka czasu $(0, 10^{-6}$ s) na 30 części umieszczono w tablicach 1 i 2. W tablicy 1 podano wartości naprężenia ścinającego i prędkości na prostej $r = 1,08$ cm, a w tablicy 2 wartości naprężeń i prędkości na prostej $t = 2,333 \cdot 10^{-7}$ s. Liczbowe wyniki dla naprężeń i prędkości na innych prostych, dla takiego samego i dwukrotnie gęstszego podziału odcinka $(0, 10^{-6}$ s), można znaleźć w pracy [52].

W trakcie wykonywania obliczeń numerycznych okazało się, że metoda wykorzystująca funkcję Riemanna w porównaniu z pozostałymi metodami użytymi do rozwiązania problemu propagacji cylindrycznej fali ścinania (8.1)–(8.3) jest bardzo niewygodna. Pierwszą trudność sprawiała nieznanomość funkcji Riemanna dla równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu (8.20). Szukano jej w postaci szeregu (8.23) opierając się na pracy [46]. Znajdywanie wartości funkcji $\psi(x)$ i $\Omega(y)$, występujących we wzorze (8.25), określającym rozwiązanie równania (8.20), również wymagało długiego czasu pracy maszyny matematycznej. Należy nadmienić, że program obliczeń numerycznych w przypadku tej metody był bardziej skomplikowany aniżeli przy pozostałych trzech metodach. Po zorientowaniu się, że uzyskanie rozwiązania zaledwie w kilku punktach obszaru za pomocą tej metody wymaga kilkakrotnie dłuższego czasu od czasu potrzebnego do otrzymania wyników we wszystkich punktach siatki obszaru \bar{Q} przy wykorzystaniu pozostałych metod, zrezygnowano z rezultatów numerycznych metody z funkcją Riemanna.

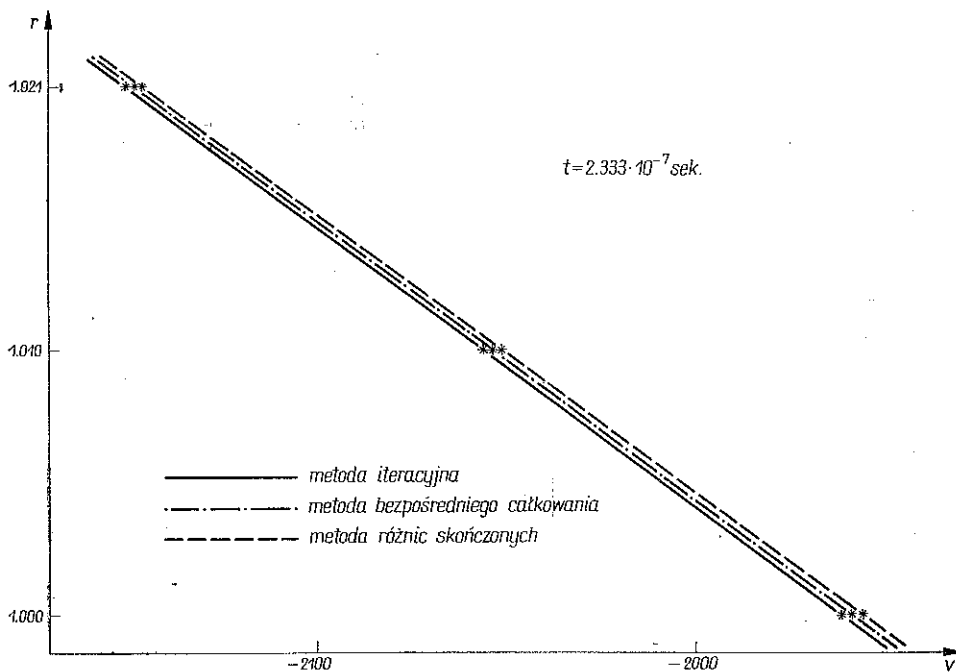
Jeżeli chodzi o wyniki numeryczne uzyskane za pomocą metody iteracyjnej Couranta, metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk i metody bezpośredniego całkowania, to tablice 1 i 2 oraz rys. 2a i 2b wskazują na ich dobrą zgodność. Maksymalne różnice pomiędzy danymi liczbowymi otrzymanymi przy zastosowaniu metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk i bezpośredniego całkowania a metody Couranta względem wyników metody Couranta, wynoszą odpowiednio około 3% i 1,5%.

Wśród tych trzech metod wyróżnia się metoda iteracyjna Couranta. Dla niej istnieje dowód zbieżności przybliżonego rozwiązania do rozwiązania ścisłego problemu (8.1)–(8.3) propagacji cylindrycznej fali ścinania. Warunkiem wystarczającym zbieżności uzyskanego rozwiązania do rozwiązania klasy E_Q^1 równań (8.1) jest zachowanie nierówności (8.11) i (8.12). W naszym przypadku sprowadzają się one do warunku

$$(9.1) \quad 2k = 2\Delta t_1 = \Delta t < 10^{-6} \text{ s.}$$



Rys. 2a



Rys. 2b

Tablica 1

$10^7 t$	$\Delta t = 3.333 \cdot 10^{-8} \text{ s}$					
	Metoda Couranta		Metoda bezpośredniego całkowania		Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk	
	τ	v	τ	v	τ	v
$r = 1.08 \text{ cm}$						
2.500	6569.2	-2597.5	6569.2	-2597.5	6569.2	-2597.5
2.833	6345.7	-2483.4	6340.9	-2480.9	6342.9	-2482.1
	6345.5	-2483.4				
3.166	6119.9	-2369.8	6115.0	-2366.6	6117.1	-2368.0
	6119.7	-2369.8				
3.500	5894.6	-2257.5	5889.6	-2253.6	5891.8	-2255.4
	5894.4	-2257.5				
3.833	5669.8	-2146.6	5664.6	-2142.0	5666.9	-2144.2
	5669.6	-2146.6				
4.166	5445.3	-2037.0	5440.1	-2031.8	5442.4	-2034.3
	5445.2	-2037.0				
4.500	5221.3	-1928.8	5215.9	-1922.9	5218.4	-1925.7
	5221.2	-1928.8				
4.833	4997.7	-1821.8	4992.2	-1815.3	4994.8	-1818.4
	4997.6	-1821.8				
5.166	4774.5	-1716.1	4769.0	-1709.0	4771.5	-1712.4
	4774.4	-1716.1				
5.500	4551.8	-1611.7	4546.1	-1603.9	4548.7	-1607.6
	4551.6	-1611.7				
5.833	4329.4	-1508.5	4323.6	-1500.0	4326.3	-1504.1
	4329.2	-1508.5				
6.166	4107.3	-1406.4	4101.5	-1397.4	4104.2	-1401.8
	4107.2	-1406.4				
6.500	3885.7	-1305.6	3879.8	-1295.9	3882.5	-1300.6
	3885.6	-1305.6				
6.833	3664.4	-1205.8	3658.4	-1195.6	3661.3	-1200.6
	3664.3	-1205.8				
7.166	3443.6	-1107.2	3437.5	-1096.5	3440.4	-1101.7
	3443.5	-1107.2				
7.500	3223.0	-1009.8	3216.9	-998.4	3219.8	-1004.0
	3222.9	-1009.8				

W trakcie obliczeń numerycznych był on spełniony, gdyż $\Delta t = 10^{-7/3}$ s lub $\Delta t = 10^{-7/6}$ s. Należy podkreślić, że w nierówności (8.11), która jest warunkiem zwięzania się procesu iteracyjnego, nie występują zerowe iteracje rozwiązania. Ponieważ jako zerowe iteracje przy obliczeniach numerycznych przyjmuje się znane już rozwiązania w sąsiednich punktach siatki, spełnienie warunku (8.11) i (8.12) zapewnia zbieżność rozwiązania w każdym punkcie siatki pokrywającej obszar Q .

Tablica 2

$\Delta r = 0.0053$ cm						
r	Metoda Couranta		Metoda bezpośredniego całkowania		Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk	
	τ	v	τ	v	τ	v
$t = 2.3333 \cdot 10^{-7}$						
1.000	5428.0	-1961.8	5428.0	-1956.7	5428.0	-1959.3
1.010	5600.9	-2056.4	5600.3	-2051.7	5600.7	-2054.0
1.021	5772.1	-2150.2	5770.8	-2146.0	5771.5	-2148.1
1.031	5941.5	-2243.4	5939.5	-2239.8	5940.5	-2241.5
1.042	6109.3	-2336.1	6106.6	-2333.0	6107.9	-2334.5
1.053	6275.5	-2428.3	6272.2	-2425.0	6273.7	-2426.9
1.063	6440.2	-2519.9	6436.5	-2517.8	6438.1	-2518.8
1.074	6601.3	-2610.2	6601.3	-2610.2	6601.3	-2610.2

W pracy obliczano trzy iteracje rozwiązania: zerową, pierwszą i drugą. Otrzymywanie więcej niż dwu iteracji znacznie przedłuża czas pracy maszyny matematycznej w porównaniu z czasem uzyskiwania danych dla dwu pozostałych metod. Jednakże dla dostatecznie gęstej siatki podziału obszaru Q można poprzestać na zerowej i pierwszej iteracji. W tablicy 1 umieszczono dane liczbowe dla pierwszego i drugiego przybliżenia. Zauważamy, że obie iteracje różnią się maksymalnie za ledwie o około 0,05%.

Metody bezpośredniego całkowania i różnic skończonych wzdłuż charakterystyk nie posiadają tak formalnych podstaw jak metoda iteracyjna Couranta. Dotychczas jeszcze nie wykazano zbieżności otrzymywanego za ich pomocą rozwiązania do rozwiązania ścisłego równań różniczkowych. Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk aproksymuje operator różniczkowy (8.4) z dokładnością rzędu $o(k)$, a metoda bezpośredniego całkowania rzędu $o(k^2)$. Wpływ rzędu aproksymacji można zauważyć w fakcie, że różnice pomiędzy danymi liczbowymi metody bezpośredniego całkowania i metody Couranta są mniejsze od różnic pomiędzy wynikami metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk a metody Couranta.

Ważną rolę odgrywa stateczność metod przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych. Problem stateczności związany jest bezpośrednio z równaniami różnicowymi aproksymującymi równania różniczkowe. Metoda Couranta i metody iteracyjne z p. 5 należą do metod analitycznych i dla nich problem ten nie istnieje.

W przypadku możliwości użycia metody Kellera-Thomégo mamy zapewnioną bezwzględną stateczność. Dla metody bezpośredniego całkowania oraz metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk problem stateczności jest otwarty. Można jedynie przeprowadzić krótką dyskusję na temat stateczności tych metod w przypadku przybliżonego rozwiązywania układu dwu równań różniczkowych prawie-liniowych (8.1), opisujących zagadnienie propagacji cylindrycznej fali ścinania.

W literaturze problem stateczności opracowano na razie dla liniowych układów równań różnicowych, aproksymujących równania różniczkowe i określonych w węzłach siatki prostokątnej, pokrywającej dany obszar. W przypadku cylindrycznej fali ścinania nie wykorzystujemy siatki prostokątnej, ale siatkę utworzoną przez charakterystyki równań (8.1) (rys. 1). Z tych względów wnioski na podstawie literatury w odniesieniu do naszego przykładu należy wyciągać z pewną ostrożnością.

Między innymi statecznością schematów różnicowych zajmuje się S. G. HAHN w [23]. Głównym rezultatem pracy autorki jest wykazanie, że warunkiem koniecznym i wystarczającym stateczności schematów różnicowych dla jednorodnego, liniowego układu równań różniczkowych pierwszego rzędu typu hiperbolicznego, jest zawieranie się obszaru zależności równań różniczkowych w obszarze zależności równań różnicowych. Warunek ten jest słuszny tylko dla takich aproksymacji różnicowych, które pozwalają znaleźć wartość rozwiązania w chwili $t + \Delta t$ przez wartości rozwiązania w $l + 1$ w chwili t , gdzie l jest liczbą zmiennych przestrzennych.

W naszym przykładzie obszary zależności równań różniczkowych i równań różnicowych pokrywają się. Poza tym do otrzymania rozwiązania przybliżonego równań (8.1) w dowolnym punkcie wewnętrznym siatki w chwili $t + \Delta t_1$ wymagana jest znajomość rozwiązania w dwu punktach siatki w chwili t , przy czym mamy jedną zmienną przestrzenną. Warunek wymagany w pracy S. G. HAHN [23] jest więc spełniony. Jednakże nie możemy mieć pewności, że metody rozwiązywania cylindrycznej fali ścinania są stateczne, gdyż praca S. G. Hahn nie uwzględnia prawie-liniowych ani quasi-liniowych układów równań różnicowych.

Spróbujmy bezpośrednio wykorzystać definicję 2 z p. 2 do wykazania stateczności metod przybliżonego rozwiązywania zagadnienia rozprzestrzeniania się cylindrycznej fali ścinania. Na możliwość wykorzystania tej definicji wskazuje wyżej już wspomniany fakt, że w naszym przykładzie, dzięki temu iż tangensy kątów nachylenia charakterystyk do osi t wynoszą $\pm c = \pm(\mu/\rho)^{1/2}$, rozwiązanie w chwili $t + \Delta t_1$ znajdujemy w zależności od wartości rozwiązań w chwili t ($\Delta t_1 > 0$, $t = n\Delta t_1$, $n = 0, 1, \dots$). Definicję 2 można zastosować tylko w przypadku metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk, gdyż metody bezpośredniego całkowania nie można zaliczyć do metod różnicowych.

Rozwiązanie problemu (8.1)–(8.3) za pomocą metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk sprowadza się do rozwiązywania w każdym punkcie siatki (rys. 1) układu dwu równań (8.19).

Przedstawimy układ (8.19) w wygodniejszej postaci

$$(9.2) \quad U^* = D_1 U_1 + D_2 U_2 + \Delta r D_3,$$

gdzie

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \Delta r \left(\frac{1}{r_1} + \beta \right) & -\frac{1}{2} - \frac{\Delta r}{2r_1} \\ -\frac{1}{2} + \Delta r \left(\frac{1}{r_1} + \beta \right) & \frac{1}{2} + \frac{\Delta r}{2r_1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \Delta r \left(\frac{1}{r_2} - \beta \right) & \frac{1}{2} - \frac{\Delta r}{2r_2} \\ \frac{1}{2} + \Delta r \left(\frac{1}{r_2} - \beta \right) & \frac{1}{2} - \frac{\Delta r}{2r_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} ct \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*(P^*), \quad \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_i(P_i), \quad \Delta r = r^* - r_1 = r_2 - r^*.$$

Schemat różnicowy (9.2) zgodnie z definicją 2 jest stateczny, jeżeli norma rozwiązania równań (9.2) dla dowolnej chwili t jest jednostajnie ograniczona przez normy warunków granicznych i normę wektora \mathbf{D}_3 . Jest to równoznaczne istnieniu takich stałych K_1, K_2, K_3 , że dla każdego Δt_1 , i $t = n\Delta t_1$ spełniona jest nierówność

$$(9.3) \quad \|\mathbf{U}(r, t)\| \leq K_1 \|\mathbf{U}(r_0, t)\| + K_2 \|\mathbf{U}(r_0 + ct, t)\| + K_3 \|\mathbf{D}_3\|.$$

Z (9.2) wynika, że dla każdego $t = n\Delta t_1$ i $r \geq 1$ zachodzi nierówność

$$(9.4) \quad \|\mathbf{U}(r, t)\| \leq \max(\|\mathbf{U}(r_0, t)\|, [2 + 4\Delta r(1 + \beta)] \|\mathbf{U}(r, t - \Delta t_1)\| + 2\gamma\Delta r, \|\mathbf{U}(r_0 + ct, t)\|).$$

Pomińmy warunki graniczne i rozważmy tylko nierówność wynikającą z równań (9.2)

$$(9.5) \quad \|\mathbf{U}(r, t)\| \leq [2 + 4\Delta r(1 + \beta)] \|\mathbf{U}(r, t - \Delta t_1)\| + 2\gamma\Delta r.$$

Bardzo istotne znaczenie w związku (9.5) ma współczynnik występujący przy $\|\mathbf{U}(r, t - \Delta t_1)\|$, niezależny od Δr . Zauważmy, że przechodząc z równań (9.2) do nierówności (9.5) dla norm wielkość tego współczynnika wyznaczona jest w sposób jednoznaczny.

Na podstawie (9.5) mamy

$$(9.6) \quad \|\mathbf{U}(r, t)\| \leq [2 + 4(1 + \beta)\Delta r]^n \|\mathbf{U}(r, 0)\| + 2\gamma\Delta r \frac{[2 + 4(1 + \beta)\Delta r]^n - [2 + 4(1 + \beta)\Delta r]}{1 + 4(1 + \beta)\Delta r}.$$

Wielkość

$$(9.7) \quad 2^n [1 + 2(1 + \beta)c\Delta t_1]^n = 2^n \left[1 + 2(1 + \beta) \frac{ct}{n} \right]^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

co oznacza, że nie potrafimy znaleźć takich stałych K_1, K_2 i K_3 , by spełniona była nierówność (9.3) dla każdego Δt_1 i t .

Fakt ten jednak nie wskazuje na to, że aproksymacja różnicowa (9.2) będzie niestateczna według każdej innej definicji stateczności. Możemy jedynie wyciągnąć z niego wniosek, po szczegółowym zanalizowaniu przejścia z układu równań (9.2) do nierówności (9.5), że definicje stateczności opisane w p. 2 nie mogą być wykorzystywane w przypadku metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk.

Wydaje się, że istotną rolę odgrywa przy stosowaniu definicji stateczności opisanych w p. 2 aproksymowanie równań różniczkowych postaci

$$(9.8) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{B}.$$

Wtedy w równaniach różnicowych

$$(9.9) \quad \mathbf{u}^h(t) = [\mathbf{I} + k\mathbf{Q}] \mathbf{u}^h(t-k) + k\mathbf{B}$$

po prawej stronie zawsze wystąpi macierz jednostkowa \mathbf{I} , co ma duże znaczenie przy określaniu stałych w nierówności (2.10).

Korzystając z metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk opieramy się na równaniach spełnionych wzdłuż odpowiednich charakterystyk. W przypadku dwu zmiennych niezależnych można, po wprowadzeniu nowych funkcji poszukiwanych, sprowadzić układ hiperbolicznych równań różniczkowych, cząstkowych pierwszego rzędu do takiego układu równań, że w każdym z równań występowałaby tylko pochodna w kierunku charakterystycznym (por. p. 3, 6 i 7). Równania takiej postaci można by przyjąć jako analogiczne równaniom (9.8). Jednakże stosując metodę różnic skończonych wzdłuż charakterystyk, przy aproksymowaniu równań różniczkowych (7.4) równaniami różnicowymi, traktujemy równania (7.4) jako dane odpowiednio w punktach P_i (por. p. 7). Taki sposób postępowania wyklucza zastąpienie starych funkcji nowymi funkcjami poszukiwanymi.

Wobec tego jedyną możliwością wykorzystania definicji 2 stateczności w przypadku przybliżonego rozwiązywania problemu (8.1)–(8.3) jest opieranie się na nierówności (9.4), co prowadzić może do mylnych wniosków odnośnie stateczności metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk. Powyższe rozważania wskazują więc na to, że definicji stateczności p. 2 nie można stosować w przypadku rozwiązywania równań różniczkowych za pomocą metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk.

W. S. RIABENKI i A. F. FILIPPOW [55] proponują badanie stateczności na podstawie rozprzestrzeniania się jednostkowego błędu. Ich propozycję można wykorzystać w przypadku metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk i metody bezpośredniego całkowania. Idea postępowania jest następująca. Układy równań (8.18) i (8.19) aproksymują układ równań różniczkowych (8.1). Niech przy otrzymaniu rozwiązania równań (8.18) i (8.19) popełnimy błąd równy ε tylko w jednym punkcie siatki, a w pozostałych punktach siatki nie popełnimy żadnych innych błędów. Błąd ε będzie przyczyną błędów w następnych punktach siatki. Jeżeli błąd w trakcie obliczeń będzie szybko rosł, to przyjmujemy, że metoda nie jest stateczna; jeżeli będzie maleć, to metoda rozwiązywania jest stateczna.

Zbadano jak rozprzestrzenia się błąd ε dla równań (8.18) czyli dla metody bezpośredniego całkowania. Przyjęto $\varepsilon = 1$. Równania dla błędów τ_s , v_s mają postać

$$(9.10) \quad \begin{aligned} \tau_s \frac{c}{\mu} \left[1 + \left(\beta + \frac{3}{2r^*} \right) (r^* - r_1) \right] - v_s &= \\ &= \frac{\tau_{1s} \frac{c}{\mu} - v_{1s}}{r_1} r^* - \frac{r^*}{2r_1} \left(\frac{3}{r_1} + 2\beta \right) (r - r_1) \tau_{1s} \frac{c}{\mu}, \\ \tau_s \frac{c}{\mu} \left[1 + \left(\frac{3}{2r^*} - \beta \right) (r^* - r_2) \right] + v_s &= \\ &= \frac{\tau_{2s} \frac{c}{\mu} + v_{2s}}{r_2} r^* + \frac{r^*}{2r_2} \tau_{2s} \frac{c}{\mu} \left(\beta - \frac{3}{2r_2} \right) (r^* - r_2). \end{aligned}$$

W tablicy 3 umieszczono wyniki dla τ_s i v_s na charakterystykach $r = 1 + c(t - 10^{-7})$ i $r = 1 + c(t - 2 \cdot 10^{-6}/3)$ i dla podziału odcinka czasu $(0, 10^{-6} \text{s})$ na 30 i 120 części. Błędy są niewielkie w porównaniu z $\varepsilon = 1$ i maleją przy zmniejszaniu oczka siatki. Należy stąd wnosić o stateczności metody bezpośredniego całkowania. Jednakże powyższego wniosku nie można traktować jako formalnego dowodu stateczności.

Końcowe wnioski odnośnie porównywanych metod. 1. Metoda Kellera-Thomégo spełnia wszystkie wymagane od metod numerycznych warunki: operuje się względnie statecznym schematem różnicowym, który aproksymuje wyjściowe równania (4.1) z dokładnością rzędu $o(k^2)$. Metoda zapewnia więc zbieżność przybliżonego rozwiązania do rozwiązania ścisłego układu równań różniczkowych.

2. W ramach metody Couranta można udowodnić zbieżność przybliżonego rozwiązania. Aby metoda przy obliczeniach numerycznych była przydatna, należy ograniczyć się do obliczania dwu lub trzech iteracji rozwiązania.

3. Atutem metod iteracyjnych opisanych w p. 5 jest dowód zbieżności i jednoznaczności rozwiązania. Jednakże wydaje się, że w większości przypadków ze względu na skomplikowane wyrażenia analityczne okażą się o wiele mniej przydatne przy korzystaniu z maszyn matematycznych aniżeli pozostałe metody.

4. Metoda bezpośredniego całkowania sprowadza się do rozwiązywania równań algebraicznych. Zasięg jej stosowalności jest ograniczony do układów równań różniczkowych (6.1), w których wektor \mathbf{B} jest liniową funkcją rozwiązania. Nie udowodniono zbieżności rozwiązania przybliżonego do ścisłego rozwiązania równań różniczkowych.

5. Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk jest opracowana dla liniowych, prawie-liniowych i quasi-liniowych równań różniczkowych. W porównaniu z metodą bezpośredniego całkowania i wszystkimi metodami iteracyjnymi jest metodą najprostszą. Dotychczas nie udowodniono jeszcze zbieżności otrzymywanego przy jej zastosowaniu rozwiązania.

Jeżeli w dyskusji ograniczymy się do trzech metod, którymi rozwiązano zagadnienie propagacji cylindrycznej fali ścinania (8.1)–(8.3), to musimy stwierdzić, że na podstawie tablic 1 i 2 oraz rys. 2a i 2b trudno którąkolwiek z tych metod wyróżnić.

Tablica 3

Rozprzestrzenianie się błędu $\varepsilon = 1$ dla metody bezpośredniego całkowania

$\Delta t = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s}$		$\Delta t = \frac{1}{12} \cdot 10^{-7} \text{ s}$	
τ_ε	v_ε	τ_ε	v_ε
$r = 1 + c(t - 10^{-7})$			
0.0000	-0.0051	0.0000	-0.0013
0.0001	-0.0050	0.0000	-0.0013
0.0002	-0.0050	0.0000	-0.0012
0.0004	-0.0050	0.0001	-0.0012
0.0005	-0.0050	0.0001	-0.0012
0.0006	-0.0049	0.0001	-0.0012
0.0007	-0.0049	0.0002	-0.0012
0.0008	-0.0049	0.0002	-0.0012
0.0009	-0.0049	0.0002	-0.0012
0.0010	-0.0049	0.0002	-0.0012
0.0011	-0.0048	0.0003	-0.0012
0.0012	-0.0048	0.0003	-0.0012
0.0013	-0.0048	0.0003	-0.0012
0.0014	-0.0048	0.0003	-0.0012
0.0015	-0.0048	0.0004	-0.0012
0.0016	-0.0047	0.0004	-1.0012
0.0017	-0.0047	0.0004	-0.0012
0.0018	-0.0047	0.0004	-0.0012
0.0018	-0.0047	0.0004	-0.0012
0.0019	-0.0046	0.0005	-0.0012
0.0020	-0.0046	0.0005	-0.0012
0.0021	-0.0046	0.0005	-0.0011
0.0021	-0.0046	0.0005	-0.0011
0.0022	-0.0046	0.0005	-0.0011
0.0023	-0.0045	0.0006	-0.0011
0.0024	-0.0045	0.0006	-0.0011
0.0024	-0.0045	0.0006	-0.0011
0.0025	-0.0045	0.0006	-0.0011
$r = 1 + c\left(t - \frac{2}{3} \cdot 10^{-6}\right)$			
0.0000	-0.0036	0.0000	-0.0009
0.0001	-0.0036	0.0000	-0.0009
0.0002	-0.0036	0.0000	-0.0009
0.0003	-0.0036	0.0000	-0.0009
0.0003	-0.0035	0.0001	-0.0009
0.0004	-0.0035	0.0001	-0.0009
0.0005	-0.0035	0.0001	-0.0009
0.0006	-0.0035	0.0001	-0.0009
0.0007	-0.0035	0.0002	-0.0009
0.0007	-0.0035	0.0002	-0.0009
0.0008	-0.0034	0.0002	-0.0009

Otrzymane za ich pomocą dane numeryczne charakteryzują się wystarczającą zgodnością, aby każdą z tych metod wykorzystać do rozwiązania problemu (8.1)–(8.3). Jeśli weźmiemy pod uwagę czas dokonywania obliczeń numerycznych, to metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk i metoda bezpośredniego całkowania górują nad metodą Couranta, gdy liczymy więcej niż dwie iteracje. Jednakże w przypadku tych metod problem stateczności, a tym samym problem zbieżności przybliżonego rozwiązania do ścisłego rozwiązania równań różniczkowych, pozostaje otwarty. Jedynie dzięki temu, iż w ramach metody Couranta dowiedziono zbieżności rozwiązania przybliżonego, mamy pewność, że uzyskane za pomocą tych trzech metod rozwiązanie jest zbieżne do rozwiązania równań różniczkowych (8.1).

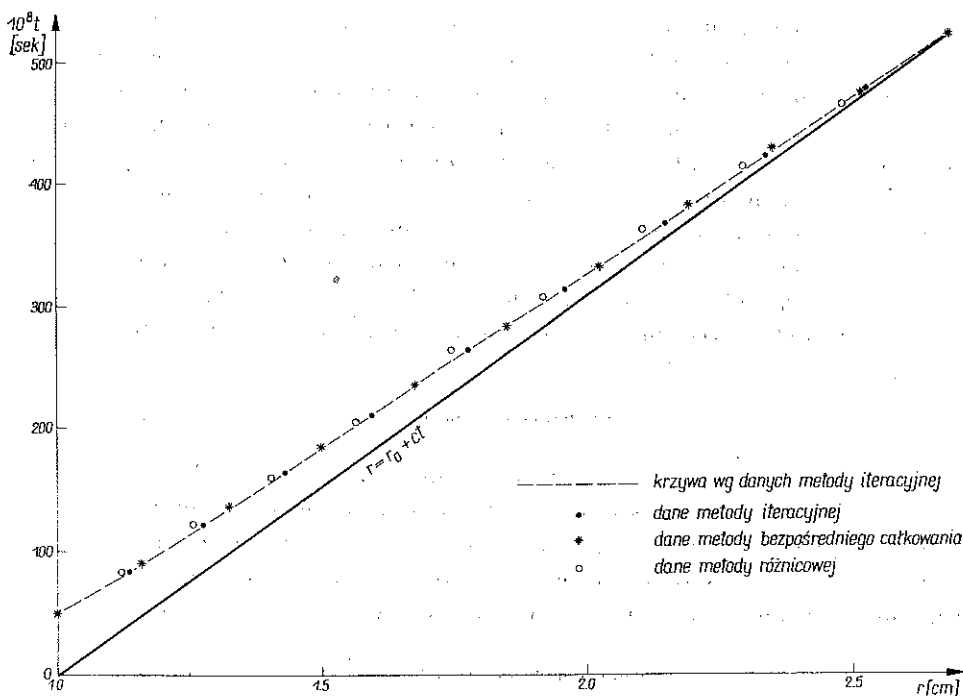
10. Krzywa odciążania

Układ równań różniczkowych (8.1), opisujący propagację cylindrycznej fali ścinania w jednorodnym ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym, jest spełniony w obszarze ograniczonym prostą $r = r_0$, prostą $r = r_0 + ct$ oraz krzywą odciążania. Krzywa ta oddziela obszar, w którym ma miejsce proces obciążania od obszaru procesu odciążania. Jest ona w naszym przykładzie scharakteryzowana równością $\tau = \kappa$.

Tablica 4. Krzywa odciążania

Metoda Couranta		Metoda bezpośredniego całkowania		Metoda różnic skończonych wzdłuż charakterystyk	
r	$10^8 t$	r	$10^8 t$	r	$10^8 t$
2.684	519.0	2.684	519.0	2.684	519.0
2.528	473.9	2.520	471.2	2.483	462.6
2.338	420.1	2.359	426.7	2.294	411.7
2.147	366.3	2.194	380.6	2.105	362.4
1.959	313.1	2.024	333.2	1.919	308.3
1.774	261.3	1.850	284.8	1.739	267.7
1.597	211.7	1.675	235.6	1.566	205.4
1.430	165.0	1.499	186.3	1.404	160.4
1.275	122.2	1.325	137.7	1.255	123.1
1.134	83.7	1.157	90.9	1.120	83.1
1.000	50.0	1.000	50.0	1.000	50.0

Krzywa ta została znaleziona numerycznie przy $\Delta t = 25 \cdot 10^{-8}$ oraz dla warunku brzegowego $p(t) = 2\kappa(1 - 10^6 t)$. Jako punkty krzywej przyjmowano punkty pośrednie pomiędzy kolejnymi punktami siatki wzdłuż charakterystyk w przypadku, gdy w jednym punkcie siatki zachodziło $\tau > \kappa$, a w następnym $\tau < \kappa$. Punkty krzywej uzyskane za pomocą metody Couranta, metody bezpośredniego całkowania i metody różnic skończonych wzdłuż charakterystyk przedstawia rys. 3. Jak wynika z rys. 3, odległości między krzywymi odciążania, otrzymanymi za pomocą tych trzech metod, są wystarczająco małe, aby każda z tych krzywych mogła zostać przyjęta jako krzywa odciążania w przypadku problemu (8.1)–(8.3).



Rys. 3

Przeprowadźmy dyskusję, kiedy pochodne rozwiązania mogą być nieciągłe wzdłuż krzywej odciążania o równaniu $f(r, t) = 0$ w zależności od funkcji lepkości. Niech $w(r, t)$ będzie rozwiązaniem cylindrycznej fali ścinania w obszarze obciążania i w obszarze odciążania, w których spełnione są odpowiednio równania teorii sprężystości i teorii sprężysto/lepkoplastyczności. Niech $(u)_e, (u)_p$ oznaczają odpowiednio wielkości w obszarze sprężystym i sprężysto/lepkoplastycznym. Wtedy dla naszego przykładu w obszarze sprężystym słuszne są związki

$$(10.1) \quad (w_t)_e + A (w_r)_e + B_e = 0,$$

a w obszarze sprężysto/lepkoplastycznym

$$(10.2) \quad (w_t)_p + A (w_r)_p + B_p = 0,$$

gdzie

$$(10.3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} \tau \\ v \end{bmatrix},$$

$$B_e = \begin{bmatrix} \mu \frac{v}{r} \\ -\frac{2}{r} \frac{\tau}{\rho} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} \mu \left[\frac{v}{r} + 2\gamma \Phi \left(\frac{\tau}{\kappa} - 1 \right) \right] \\ -\frac{2}{r} \frac{\tau}{\rho} \end{bmatrix}.$$

Dyskusja zostanie przeprowadzona przy założeniu, że warunki graniczne są funkcjami różniczkowalnymi wystarczającą ilość razy oraz dla dwu różnych postaci funkcji lepkości, zaproponowanych przez P. PERZYŃĘ [49]

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \Phi_1 \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1 \right) &= \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} \left[\exp \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1 \right)^{\alpha} - 1 \right], \\ \Phi_2 \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1 \right) &= \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1 \right)^{\alpha}, \end{aligned}$$

gdzie A_{α} i B_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) są stałymi materiałowymi.

Niech rozwiązanie w w obszarach odciążania i obciążania jest funkcją klasy C^1 i niech na fali odciążania $f(r, t) = 0$ jest ciągła pochodna

$$(10.5) \quad \frac{dw}{dt} = c_f w_r + w_t,$$

gdzie $c_f = -f_t/f_r$ jest prędkością fali odciążania. Wtedy w dowolnym punkcie na fali odciążania mamy

$$(10.6) \quad [w_t] + c_f [w_r] = 0,$$

gdzie przez $[u] = [u_p - u_e]$ oznaczony został skok wielkości u . Odejmując równania (10.1) od równań (10.2) i wykorzystując związek (10.6) otrzymujemy

$$(10.7) \quad (\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) [w_t] + c_f [\mathbf{B}] = 0.$$

Przy przejściu granicznym $\tau \rightarrow \varkappa$ mamy

$$(10.8) \quad (\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) [w_t] = 0,$$

dla obu funkcji lepkości (10.4). Z równości (10.8) i (10.6) wnioskujemy, że jeżeli $\det(\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) \neq 0$, czyli prędkość fali odciążania w żadnym punkcie nie jest równa prędkości charakterystyk, to pochodne cząstkowe rozwiązania równań opisujących propagację cylindrycznej fali ścinania są funkcjami ciągłymi wzdłuż krzywej odciążania $f(r, t) = 0$. Nieciągłość pochodnych jest możliwa tylko wtedy, gdy krzywa odciążania jest charakterystyką.

Założmy, że $c_f \neq \pm(\mu/\rho)^{1/2}$ i w jest klasy C^2 w obszarze odciążania oraz w obszarze obciążania i że pochodna

$$(10.9) \quad \frac{dw_t}{dt} = c_f w_{tr} + w_{tt}$$

jest funkcją ciągłą na $f(r, t) = 0$. Różniczkując równania (10.1) i (10.2) względem czasu, odejmując je stronami, korzystając z równości $(w_{tr})_e = (w_{rt})_e$, $(w_{tr})_p = (w_{rt})_p$ oraz wykorzystując ciągłość funkcji (10.9) mamy

$$(10.10) \quad (\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) [w_{tt}] + c_f [\mathbf{B}_t] = 0.$$

Zauważmy, że

$$(10.11a) \quad [B_t]_1 = \begin{bmatrix} 2\gamma\mu \frac{1}{\varkappa} \tau_t \left[A_1 \exp\left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right) + \sum_{\alpha=2}^N \alpha A_\alpha \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right)^{\alpha-1} \exp\left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right)^\alpha \right] \\ 0 \end{bmatrix}$$

lub

$$(10.11b) \quad [B_t]_2 = \begin{bmatrix} 2\gamma\mu \frac{1}{\varkappa} \tau_t \left[B_1 + \sum_{\alpha=2}^N \alpha B_\alpha \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right)^\alpha \right] \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wzdłuż krzywej $f(r, t) = 0$

$$(10.12) \quad [B_t] = \begin{bmatrix} m\tau_t \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $m = 2\gamma\mu A_1/\varkappa$ lub $m = 2\gamma\mu B_1/\varkappa$.

W naszym przypadku naprężenie τ jest funkcją malejącą w otoczeniu fali odciążania, wobec czego $\tau_t \neq 0$.

Istnieją dwie możliwości: 1) $m = 0$ czyli $A_1 = B_1 = 0$. Wtedy $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [B_t] = 0$, a to pociąga za sobą ciągłość drugich pochodnych cząstkowych rozwiązania wzdłuż fali odciążania. 2) $m \neq 0$, czyli $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, co zapewnia istnienie skoków $[w_{tt}]$ i $[w_{tr}]$ wzdłuż krzywej $f(r, t) = 0$.

Widzimy, że od współczynników A_α i B_α występujących w funkcjach lepkości (10.4) zależy ciągłość pochodnych rozwiązania zagadnienia propagacji cylindrycznej fali ścinania wzdłuż krzywej odciążania. Nasuwa się następujące

TIWIERDZENIE. Niech $\det(\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) \neq 0$ i niech $A_\alpha = 0$, $B_\alpha = 0$ dla $\alpha = 1, 2, \dots, M$, $M < N$, a $A_{M+1} \neq 0$, $B_{M+1} \neq 0$. Jeżeli rozwiązanie w jest klasy \mathcal{C}^{M+2} w obszarach odciążania i obciążania oraz jeżeli pochodne

$$\frac{d}{dt} = c_f \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}$$

funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi na krzywej odciążania $f(r, t) = 0$, to pochodne $\partial^\alpha w / \partial t^\alpha$ rozwiązania cylindrycznej fali ścinania do rzędu $M+1$ są funkcjami ciągłymi wzdłuż krzywej $f(r, t) = 0$, a pochodna $\partial^{M+2} w / \partial t^{M+2}$ jest nieciągła.

Dowód. Na podstawie założenia funkcje lepkości (10.4) mają postać

$$(10.13) \quad \begin{aligned} \Phi_1\left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right) &= \sum_{\alpha=M+1}^N A_\alpha \left[\exp\left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right)^\alpha - 1 \right], \\ \Phi_2\left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right) &= \sum_{\alpha=M+1}^N B_\alpha \left(\frac{\tau}{\varkappa} - 1\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że wzdłuż fali odciążania

$$(10.14) \quad (\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) \left[\frac{\partial^\alpha \mathbf{w}}{\partial t^\alpha} \right] = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha = 1, 2, \dots, M+1.$$

Wobec tego pochodne $\partial^\alpha \mathbf{w}/\partial t^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, M+1$) są ciągłe na krzywej $f(r, t) = 0$, natomiast

$$(10.15) \quad (\mathbf{I}c_f - \mathbf{A}) \left[\frac{\partial^{M+2} \mathbf{w}}{\partial t^{M+2}} \right] = c_f \left[\frac{\partial^{M+1} \mathbf{B}}{\partial t^{M+1}} \right],$$

gdzie

$$(10.16) \quad \lim_{\tau \rightarrow \kappa} \left[\frac{\partial^{M+2} \mathbf{B}}{\partial t^{M+2}} \right] = \begin{bmatrix} (M+1)! \bar{m} \left(\frac{\tau_t}{\kappa} \right)^{M+1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

przy czym $\bar{m} = 2\gamma\mu A_{M+1}$ lub $\bar{m} = 2\gamma\mu B_{M+1}$. Ponieważ $\tau_t \neq 0$ i $\bar{m} \neq 0$, układ (10.15) posiada niezerowe rozwiązanie czyli pochodna $\partial^{M+2} \mathbf{w}/\partial t^{M+2}$ nie jest ciągła wzdłuż fali odciążania.

Podobne rozumowanie przy tych samych założeniach można przeprowadzić w odniesieniu do pozostałych pochodnych rozwiązania i wykazać, że wszystkie pochodne cząstkowe funkcji \mathbf{w} do rzędu $M+1$ są ciągłe wzdłuż krzywej odciążania.

W numerycznym przykładzie jako funkcję lepkości przyjęto funkcję (10.4)₂ przy $B_1 = 1$, $B_a = 0$ dla $a > 1$. Wobec tego w tym przypadku rozwiązanie jest ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi wzdłuż krzywej odciążania.

Autorka wyraża swą wdzięczność doc. drowi P. Perzynie za cenne wskazówki i dyskusje, które były bardzo pomocne przy pisaniu powyższej pracy oraz mgrowi B. Jasińskiemu z CO PAN za wykonanie obliczeń numerycznych. (1)

Literatura cytowana w tekście

1. A. K. AZIZ, J. B. DIAZ, *On a mixed boundary-value problem for linear hyperbolic partial differential equations in two independent variables*, Arch. Rat. Anal., **10** (1962), 1–28.
2. J. BEJDA, *Propagation of two-dimensional stress waves in an elastic/viscoplastic materials*, Proceedings of 12th International Congress of Applied Mechanics held at Stanford in 1968.
3. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, Т. 2, Москва 1962.
4. M. BURNAT, *Theory of simple waves for nonlinear systems of partial differential equations of the first order and applications to gas dynamics*, Arch. Mech. Stos., **4**, **18** (1966).
5. M. BURNAT, A. KIELBASIŃSKI, *Computation of a three dimensional flow*, Fluid Dynamics Transactions, **3** (1967).
6. M. BURNAT, A. KIELBASIŃSKI, A. WAKULICZ, *The method of characteristics for a multi-dimensional gas flow*, Arch. Mech. Stos., **3**, **16** (1964).
7. D. S. BUTLER, *The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables*, Proc. Roy. Soc., London 1960.
8. C. S. CHU, J. B. DIAZ, *Remarks on a mixed boundary-value problem for linear hyperbolic partial differential equations in two independent variables*, Arch. Rat. Mech. Anal., **3**, **16** (1964), 187–195.

(1) Powyższa praca jest rozprawą doktorską napisaną pod kierunkiem doc. dra P. PERZYNIE.

9. R. J. CLIFTON, *Elastic-plastic boundaries in combined longitudinal and torsional plastic wave propagation*, report.
10. E. CONWAY, J. SMOLLER, *Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first order equations in several space variables*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1, **19** (1966), 95-105.
11. R. COURANT, *Cauchy's problem for hyperbolic system of first order partial differential equations in two independent variables*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 3, **14** (1961), 257-265.
12. R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics. T. 2, Partial differential equations by R. Courant*, Interscience Publishers, New York-London 1962.
13. R. COURANT, W. ISAACSON, M. REES, *On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 5 (1952), 243-255.
14. J. T. FONG, *Elastic-plastic wave in a half-space of a linearly work-hardening material for coupled shear loadings*, report 1966.
15. J. T. FONG, *On the generation of strong discontinuities in a moving boundary-value problem in dynamic plasticity*, report.
16. G. E. FORSYTHE, W. R. WASOW, *Finite-difference methods for partial differential equations*, New York-London 1960.
17. P. FOX, *The solution of hyperbolic partial differential equations by difference methods*, *Mathematical methods for digital computers*, New York-London 1960 (Ralston ed.).
18. K. O. FRIEDRICH, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 (1954), 345-392.
19. J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 4, **18** (1965), 697-716.
20. С. К. ГОДУНОВ, В. С. РЯБЕНЬКИЙ, *Введение в теорию разностных схем*, Москва 1962.
21. A. R. GOURLAY, A. R. MITCHELL, *Alternating direction methods for hyperbolic systems*, *Num. Math.*, 2, **8** (1966).
22. A. R. GOURLAY, A. R. MITCHELL, *A stable implicit difference method for hyperbolic systems in two space variables*, *Num. Math.*, 4, **8** (1966).
23. S. G. HAHN, *Stability criteria for difference schemes*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 (1958), 243-255.
24. E. ISAACSON, *Fluid dynamical calculations. Numerical solutions of partial differential equations*, Maryland 1965, 35-48.
25. F. JOHN, *On integration of parabolic equations by difference methods*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 5 (1962), 155-211.
26. Л. В. КАНТОРОВИЧ, Г. П. АКИЛОВ, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, Москва 1959.
27. H. B. KELLER, *On the solution of semi-linear hyperbolic systems by unconditionally stable difference methods*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 447-456.
28. H. B. KELLER, V. THOMÉE, *Unconditionally stable difference methods for mixed problems for quasi-linear hyperbolic systems in two dimensions*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 15 (1962), 63-73.
29. Z. KOWALSKI, *A difference method for the non-linear partial differential equation of the first order*, *Annal. Pol. Math.*, 3, **8** (1966).
30. Z. KOWALSKI, *A difference method for certain hyperbolic systems of non-linear partial differential equations of the first order*, *Annal. Polon. Math.*, 19 (1967), 313-322.
31. H. O. KREISS, *Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren*, *BIT*, 2 (1962), 153-181.
32. H. O. KREISS, *On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 (1964), 335-353.
33. H. O. KREISS, *Difference approximations for hyperbolic differential equations*, *Numerical solution of partial differential equations*, Maryland 1965.
34. P. D. LAX, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 (1954), 159-193.

35. P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 4, 10 (1957) 537–566.
36. P. D. LAX, *On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 497–520.
37. P. D. LAX, *Numerical solution of partial differential equations*, Ann. Math. Monthly, 2, 72 (1965), 74–84.
38. P. D. LAX, R. D. RITCHMYER, *Survey of the stability of linear finite difference equations*, Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956), 267–293.
39. P. D. LAX, B. WENDROFF, *Systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 2, 13 (1960), 217–238.
40. P. D. LAX, B. WENDROFF, *On the stability of difference schemes*, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 363–371.
41. P. D. LAX, B. WENDROFF, *Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy*, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 381–398.
42. M. LISTER, *The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics*, Mathematical methods for digital computers, New York-London 1960.
43. О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, *Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей*, УЗ ЛГУ, серия мат. наук, 144, 23 (1952), 192–246.
44. G. MAJCHER, *Sur un probleme mixte pour l'équation du type hyperbolique*, Annal. Polon. Math., 5 (1958), 121–133.
45. B. PARLETT, *Accuracy and dissipation in difference schemes*, Comm. Pure Appl. Math., 19 (1966), 111–123.
46. P. PERZYNA, *Propagation of shock waves in non-homogeneous elastic/visco-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 6, 13 (1961), 851–867.
47. P. PERZYNA, *On a non-linear boundary-value problem for a linear hyperbolic partial differential equation*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 12 (1964), 589–594.
48. P. PERZYNA, *The application of the iteration method to the solution of the problems of propagation of stress waves in an inelastic medium*, Arch. Mech. Stos., 1, 17 (1965), 87–107.
49. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, Warszawa 1966.
50. P. PERZYNA, J. BEJDA, *The propagation of stress waves in a rate sensitive and work-hardening plastic medium*, Arch. Mech. Stos., 6, 16 (1964), 1215–1244.
51. P. PERZYNA, A. PIELORZ, *Discussion of methods of approximate solution of wave problem in an inelastic medium*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967), 115–127.
52. A. PIELORZ, *The comparison of methods for solving wave problems in inelastic media*, Arch. Mech. Stos., 2, 20 (1968), 225–241.
53. G. PROUSE, *Sulla risoluzione del problema misto per le equazioni iperboliche non lineari mediante le differenze finite*, Ann. di Mat., 46 (1958), 313–341.
54. R. D. RITCHMYER, *Difference methods for initial-value problems*, New York 1957.
55. В. С. РЯБЕНЬКИЙ, А. Ф. ФЛИППОВ, *Об устойчивости разностных уравнений*, Москва 1956.
56. W. W. RUSANOV, *Difference methods of constant direction*, Arch. Mech. Stos., 6, 20 (1968).
57. H. SAUERMAN, M. SUSSMAN, *Numerical stability of three-dimensional method of characteristics*, AIAA Journal, 2, 2 (1964), 387–390.
58. W. G. STRANG, *Difference methods for mixed boundary-value problems*, Duke Math. J., 27 (1960), 221–231.
59. Z. SZMYDT, *Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équation différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon., Cl. III, 4 (1956), 67–72.
60. Z. SZMYDT, *Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon., Cl. III, 4 (1956), 579–584.
61. Z. SZMYDT, *Sur un problème concernant un système d'équations différentielles hyperboliques d'ordre arbitraire à deux variables indépendantes*, Bull. Acad. Polon., Cl. III, 5 (1957), 577–582.

62. Z. SZMYDT, *Sur le problème de Goursat concernant les équations différentielles hyperboliques du second ordre*, Bull. Acad. Polon., Cl. III, 5 (1957), 571–575.
63. Z. SZMYDT, *Sur l'existence de solutions de certains problèmes aux limites relatifs à un système d'équations différentielles hyperboliques*, Bull. Acad. Polon., Série Sci. Math., Astr. et Phys., 6 (1958), 31–36.
64. V. THOMÉE, *Difference methods for two-dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 8 (1961), 68–88.
65. V. THOMÉE, *A mixed boundary-value problem for hyperbolic first order systems with derivatives in the boundary conditions*, Arch. Rat. Mech. Anal., 8 (1961), 435–443.
66. V. THOMÉE, *A stable difference scheme for the mixed boundary problem for a hyperbolic first order systems in two dimensions*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 1962.
67. V. THOMÉE, *A difference method for a mixed boundary problem for symmetric hyperbolic systems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 2, 13 (1963), 122–136.
68. В. Я. Урм, *О необходимых и достаточных условиях устойчивости систем разностных уравнений*, ДАН 1961, Т. 139, № 1, 40–43.
69. B. WENDROFF, *On centered difference equations for hyperbolic systems*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 8 (1960), 549–555.
70. А. И. Жуков, *Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики*, ТМИ им. В. А. Стеклова, 58 (1960).
71. В. В. Соколовский, *Распространение цилиндрических волн сдвига в упруго-вязко-пластической среде*, ДАН СССР, 60 (1948), 1325.
72. B. JASIŃSKI, *Komunikat prywatny*, 1967.

Резюме

О МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ
В НЕУПРУГИХ СРЕДАХ

В работе, автор, ограничивается такими волновыми вопросами, которые сводятся к решению краевой задачи для гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Такие уравнения, в общем, неинтегрируемы в замкнутом виде. Применяемыми методами решения являются приближенные методы, преимущественно, методы конечных разностей. В случае применения вышеприведенного метода, вместо системы дифференциальных уравнений, решается система разностных уравнений. Необходимым условием сходимости приближенного решения к точному решению дифференциальных уравнений, является устойчивость системы разностных уравнений. Раздел 2, включает наиболее известные дефиниции устойчивости для линейных разностных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

Главной целью работы, является сравнение пяти методов приближенного решения систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Этими методами является: итерационный метод Куранта, метод непосредственного интегрирования, метод конечных разностей вдоль характеристик, метод Келлера-Томе и итерационные методы, которые можно применять для случая таких систем уравнений, дающих возможность свести их к дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка. Эти методы описываются в разделах 3—7. Итерационные методы, а также метод Келлера-Томе обеспечивают сходимость приближенного решения с точным решением дифференциальных уравнений. Метод Куранта, метод непосредственного интегрирования, а также метод конечных разностей вдоль характеристик сравнивались на примере цилиндрической волны сдвига в упругой вязкопластической среде. Для случая метода Куранта проводятся последовательно три итерации. Численные результаты, характеризуются надлежащим согласием.

Обсуждается вопрос устойчивости рассматриваемых методов. Итерационные методы являются аналитическими методами и для них этот вопрос не существует. Для метода Келлера-

-Томе показана абсолютная устойчивость в [28]. Для остальных двух методов вопрос устойчивости является открытым. Проводится анализ этих двух методов для случая решения системы двух почти линейных уравнений (8.1), описывающих распространение цилиндрической волны сдвига в упруго-вязкопластической среде. Автор, при этом, основывался на работах [23] и [55]. Доказано, что для случая метода конечных разностей вдоль характеристик, нельзя использовать дефиницию устойчивости, описанной в разделе 2.

Раздел 10 заключает некоторые рассуждения, касающиеся непрерывности производных решения, цилиндрической волны сдвига в упругой-вязкопластической среде на кривой разгрузки.

Summary

ON THE METHODS OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF WAVE PROBLEMS IN INELASTIC MEDIA

In the paper we have confined ourselves to those wave problems which can be brought down to the problem of solving the boundary-value problem for hyperbolic sets of partial differential equations of the first order. In general such equations are not integrable in closed form. The methods of solution used are approximate methods, most often the methods of finite differences. In the case of utilizing the method of finite differences instead of a set of differential equations we solve a set of difference equations. The necessary condition for the convergence of an approximate solution to the exact solution is the stability of the set of difference equations. Chapter 2 contains the best known definitions of stability for a linear set of difference equations with constant and variable coefficients.

The major purpose of this paper is to compare five methods of approximate solution of sets of partial differential equations of the first order of hyperbolic type with two independent variables. These are: the iteration method of Courant, method of direct integration, method of finite differences along the characteristics, the Keller-Thomée method and iteration methods which can be applied only in the case of such sets of equations which can be reduced to a partial differential equation of the second order. These methods have been described in Chapters 3-7. Iteration methods and Keller-Thomée method ensure the convergence of the approximate solution to the exact solution of the differential equations. Courant's method, the method of direct integration and the method of finite differences along characteristics have been compared on the example of a cylindrical shear wave in an elastic/viscoplastic medium. In the case of Courant's method 3 iterations were calculated. The numerical results are characterized by good conformity.

The problem of stability of the methods considered has been discussed. The iteration methods are analytical methods and for them the problem does not exist. For the Keller-Thomée method the absolute stability has been demonstrated in [28]. For the remaining two methods the stability problem is open. The stability of these two methods has been analyzed in the case of solving a set of two semi-linear Eqs. (8.1), describing the problem of propagation of a cylindrical shear wave in an elastic/viscoplastic medium. Taken there as a basis were the papers [23] and [55]. It has been shown that in the case of the method of finite differences along the characteristics the definition of stability described in Chapter 2 cannot be utilized.

Chapter 10 contains some considerations concerning the continuity of derivatives of the solution for the cylindrical shear wave in an elastic/viscoplastic on a load curve.

ZAKŁAD UKŁADÓW MECHANICZNYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1969 r.