

PEWNE ZAGADNIENIA USTROJÓW SIATKOWYCH
O PRĘTACH ZAKRZYWIONYCH

P. KLEMM (ŁÓDŹ)

W pracy [1] przedstawione zostały podstawowe równania ustrojów siatkowych, poddane działaniu dowolnych obciążeń i wpływowi temperatury. W ustrojach tych pręty łączące sąsiednie węzły są dowolnie słabo zakrzywione w przestrzeni.

Otrzymane w pracy [1] równania fizyczne są ogólnymi liniowymi związkami między składowymi stanu napięcia i odkształcenia, natomiast równania ruchu i równania geometryczne są takie same jak dla ustrojów siatkowych, w których pręty łączące sąsiednie węzły siatki są proste, a obciążenie realizowane jest przez węzły siatki, przy czym nie uwzględniamy wpływów niemechanicznych [4].

Celem tej pracy jest przedstawienie podstawowych wzorów oraz rozwiązań dla ustrojów siatkowych, w których przekroje poprzeczne łączników mają jedną główną oś bezwładności zawsze równoległą do danej płaszczyzny, a osie tych łączników są łukami kołowymi (rys. 2). Uwzględniamy ponadto wpływy termiczne w łącznikach siatki.

Cechą charakterystyczną rozważanego przypadku jest sprzężenie zagadnienia płytowego z tarczowym [2 i 3]. Jeśli założymy, że siatka ustroju jest kształtowana w obszarze π płaszczyzny parametryzowanej prostokątnym układem współrzędnych x^k (1), to przedstawione w pracy [1] związki między składowymi napięcia p^{KL} , p^K , m^{KL} , m^K i składowymi stanu odkształcenia γ_{MN} , γ_M , \varkappa_{MN} , \varkappa_M mają postać

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} p^{KL} \\ p^K \\ m^{KL} \\ m^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{KLMN} & A^{KLM} & B^{KLMN} & B^{KLM} \\ A^{KMN} & A^{KM} & B^{KMN} & B^{KM} \\ B^{MNKL} & B^{MKL} & C^{KLMN} & C^{KLM} \\ B^{MNK} & B^{MK} & C^{KMN} & C^{KM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{MN} \\ \gamma_M \\ \varkappa_{MN} \\ \varkappa_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{KL} \\ a^K \\ c^{KL} \\ c^K \end{bmatrix},$$

w których A^{KLMN} , A^{KLM} , B^{KLMN} , ..., a^{KL} , a^K , c^{KL} , c^K są składowymi tensorów charakteryzujących własności geometryczne i fizyczne ustroju siatkowego oraz mechaniczne i niemechaniczne wpływy działające na łączniki tego ustroju. Równania geometryczne mają znaną postać [4]

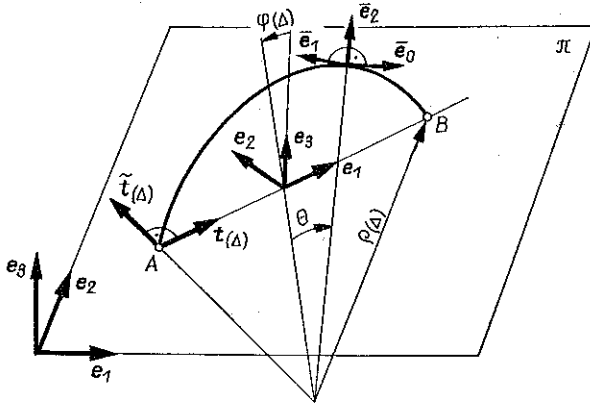
$$(1.2) \quad \begin{aligned} \gamma_{MN} &= u_{N,M} + \varepsilon_{NM} v, \\ \gamma_M &= u_{,M} + \varepsilon_{MN} v^N, \\ \varkappa_{MN} &= v_{N,M}, \quad \varkappa_M = v_{,M}, \end{aligned}$$

(1) Wskaźniki K, L, M przebiegają ciąg liczb 1, 2.

a równania ruchu sprowadzają się do postaci [4]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p^{KL},_K + b^L &= \rho \ddot{u}^L + \varepsilon^L_M \rho^M \ddot{v} + \varepsilon_N^L \rho^3 \ddot{v}^N, \\ p^K,{}_K + b &= \rho \ddot{u} + \varepsilon_{MN} \rho^M \ddot{v}^N, \\ m^{KL},_K + \varepsilon^L_M p^M + m^L &= \varepsilon^L_M \rho^3 \ddot{u}^M + \varepsilon_N^L \rho^N \ddot{u} - \rho^{L3} \ddot{v} + \rho^{33} \ddot{v}^L + \rho^{NP} \varepsilon_N^L \varepsilon_P^R \ddot{v}_R, \\ m^K,{}_K + \varepsilon_{MN} p^{MN} + m &= \varepsilon_{MN} \rho^N \ddot{u}^M - \rho^{L3} \ddot{v}_L + \rho^L_L \ddot{v}. \end{aligned}$$

Korzystając z [1] podamy w p. 2 postać równań (1.1) dla płaskiego ustroju siatkowego, którego osie łączników są łukami kołowymi, a jedna ich główna oś bezwładności przekroju poprzecznego jest nachylona do płaszczyzny π pod kątem φ (rys. 1).



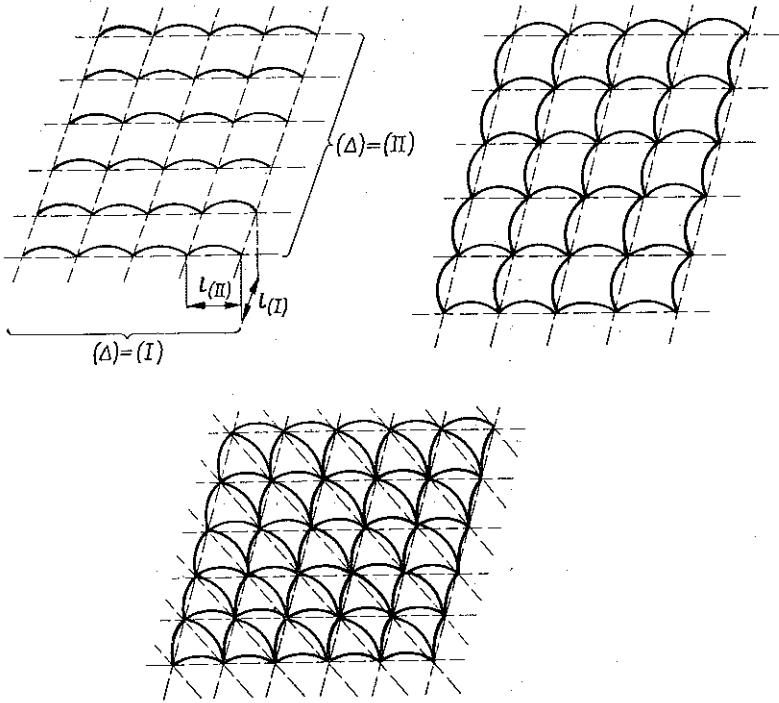
Rys. 1

W p. 3 podane zostaną dla powyższego ustroju siatkowego składowe tensorów charakteryzujących wpływy temperatur działających na łączniki ustroju. Wreszcie w p. 4 przedstawione zostanie rozwiązanie ogólne dla pasma siatkowego o zakrzywionych łącznikach.

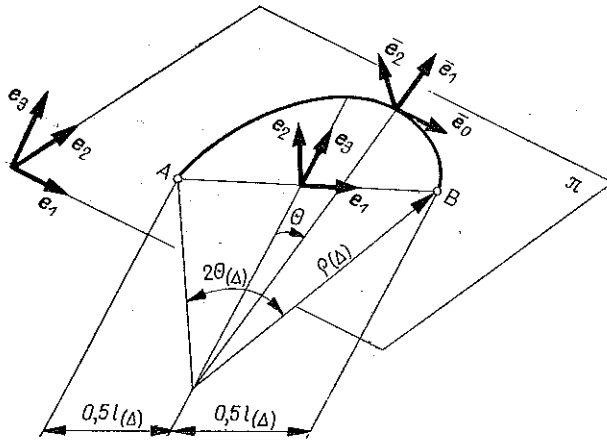
2. Własności sprężyste

Przedmiotem rozważań jest płaski ustrój siatkowy złożony z prętów sztywno połączonych w węzłach, których cięciwy (odcinki proste ograniczone końcami osi prętów) tworzą T rodzin linii łamanych (rys. 2). Zajmiemy się najpierw jednym łącznikiem, którego cięciwa osi jest odcinkiem dowolnej rodziny Δ . Wielkości dotyczące tego łącznika będziemy odnosić do kartezjańskiego układu współrzędnych $x_{(\Delta)}^a$ (gdzie $a = 1, 2, 3$, a $\Delta = I, II$ lub $\Delta = I, II, III$), którego początek przyjęto w środku cięciwy osi pręta (rys. 1). Powyższy układ współrzędnych $x_{(\Delta)}^a$ przyjmujemy dla każdego łącznika niezależnie oznaczając p. zez $e_a^{(\Delta)}$ bazę wektorową. Równanie osi pręta napiszemy w postaci

$$x^k = \psi_{(\Delta)}^k(s), \quad k = 1, 2, 3.$$



Rys. 2



Rys. 3

Wprowadzamy następnie ortogonalną bazę wektorów $\bar{e}_A^\alpha(s)$ (1) (s oznacza długość osi nieodkształconego pręta), w której wektor o składowych \bar{e}_0^α jest styczny do osi pręta, a dwa pozostałe wektory są skierowane wzdłuż głównych centralnych osi bezwładności przekrojów pręta (rys. 3).

(1) Wskaźniki oznaczone przez A, B, C przebiegają ciąg liczb 0, 1, 2.

Określmy własności sprężyste pojedynczego łącznika rodziny (Δ), korzystając ze wzorów podanych w [1], które mają postać:

$$\begin{aligned}
 A^{KLMN} &\equiv \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^L e_{(\Delta)\beta}^N A_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 A^{KLM} &\equiv \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^L e_{(\Delta)\beta}^3 A_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 A^{KM} &\equiv \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^3 e_{(\Delta)\beta}^3 A_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 C^{KLMN} &\equiv \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^L e_{(\Delta)\beta}^N C_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 C^{KLM} &\equiv \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^L e_{(\Delta)\beta}^3 C_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 C^{KM} &\equiv \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^3 e_{(\Delta)\beta}^3 C_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 B^{KLMN} &\equiv \sum_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^L e_{(\Delta)\beta}^N B_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 {}'B^{KLM} &\equiv \sum_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^L e_{(\Delta)\beta}^3 B_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 {}''B^{KMN} &\equiv \sum_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^3 e_{(\Delta)\beta}^N B_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}, \\
 B^{KM} &\equiv \sum_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^M e_{(\Delta)\alpha}^3 e_{(\Delta)\beta}^3 B_{(\Delta)}^{\alpha\beta} l_{(\Delta)} l_{(\Delta)}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Występujące w (2.1) wielkości $A_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$, $B_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$, $C_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$ otrzymamy przez odwrócenie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{(\Delta)}^{\alpha\beta} & B_{(\Delta)}^{\alpha\beta} \\ B_{(\Delta)}^{\beta\alpha} & C_{(\Delta)}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \hat{A}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} & \hat{B}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} \\ \hat{B}_{(\Delta)}^{\beta\alpha} & \hat{C}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}^{-1},
 \tag{2.2}$$

gdzie składowe tensorów $\hat{A}_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$, $\hat{B}_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$ i $\hat{C}_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$ wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} &\equiv \int_L R_{(\Delta)}^{\alpha\beta} ds + \varepsilon_{\delta\gamma}^{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu}^{\beta} \int_L s_{(\Delta)}^{\delta\mu} \psi_{(\Delta)}^{\gamma} \psi_{(\Delta)}^{\nu} ds, \\
 \hat{B}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} &\equiv \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha} \int_L S_{(\Delta)}^{\beta\nu} \psi_{(\Delta)}^{\mu} ds, \\
 \hat{C}_{(\Delta)}^{\alpha\beta} &\equiv \int_L S_{(\Delta)}^{\alpha\beta} ds.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

We wzorach tych występujące wielkości $R_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$ i $S_{(\Delta)}^{\alpha\beta}$ mają postać

$$\begin{aligned}
 R_{(\Delta)}^{\alpha\beta} &\equiv \bar{e}_{(\Delta)A}^{\alpha} \bar{e}_{(\Delta)B}^{\beta} r_{(\Delta)}^{AB}, \\
 S_{(\Delta)}^{\alpha\beta} &\equiv \bar{e}_{(\Delta)A}^{\alpha} \bar{e}_{(\Delta)B}^{\beta} s_{(\Delta)}^{AB},
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

przy czym $(r_{(A)}^{AB})^{-1} = (s_{(A)}^{AB})^{-1} = 0$ dla $A \neq B$ oraz $(r_{(A)}^{00})^{-1}$, $(r_{(A)}^{11})^{-1}$ i $(r_{(A)}^{22})^{-1}$ są kolejno sztywnością podłużną i głównymi sztywnościami ścinania przekroju poprzecznego pręta, $(s_{(A)}^{00})^{-1}$, $(s_{(A)}^{11})^{-1}$ i $(s_{(A)}^{22})^{-1}$ są kolejno sztywnością skrętną i głównymi sztywnościami zginania przekroju poprzecznego łącznika. Przez \bar{e}_A^a oznaczono iloczyny skalarowe baz wektorowych \bar{e}_A i e_A^a . Wyznaczając składowe \bar{e}_A^a dla łącznika przedstawionego na rys. 3 otrzymamy

$$(2.5) \quad \bar{e}_A^a = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$A = 0, 1, 2, \quad a = 1, 2, 3.$$

Oznaczając przez

$$r^{00} = (EA)_{(A)}^{-1}, \quad r^{11} = (GA_{a_1})_{(A)}^{-1}, \quad r^{22} = (GA_{a_2})_{(A)}^{-1},$$

$$s^{00} = (GJ_a)_{(A)}^{-1}, \quad s^{11} = (EJ_1)_{(A)}^{-1}, \quad s^{22} = (EJ_2)_{(A)}^{-1}$$

i wyznaczając postać funkcji $\psi_{(A)}^y$ dla łuku kołowego

$$(2.6) \quad \psi_{(A)}^y = \begin{bmatrix} \varrho_{(A)} \sin \theta \\ 0 \\ \varrho_{(A)} (\cos \theta - \cos \theta_{(A)}) \end{bmatrix},$$

możemy określić wielkości $\hat{A}_{(A)}^{ab}$, $\hat{B}_{(A)}^{ab}$ i $\hat{C}_{(A)}^{ab}$. Korzystając ze wzorów (2.3), (2.4), (2.5) oraz (2.6) otrzymamy

$$\hat{A}_{(A)}^{ab} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{(A)}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_{(A)}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{(A)}^{33} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{(A)}^{11} \equiv \frac{\varrho_{(A)} (\theta_{(A)} + \sin \theta_{(A)} \cos \theta_{(A)})}{(EA)_{(A)}} + \frac{\varrho_{(A)} (\theta_{(A)} - \sin \theta_{(A)} \cos \theta_{(A)})}{(GA_{a_2})_{(A)}} +$$

$$+ \frac{\varrho_{(A)}^3 (\theta_{(A)} - 3 \sin \theta_{(A)} \cos \theta_{(A)} + \cos^2 \theta_{(A)} \cdot 2\theta_{(A)})}{(EJ_1)_{(A)}},$$

$$\hat{A}_{(A)}^{22} \equiv \frac{2 \theta_{(A)} \varrho_{(A)}}{(GA_{a_1})_{(A)}} + \frac{\varrho_{(A)}^3 \cos^2 \theta_{(A)} (\theta_{(A)} - \sin \theta_{(A)} \cos \theta_{(A)})}{(EJ_2)_{(A)}} +$$

$$+ \frac{\varrho_{(A)}^3 (2 \theta_{(A)} + (\cos^2 \theta_{(A)}) \theta_{(A)} - 4/3 \sin^3 \theta_{(A)} \cos \theta_{(A)} - 1/3 \cos^3 \theta_{(A)} \sin \theta_{(A)})}{(GJ_a)_{(A)}} -$$

$$- \frac{8/3 \sin \theta_{(A)} \cos \theta_{(A)}}{(GJ_a)_{(A)}},$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{(d)}^{33} &\equiv \frac{\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(EA)_{(d)}} + \frac{\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(GA_{\alpha_2})_{(d)}} + \\
 &\quad + \frac{\varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(EJ_1)_{(d)}}, \\
 \hat{B}_{(d)}^{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_{(d)}^{12} & 0 \\ \hat{B}_{(d)}^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \hat{B}_{(d)}^{12} &\equiv \frac{\varrho_{(d)}^2 (2 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 2 \sin \theta_{(d)})}{(EJ_1)_{(d)}}, \\
 \hat{B}_{(d)}^{21} &\equiv - \frac{\varrho_{(d)}^2 \cos \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(EJ_2)_{(d)}} + \\
 &\quad + \frac{\varrho_{(d)}^2 (1/3 \cos^2 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} + 4/3 \sin \theta_{(d)} + 2/3 \sin^3 \theta_{(d)} - \cos \theta_{(d)} \theta_{(d)})}{(GJ_a)_{(d)}}, \\
 \hat{C}_{(d)}^{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{(d)}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{C}_{(d)}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{(d)}^{33} \end{bmatrix}, \\
 \hat{C}_{(d)}^{11} &\equiv \frac{\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \cos \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)})}{(GJ_a)_{(d)}} + \frac{\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(EJ_2)_{(d)}}, \\
 \hat{C}_{(d)}^{22} &\equiv \frac{2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)}}{(EJ_1)_{(d)}}, \\
 \hat{C}_{(d)}^{33} &\equiv \frac{\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(GJ_a)_{(d)}} + \frac{\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})}{(EJ_2)_{(d)}}.
 \end{aligned}$$

Wielkości $A_{(d)}^{\alpha\beta}$, $B_{(d)}^{\alpha\beta}$ i $C_{(d)}^{\alpha\beta}$ otrzymamy zgodnie z (2.2), korzystając z następujących zależności:

$$\begin{aligned}
 [C_{(d)}^{\alpha\beta}] &\equiv [[\hat{C}_{(d)}^{\alpha\beta}] - [\hat{B}_{(d)}^{\beta\alpha}] [\hat{A}_{(d)}^{\alpha\beta}]^{-1} [\hat{B}_{(d)}^{\alpha\beta}]]^{-1}, \\
 [B_{(d)}^{\beta\alpha}] &\equiv - [C_{(d)}^{\alpha\beta}] [\hat{B}_{(d)}^{\beta\alpha}] [\hat{A}_{(d)}^{\alpha\beta}]^{-1}, \\
 [B_{(d)}^{\alpha\beta}] &\equiv - [\hat{A}_{(d)}^{\alpha\beta}]^{-1} [\hat{B}_{(d)}^{\alpha\beta}] [C_{(d)}^{\alpha\beta}], \\
 [A_{(d)}^{\alpha\beta}] &\equiv [\hat{A}_{(d)}^{\alpha\beta}]^{-1} - [\hat{A}_{(d)}^{\alpha\beta}]^{-1} [\hat{B}_{(d)}^{\alpha\beta}] [C_{(d)}^{\alpha\beta}],
 \end{aligned}$$

mianowicie

$$A_{(d)}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A_{(d)}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{(d)}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{(d)}^{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 A_{(d)}^{11} &\equiv (EA)_{(d)} \left[\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(EA)_{(d)}}{(GA_{a_2})_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \right. \\
 &- \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(EA)_{(d)} \varrho_{(d)}^3}{(EJ_1)_{(d)}} (\theta_{(d)} - 3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} 2 \theta_{(d)}) \left. \right]^{-1} + \\
 &+ (EJ_1)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)}^2 (EA)_{(d)}^2 \{ 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} - (EA)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)} \varrho_{(d)}^4 (2 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - \\
 &- 2 \sin \theta_{(d)})^2 [\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (GA_{a_2})_{(d)} (EJ_1)_{(d)} + \\
 &+ \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (EA)_{(d)} (EJ_1)_{(d)} + \\
 &+ (EA)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - 3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} 2 \theta_{(d)}) \}^{-1} \times \\
 &\times \varrho_{(d)}^4 (2 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 2 \sin \theta_{(d)})^2 [\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (GA_{a_2})_{(d)} \times \\
 &\times (EJ_1)_{(d)} + \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (EJ_1)_{(d)} (EA)_{(d)} + \\
 &+ \varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - 3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} 2 \theta_{(d)}) (EA)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)}]^{-2}, \\
 (2.9) \quad A_{(d)}^{22} &\equiv (EJ_2)_{(d)} \left[\varrho_{(d)}^3 \cos^2 \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} \frac{(EJ_2)_{(d)}}{(GA_{a_1})_{(d)}} + \right. \\
 &+ \frac{(EJ_2)_{(d)}}{(GJ_{\bar{a}})_{(d)}} \varrho_{(d)}^3 (2 \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} \theta_{(d)} - 4/3 \sin^3 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - \\
 &- 1/3 \cos^3 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} - 8/3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) \left. \right]^{-1} + (GJ_{\bar{a}})_{(d)} (GA_{a_1})^2 \times \\
 &\times \left\{ \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(GJ_{\bar{a}})_{(d)}}{(EJ_2)_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) - \right. \\
 &- (GA_{a_1})_{(d)} [(EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 (1/3 \cos^2 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} + 4/3 \sin \theta_{(d)} + 2/3 \sin^3 \theta_{(d)} - \\
 &- \cos \theta_{(d)} \theta_{(d)}) - (GJ_{\bar{a}})_{(d)} \varrho_{(d)}^2 \cos \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^2 \times \\
 &\times [(EJ_2)_{(d)} (EJ_2)_{(d)} (GJ_{\bar{a}})_{(d)} 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} + (GA_{a_1})_{(d)} (GJ_{\bar{a}})_{(d)} \varrho_{(d)}^3 \cos^2 \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \\
 &- \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + (GA_{a_1})_{(d)} (EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (2 \theta_{(d)} + \theta_{(d)} \cos^2 \theta_{(d)} - \\
 &- 4/3 \sin^3 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 1/3 \cos^3 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} - 8/3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) \left. \right]^{-1} \times \\
 &\times [(EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 (1/3 \cos^2 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} + 4/3 \sin \theta_{(d)} + 2/3 \sin^3 \theta_{(d)} - \cos \theta_{(d)} \theta_{(d)}) - \\
 &- (GJ_{\bar{a}})_{(d)} \varrho_{(d)}^2 \cos \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^2 \times \\
 &\times [2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} (EJ_2)_{(d)} (GJ_{\bar{a}})_{(d)} + \varrho_{(d)}^3 \cos^2 \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) \times \\
 &\times (GA_{a_1})_{(d)} (GJ_{\bar{a}})_{(d)} + (GA_{a_1})_{(d)} (EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (2 \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} \theta_{(d)} - \\
 &- 4/3 \sin^3 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 1/3 \cos^3 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} - 8/3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) \left. \right]^{-2}, \\
 A_{(d)}^{33} &\equiv (EJ_1)_{(d)} \left[\varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(EJ_1)_{(d)}}{(GA_{a_2})_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \right. \\
 &- \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(EJ_1)_{(d)}}{(EA)_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) \left. \right]^{-1},
 \end{aligned}$$

$$[B_{(d)}^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & B_{(d)}^{12} & 0 \\ B_{(d)}^{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_{(d)}^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & B_{(d)}^{21} & 0 \\ B_{(d)}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} B_{(d)}^{12} \equiv & - (GA_{a_2})_{(d)} (EJ_1)_{(d)} (EA)_{(d)} \{ 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} - \\ & - (EA)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)} \varrho_{(d)}^4 (2 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 2 \sin \theta_{(d)})^2 [\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \\ & + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (GA_{a_2})_{(d)} (EJ_1)_{(d)} + \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \\ & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (EA)_{(d)} (EJ_1)_{(d)} + (EA)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - \\ & - 3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} 2 \theta_{(d)})]^{-1} \}^{-1} \varrho_{(d)}^2 (2 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 2 \sin \theta_{(d)}) \times \\ & \times [(GA_{a_2})_{(d)} (EJ_1)_{(d)} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + (EA)_{(d)} (EJ_1)_{(d)} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \\ & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + (EA)_{(d)} (GA_{a_2})_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - 3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} 2 \theta_{(d)})]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{(d)}^{21} \equiv & - (GA_{a_1})_{(d)} (GJ_a)_{(d)} \left\{ \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(GJ_a)_{(d)}}{(EJ_2)_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \right. \\ & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) - \frac{(GA_{a_1})_{(d)}}{(EJ_2)_{(d)}} [(EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 (1/3 \cos \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} + 4/3 \sin \theta_{(d)} + \\ & + 2/3 \sin^3 \theta_{(d)} - \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) - (GJ_a)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 \cos \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^2 \times \\ & \times [(EJ_2)_{(d)} (GJ_a)_{(d)} 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} + (GA_{a_1})_{(d)} (GJ_a)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 \cos^2 \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \\ & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + (GA_{a_1})_{(d)} (EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (2 \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} \theta_{(d)} - \\ & - 4/3 \sin^3 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 1/3 \cos^3 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} - 8/3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^{-1} \}^{-1} \times \\ & \times [(EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 (1/3 \cos^2 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} + 4/3 \sin \theta_{(d)} + 2/3 \sin^3 \theta_{(d)} - \cos \theta_{(d)} \theta_{(d)}) - \\ & - (GJ_a)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 \cos \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})] [2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} (EJ_2)_{(d)} (GJ_a)_{(d)} + \\ & + \varrho_{(d)}^3 \cos^2 \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (GJ_a)_{(d)} (GA_{a_1})_{(d)} + \\ & + (GA_{a_1})_{(d)} (EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (2 \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} \theta_{(d)} - 4/3 \sin^3 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - \\ & - 1/3 \cos^3 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} - 8/3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^{-1}, \end{aligned}$$

$$[C_{(d)}^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} C_{(d)}^{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{(d)}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{(d)}^{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} C_{(d)}^{11} \equiv & (GJ_a)_{(d)} \left\{ \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \frac{(GJ_a)_{(d)}}{(EJ_2)_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \right. \\ & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) - \frac{(GA_{a_1})_{(d)}}{(EJ_2)_{(d)}} [(EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^2 (1/3 \cos^2 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} + 4/3 \sin \theta_{(d)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2/3 \sin^3 \theta_{(d)} - \cos \theta_{(d)} \theta_{(d)} - (GJ_a) \varrho_{(d)}^2 \cos \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^2 \times \\
 & \times [(EJ_2)_{(d)} (GJ_a)_{(d)} 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} + (GA_{a_1})_{(d)} (GJ_a)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 \cos^2 \theta_{(d)} (\theta_{(d)} - \\
 & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + (GA_{a_1})_{(d)} (EJ_2)_{(d)} \varrho_{(d)}^3 (2 \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} \theta_{(d)} - \\
 & - 4/3 \sin^3 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 1/3 \cos^3 \theta_{(d)} \sin \theta_{(d)} - 8/3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)})]^{-1} \Big\}^{-1}, \\
 C_{(d)}^{22} & \equiv (EJ_1)_{(d)} \{ 2 \theta_{(d)} \varrho_{(d)} - (EA)_{(d)} (GA_{a_2}) \varrho_{(d)}^4 (2 \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} - 2 \sin \theta_{(d)})^2 \times \\
 & \times [\varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (GA_{a_2})_{(d)} (EJ_1) + \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \\
 & - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) (EA)_{(d)} (EJ_1)_{(d)} + (EA)_{(d)} (GA_{a_2}) \varrho_{(d)}^3 (\theta_{(d)} - \\
 & - 3 \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)} + \cos^2 \theta_{(d)} 2 \theta_{(d)})]^{-1} \Big\}^{-1}, \\
 C_{(d)}^{33} & \equiv (EJ_2)_{(d)} \left\{ \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} + \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) + \right. \\
 & \left. + \frac{(EJ_2)_{(d)}}{(GJ_a)_{(d)}} \varrho_{(d)} (\theta_{(d)} - \sin \theta_{(d)} \cos \theta_{(d)}) \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $\tilde{t}_{(d)}^k$ składowe wektora jednostkowego normalnego do wektora o składowych $t_{(d)}^k$ (rys. 2); tworząc iloczyny skalarowe $e_{ak}^{(d)} = e_a^{(d)} \cdot e_k^{(d)}$, znajdziemy

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad [e_{ak}^{(d)}] &= \begin{bmatrix} t_{(d)}^1 & t_{(d)}^2 & 0 \\ \tilde{t}_{(d)}^1 \cos \varphi & \tilde{t}_{(d)}^2 \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\tilde{t}_{(d)}^1 \sin \varphi & -\tilde{t}_{(d)}^2 \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \\
 & a = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (2.9) i (2.10) do wzoru (2.1) oraz wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad R^{(d)} & \equiv A_{(d)}^{11} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, & R_1^{(d)} & \equiv A_{(d)}^{22} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, & R_2^{(d)} & \equiv A_{(d)}^{33} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, \\
 B^{(d)} & \equiv B_{(d)}^{12} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, & B_1^{(d)} & \equiv B_{(d)}^{21} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, \\
 S^{(d)} & \equiv C_{(d)}^{11} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, & S_1^{(d)} & \equiv C_{(d)}^{22} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1}, & S_2^{(d)} & \equiv C_{(d)}^{33} l_{(d)} \tilde{l}_{(d)}^{-1},
 \end{aligned}$$

ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad A^{KLMN} & \equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M [\tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^N R^{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^L \tilde{t}_{(d)}^N (R_{(1)}^{(d)} \cos^2 \varphi + R_{(2)}^{(d)} \sin^2 \varphi)], \\
 A^{KLM} & \equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M \tilde{t}_{(d)}^L (R_{(1)}^{(d)} - R_{(2)}^{(d)}) \sin \varphi \cos \varphi, \\
 A^{KL} & \equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K \tilde{t}_{(d)}^L (R_{(1)}^{(d)} \sin^2 \varphi + R_{(2)}^{(d)} \cos^2 \varphi), \\
 C^{KLMN} & \equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M [\tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^N S^{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^L \tilde{t}_{(d)}^N (S_{(1)}^{(d)} \cos^2 \varphi + S_{(2)}^{(d)} \sin^2 \varphi)], \\
 C^{KLM} & \equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M \tilde{t}_{(d)}^L (S_{(1)}^{(d)} - S_{(2)}^{(d)}) \sin \varphi \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad c.d. \quad C^{KL} &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L (S_{(1)}^{(A)} \sin^2 \varphi + S_{(2)}^{(A)} \cos^2 \varphi), \\
 B^{KLMN} &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^M (t_{(A)}^L \tilde{t}_{(A)}^N B^{(A)} \cos^2 \varphi + \tilde{t}_{(A)}^L t_{(A)}^N B_{(1)}^{(A)} \cos^2 \varphi), \\
 {}'B^{KLM} &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^M t_{(A)}^L \sin \varphi B^{(A)}, \\
 {}''B^{KMN} &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^M t_{(A)}^N \sin \varphi B_{(1)}^{(A)}, \\
 B^{KM} &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

3. Wpływy termiczne

Załóżmy, że łączniki ustroju siatkowego są poddane wyłącznie wpływom termicznym. Niech rozkład temperatury T w przekroju poprzecznym dowolnego łącznika będzie określony liniową funkcją $T = T_0 + \Delta T_1 Z^1 + \Delta T_2 Z^2$, gdzie T , ΔT_1 i ΔT_2 są funkcjami współrzędnej łukowej s (lub kąta θ).

Korzystając z [1] określimy wielkości a^{KL} , a^K , c^{KL} , c^K uwzględniające wpływ temperatury zgodnie ze wzorami

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad a^{KL} &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K e_{(A)}^L a_{(A)}^\alpha \tilde{t}_{(A)}^{-1}, & a_{(A)}^K &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K e_{(A)}^\alpha a_{(A)}^\alpha \tilde{t}_{(A)}^{-1}, \\
 c^{KL} &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K e_{(A)}^L c_{(A)}^\alpha \tilde{t}_{(A)}^{-1}, & c_{(A)}^K &\equiv \sum_{(A)} t_{(A)}^K e_{(A)}^\alpha c_{(A)}^\alpha \tilde{t}_{(A)}^{-1},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} a_{(A)}^\alpha \\ c_{(A)}^\alpha \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_{(A)}^{\alpha\beta} & B_{(A)}^{\alpha\beta} \\ B_{(A)}^{\beta\alpha} & C_{(A)}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{(A)\beta} \\ \hat{c}_{(A)\beta} \end{bmatrix},$$

a wielkości $\hat{a}_{(A)\beta}$ i $\hat{c}_{(A)\beta}$ są określone przez wzory

$$(3.3) \quad \hat{a}_{(A)}^\alpha \equiv \int_L R^\alpha ds - \varepsilon_{\beta\mu}^\alpha \int_L S_{(A)}^\beta \psi_{(A)}^\mu ds, \quad \hat{c}_{(A)}^\alpha \equiv \int_L S_{(A)}^\alpha ds.$$

Występujące w (3.3) wyrażenia podcałkowe R^α i S^α określamy zgodnie ze wzorami

$$(3.4) \quad R_{(A)}^\alpha = \bar{e}_{(A)A}^\alpha r_{(A)}^A, \quad S_{(A)}^\alpha = \bar{e}_{(A)A}^\alpha s_{(A)}^A,$$

gdzie $r^0 = \alpha T_0$, $r^1 = r^2 = s^0 = 0$ oraz $s^1 = \alpha \Delta T_2$, $s^2 = \alpha \Delta T_1$; przy czym α jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej.

Zgodnie z (3.3), (3.4), (2.5) i (2.6) otrzymamy

$$(3.5) \quad [\hat{a}_{(A)}^\alpha] = \begin{bmatrix} \int_{-\theta_{(A)}}^{\theta_{(A)}} \cos \theta \alpha_{(A)} (T_0)_{(A)} \varrho_{(A)} d\theta - \int_{-\theta_{(A)}}^{\theta_{(A)}} \alpha_{(A)} (\Delta T_2)_{(A)} \varrho_{(A)}^2 (\cos \theta - \\ - \cos \theta_{(A)}) d\theta \\ - \int_{-\theta_{(A)}}^{\theta_{(A)}} \sin \theta \alpha_{(A)} (\Delta T_1)_{(A)} \varrho_{(A)}^2 \cos \theta_{(A)} d\theta \\ \int_{-\theta_{(A)}}^{\theta_{(A)}} \sin \theta \alpha_{(A)} (T_0)_{(A)} \varrho_{(A)} d\theta + \int_{-\theta_{(A)}}^{\theta_{(A)}} \alpha_{(A)} (\Delta T_2)_{(A)} \varrho_{(A)}^2 \sin \theta d\theta \end{bmatrix},$$

$$(3.5) \quad \text{c.d.} \quad [\hat{c}_{(d)}^a] = \begin{bmatrix} \int_{-\theta_{(d)}}^{\theta_{(d)}} \alpha_{(d)} (\Delta T_1)_{(d)} \varrho_{(d)} \sin \theta \, d\theta \\ \int_{-\theta_{(d)}}^{\theta_{(d)}} \alpha_{(d)} (\Delta T_2)_{(d)} \varrho_{(d)} \, d\theta \\ \int_{-\theta_{(d)}}^{\theta_{(d)}} \alpha_{(d)} (\Delta T_1)_{(d)} \varrho_{(d)} \cos \theta \, d\theta \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując zależności (3.2), (3.5) i (2.9), znajdziemy

$$(3.6) \quad [a_{(d)}^a] = \begin{bmatrix} A_{(d)}^{11} \hat{a}_{(d)1} + B_{(d)}^{12} \hat{c}_{(d)2} \\ A_{(d)}^{22} \hat{a}_{(d)2} + B_{(d)}^{21} \hat{c}_{(d)1} \\ A_{(d)}^{33} \hat{a}_{(d)3} \end{bmatrix},$$

$$[c_{(d)}^a] = \begin{bmatrix} B_{(d)}^{21} \hat{a}_{(d)2} + C_{(d)}^{11} \hat{c}_{(d)1} \\ B_{(d)}^{12} \hat{a}_{(d)1} + C_{(d)}^{22} \hat{c}_{(d)2} \\ C_{(d)}^{33} \hat{c}_{(d)3} \end{bmatrix}.$$

Wreszcie wzory (3.1) oraz (2.10) i (2.9) prowadzą do formuł następujących:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} a^{KL} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K (t_{(d)}^L a_{(d)}^1 \hat{l}_{(d)}^{-1} + \hat{i}_{(d)}^L \cos \varphi a_{(d)}^2 \hat{l}_{(d)}^{-1} - \hat{i}_{(d)}^L \sin \varphi a_{(d)}^3 \hat{l}_{(d)}^{-1}), \\ a^K &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K (\sin \varphi a_{(d)}^2 \hat{l}_{(d)}^{-1} + \cos \varphi a_{(d)}^3 \hat{l}_{(d)}^{-1}), \\ c^{KL} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K (t_{(d)}^L c_{(d)}^1 + \hat{i}_{(d)}^L \cos \varphi c_{(d)}^2 - \hat{i}_{(d)}^L \sin \varphi c_{(d)}^3) \hat{l}_{(d)}^{-1}, \\ c^K &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K (\sin \varphi c_{(d)}^2 + \cos \varphi c_{(d)}^3) \hat{l}_{(d)}^{-1}. \end{aligned}$$

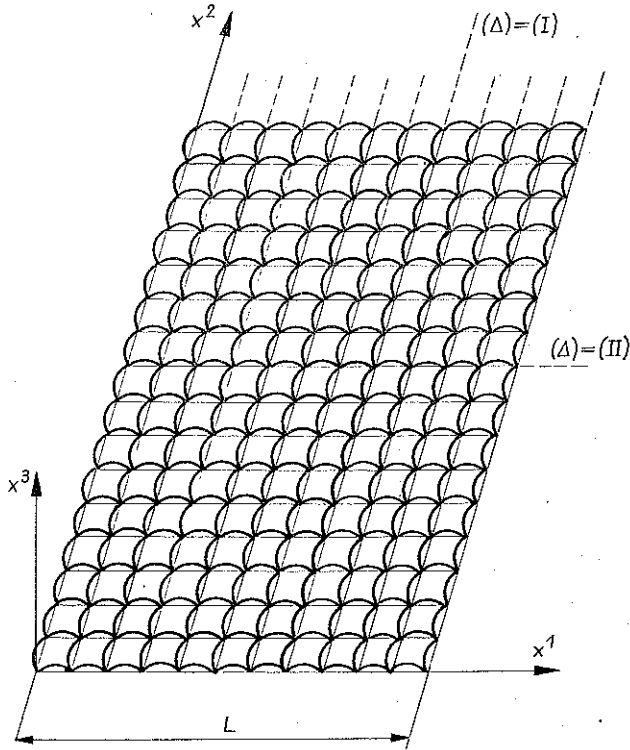
4. Przykład. Pasma siatkowe o prętach zakrzywionych

W dalszym ciągu założymy, że rozpatrywane przez nas ustroje siatkowe są jednorodnie [tj. wszystkie składowe (2.21) są stałymi w każdym kartezjańskim układzie współrzędnych] i tworzą jednokierunkowo obciążone pasmo o brzegach $x^1 = 0$ i $x^1 = L$ (rys. 4). Składowe przemieszczenia zależą od jednej zmiennej x^1 . Równania geometryczne, z których korzystamy dalej, sprowadzą się wtedy do postaci następującej:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= u_{1,1}, & \gamma_{12} &= u_{2,1} - v, & \gamma_{21} &= v, & \gamma_1 &= u_{,1} + v^2, & \gamma_2 &= -v^1, \\ \varkappa_{11} &= v_{1,1}, & \varkappa_{12} &= v_{2,1}, & \varkappa_{21} &= \varkappa_{22} = 0, & \varkappa_1 &= v_{,1}, & \varkappa_2 &= 0. \end{aligned}$$

Równania równowagi (3.1) będą miały postać

$$(4.2) \quad \begin{aligned} p^{11}_{,1} &= 0, & p^{12}_{,1} &= 0, & m^{1,1} + p^{12} - p^{21} &= 0, \\ p^1_{,1} &= 0, & m^{11}_{,1} + p^2 &= 0, & m^{12}_{,1} - p^1 &= 0, \end{aligned}$$



Rys. 4

a związki fizyczne, po wypisaniu ich w formie rozwiniętej zgodnie z konwencją sumacyjną i uwzględnieniu (5.1) — są określone przez następujące formuły:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} p^{11} &= A^{1111} \gamma_{11} + A^{1112} \gamma_{12} + A^{1121} \gamma_{21} + A^{1111} \gamma_1 + A^{112} \gamma_2 + \\ &\quad + B^{1111} \kappa_{11} + B^{1112} \kappa_{12} + 'B^{111} \kappa_1 + a^{11}, \\ p^{12} &= A^{1211} \gamma_{11} + A^{1212} \gamma_{12} + A^{1221} \gamma_{21} + A^{121} \gamma_1 + A^{122} \gamma_2 + \\ &\quad + B^{1211} \kappa_{11} + B^{1212} \kappa_{12} + 'B^{121} \kappa_1 + a^{12}, \\ p^{21} &= A^{2111} \gamma_{11} + A^{2112} \gamma_{12} + A^{2121} \gamma_{21} + A^{211} \gamma_1 + A^{212} \gamma_2 + \\ &\quad + B^{2111} \kappa_{11} + B^{2112} \kappa_{12} + 'B^{211} \kappa_1 + a^{21}, \\ m^1 &= 'B^{111} \gamma_{11} + 'B^{121} \gamma_{12} + 'B^{211} \gamma_{21} + C^{111} \kappa_{11} + C^{112} \kappa_{12} + C^{11} \kappa_1 + c^1, \\ p^1 &= A^{112} \gamma_{12} + A^{121} \gamma_{21} + A^{111} \gamma_{11} + A^{11} \gamma_1 + A^{12} \gamma_2 + ''B^{111} \kappa_{11} + \\ &\quad + ''B^{112} \kappa_{12} + a^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad p^2 &= A^{212} \gamma_{12} + A^{221} \gamma_{21} + A^{211} \gamma_{11} + A^{21} \gamma_1 + A^{22} \gamma_2 + \\
 &\quad + {}''B^{211} \kappa_{11} + {}''B^{212} \kappa_{12} + a^2, \\
 m^{12} &= B^{1212} \gamma_{12} + B^{2112} \gamma_{21} + B^{1112} \gamma_{11} + {}''B^{112} \gamma_1 + {}''B^{212} \gamma_2 + \\
 &\quad + C^{1211} \kappa_{11} + C^{1212} \kappa_{12} + C^{121} \kappa_1 + c^{12}, \\
 m^{11} &= B^{1211} \gamma_{12} + B^{2111} \gamma_{21} + B^{1111} \gamma_{11} + {}''B^{111} \gamma_1 + {}''B^{211} \gamma_2 + \\
 &\quad + C^{1111} \kappa_{11} + C^{1112} \kappa_{12} + C^{111} \kappa_1 + c^{11}.
 \end{aligned}$$

Przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia będziemy się wzorować na pracy [5]. Założmy, że kąt φ , jaki tworzy z płaszczyzną π jedna z głównych osi bezwładności przekroju poprzecznego prętów, jest równy zeru. W przypadku tym $A^{KLM} = C^{KLM} = {}'B^{KLM} = {}''B^{KMN} = 0$, a składowe (2.12) i (3.7) upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned}
 A^{KLMN} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M [t_{(d)}^L t_{(d)}^N R^{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^L \tilde{t}_{(d)}^N R_{(1)}^{(d)}], \\
 A^{KL} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^L R_{(2)}^{(d)}, \\
 (4.4) \quad C^{KLMN} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M (t_{(d)}^L t_{(d)}^N S^{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^L \tilde{t}_{(d)}^N S_{(1)}^{(d)}), \\
 C^{KL} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^L s_{(2)}^{(d)}, \\
 B^{KLMN} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M (t_{(d)}^L t_{(d)}^N B^{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^L \tilde{t}_{(d)}^N B_{(1)}^{(d)});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^{KL} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K (t_{(d)}^L a_{(d)}^1 \tilde{l}_{(d)}^{-1} + \tilde{t}_{(d)}^L a_{(d)}^2 \tilde{l}_{(d)}^{-1}), \\
 a^K &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K a_{(d)}^3 \tilde{l}_{(d)}^{-1}, \\
 (4.5) \quad c^{KL} &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K (t_{(d)}^L c_{(d)}^1 + \tilde{t}_{(d)}^L c_{(d)}^2) \tilde{l}_{(d)}^{-1}, \\
 c^K &\equiv \sum_{(d)} t_{(d)}^K c_{(d)}^3 \tilde{l}_{(d)}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Układ równań (4.1)–(4.3) musi być spełniony dla $0 \leq x^1 \leq L$. Poszukiwane składowe stanu przemieszczenia i napięcia muszą ponadto spełniać po sześć warunków brzegowych na każdym z brzegów $x^1 = 0$ i $x^1 = L$.

Rozwiązanie ogólne układu równań (4.1)–(4.3) zależy od dwunastu stałych całkowania, które wyznaczymy z warunków brzegowych. Składowe stanu napięcia p^{11} , p^{12} i p^1 wyznaczymy bezpośrednio z równań równowagi (4.2), otrzymując

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad p^{11}(x^1) &= \bar{p}^{11}, & \bar{p}^{11} &= p^{11}(0), \\
 p^{12}(x^1) &= \bar{p}^{12}, & \bar{p}^{12} &= p^{12}(0), \\
 p^1(x^1) &= \bar{p}^1, & \bar{p}^1 &= p^1(0).
 \end{aligned}$$

Korzystając z (4.5) i (4.2)₆ wyznaczymy także składową m^{12} :

$$(4.7) \quad m^{12}(x^1) = \bar{p}^1 x^1 + \bar{m}^{12}, \quad \bar{m}^{12} = m^{12}(0).$$

Składowe stanu napięcia p^{11} , p^{12} , p^1 i m^{12} traktować będziemy jako znane. Korzystając z odpowiednich równań (4.1) i zależności (4.3) oraz (4.6), otrzymamy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} A^{1111} u_{1,1} + A^{1112} (u_{2,1} - v) + A^{1121} v + B^{1111} v_{1,1} + B^{1112} v_{2,1} + a^{11} &= \bar{p}^{11}, \\ A^{1211} u_{1,1} + A^{1212} (u_{2,1} - v) + A^{1221} v + B^{1211} v_{1,1} + B^{1212} v_{2,1} + a^{12} &= \bar{p}^{12}, \\ A^{11} (u_{1,1} + v^2) - A^{12} v^1 + a^1 &= \bar{p}^1, \\ B^{1212} (u_{2,1} - v) + B^{2112} v + B^{1112} u_{1,1} + C^{1211} v_{1,1} + \\ &+ C^{1212} v_{2,1} + c^{12} = \bar{p}^1 + \bar{m}^{12} x^1. \end{aligned}$$

Z pozostałych równań równowagi (4.2)_{3,5} i związków (4.1) i (4.3) znajdziemy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} [C^{1111} v_{1,1} + C^{1112} v_{2,1} + B^{1211} (u_{2,1} - v) + B^{2111} v + \\ + B^{1111} u_{1,1} + c^{11}]_{,1} + A^{21} (u_{1,1} + v^2) - A^{22} v^1 + a^2 = 0, \\ (C^{11} v_{1,1} + c^1)_{,1} + (A^{1211} - A^{2111}) u_{1,1} + (A^{1212} - A^{2112}) (u_{2,1} - v) + \\ + (A^{1221} - A^{2121}) v + (B^{1211} - B^{2111}) v_{1,1} + (B^{1212} - B^{2112}) v_{2,1} + \\ + a^{12} - a^{21} = 0. \end{aligned}$$

Równania (4.8) i (4.9) stanowią układ sześciu równań różniczkowych dla sześciu składowych przemieszczenia u , u_K , v i v_K . Korzystając z pierwszych trzech równań (4.8) wyrazimy funkcje $u_{1,1}$, $u_{1,1}$ i $u_{2,1}$ przez v , v_1 i v_2 , uzyskując kolejno

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{1}{A^{11}} (A^{12} v^1 - a^1 + \bar{p}^1) - v^2, \\ u_{1,1} &= -\frac{1}{A^{1111}} \left[\left(B^{1112} + \frac{A^{1112} (A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111})}{A} \right) v_{2,1} + \right. \\ &+ \left(B^{1111} + \frac{A^{1112} (A^{1211} B^{1111} - B^{1211} A^{1111})}{A} \right) v_{1,1} + \\ &+ \left(A^{1121} + \frac{A^{1112} (A^{1211} A^{1121} - A^{1111} A^{1221})}{A} \right) v - \\ &\left. - \left(1 + \frac{A^{1112} A^{1211}}{A} \right) (\bar{p}^{11} - a^{11}) - \frac{A^{1112} A^{1111}}{A} (\bar{p}^{12} - a^{12}) \right], \\ u_{2,1} &= v + \frac{1}{A} [(A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111}) v_{2,1} + \\ &+ (A^{1211} B^{1111} - B^{1211} A^{1111}) v_{1,1} + (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}) v + \\ &+ A^{1111} (\bar{p}^{12} - a^{12}) - A^{1211} (\bar{p}^{11} - a^{11})], \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$(4.11) \quad A \equiv A^{1111} A^{1212} - A^{1112} A^{1211},$$

przy czym $A > 0$. Wynika to z dodatniej określoności formy kwadratowej, przedstawiającej energię sprężystą układu (por. [4]). Pochodną $v_{2,1}$ wyznaczmy z równania (4.8)₄

$$(4.12) \quad v_{2,1} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A^{1111}}{[C^{1212} A^{1111} + A^{-1} (B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) (B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}) - (B^{1112})^2]} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \left(B^{1211} - \frac{A^{1211} B^{1111}}{A^{1111}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(C^{1211} - \frac{B^{1112} B^{1111}}{A^{1111}} \right) \right] v_{1,1} + \left[\frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(A^{1221} - \frac{A^{1211} A^{1121}}{A^{1111}} \right) + \left(\frac{B^{1112} A^{1121}}{A^{1111}} - B^{2112} \right) \right] v + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \left[\frac{A^{1211}}{A^{1111}} (\bar{p}^{11} - a^{11}) - (\bar{p}^{12} - a^{12}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B^{1112}}{A^{1111}} (\bar{p}^{11} - a^{11}) - c^{12} + \bar{p}^{11} + \bar{m}^{12} x^1 \right\}. \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia na $u_{,1} + v^2$, $u_{1,1}$, $u_{2,1} - v$ i $v_{2,1}$ do równań (4.9), otrzymamy układ dwóch równań różniczkowych dla dwóch funkcji $v(x^1)$ i $v_1(x^1)$ w postaci

$$(4.13) \quad k_{00} v_{,11} + l_{00} v + k_{01} v_{1,1} = f_0, \quad k_{11} v_{1,11} + l_{11} v_1 + k_{10} v_{,1} = f_1,$$

gdzie oznaczono

$$k_{00} \equiv C^{11},$$

$$\begin{aligned} l_{00} \equiv & \frac{A^{1211} - A^{2111}}{A^{1111}} \left(-A^{1121} - \frac{A^{1112} (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111})}{A} \right) + \\ & + \frac{A^{1212} - A^{2112}}{A} (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}) + (A^{1221} - A^{2121}) + \\ & + \frac{A^{1211} - A^{2111}}{A^{1111}} \left\{ \left[-B^{1112} - \frac{A^{1112}}{A} (B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{A^{1212} - A^{2112}}{A} (A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111}) + B^{1212} - B^{2112} \right\} \times \\ & \times \left[C^{1212} + \frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112})}{A A^{1111}} (B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}) - \left(\frac{B^{1112}}{A^{1111}} \right)^2 \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112})}{A} \frac{(A^{1111} A^{1221} - A^{1121} A^{1211})}{A^{1111}} - \right. \\ & \left. - \frac{(B^{1112} A^{1121} - B^{2112} A^{1111})}{A^{1111}} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad c.d. \quad k_{01} \equiv & \frac{A^{1211} - A^{2111}}{A^{1111}} \left(-B^{1111} + \frac{A^{1112} (B^{1211} A^{1111} - A^{1211} B^{1111})}{A} \right) + \\
 & + \frac{A^{1212} - A^{2112}}{A} (B^{1111} A^{1211} - B^{1211} A^{1111}) + (B^{1211} - B^{2111}) + \\
 & + \left\{ \frac{A^{1211} - A^{2111}}{A^{1111}} \left[-B^{1112} - \frac{A^{1112}}{A} (B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{A^{1212} - A^{2112}}{A} (A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111}) + B^{1212} - B^{2112} \right\} \times \\
 & \times \left[C^{1212} + \frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) (B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111})}{A^{1111}} \right. \\
 & \left. - \frac{(B^{1112})^2}{A^{1111}} \right]^{-1} \left[\frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) (B^{1211} A^{1111} - A^{1211} B^{1111})}{A^{1111}} + \right. \\
 & \left. + \frac{(B^{1111} B^{1112} - C^{1211} A^{1111})}{A^{1111}} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{11} \equiv & C^{1111} + \frac{B^{1211} (B^{1111} A^{1211} - B^{1211} A^{1111})}{A} - \frac{(B^{1111})^2}{A^{1111}} \\
 & - \frac{A^{1112} (A^{1211} B^{1111} - B^{1211} A^{1111})}{A} + \left[C^{1112} - \right. \\
 & \left. - \frac{B^{1211} (A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111})}{A} + \frac{B^{1111}}{A^{1111}} \left(-B^{1112} - \frac{A^{1112} A^{1211} B^{1112}}{A} \right. \right. \\
 & \left. \left. - B^{1212} \right) \right] \left[C^{1212} + \frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \frac{B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}}{A^{1111}} \right. \\
 & \left. - \frac{(B^{1112})^2}{A^{1111}} \right]^{-1} \left[\frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) (B^{1211} A^{1111} - A^{1211} B^{1111})}{A^{1111}} + \right. \\
 & \left. + \frac{(B^{1112} B^{1111} - C^{1211} A^{1111})}{A^{1111}} \right],
 \end{aligned}$$

$$l_{11} \equiv -A^{22} + \frac{A^{21} A^{12}}{A^{11}},$$

$$\begin{aligned}
 k_{10} \equiv & \frac{B^{1211} (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111})}{A} + B^{2111} - \frac{B^{1111} A^{1121}}{A^{1111}} \\
 & - \frac{A^{1112} (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111})}{A} + \left[C^{1112} - \right. \\
 & \left. - \frac{B^{1211} (A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111})}{A} + \frac{B^{1111}}{A^{1111}} \left(-B^{1112} - \frac{A^{1112} A^{1211} B^{1112}}{A} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B^{1212} \Bigg] \left[C^{1212} + \frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}}{A A^{1111}} - \right. \\
& \left. \frac{(B^{1112})^2}{A^{1111}} \right]^{-1} \left[\frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) (A^{1221} A^{1111} - A^{1121} A^{1211})}{A A^{1111}} + \right. \\
& \left. + \frac{B^{1112} A^{1121} - B^{2112} A^{1111}}{A^{1111}} \right]; \\
f_0 \equiv & c^1_{,1} + \frac{A^{1211} - A^{2111}}{A^{1111}} \left[\left(1 + \frac{A^{1112} A^{1211}}{A} \right) (\bar{p}^{11} - a^{11}) + \bar{p}^{12} - a^{12} \right] + \\
& + \frac{A^{1212} - A^{2112}}{A} [(\bar{p}^{12} - a^{12}) A^{1111} - (\bar{p}^{11} - a^{11}) A^{1211}] + a^{12} - a^{21} + \\
& + \left\{ \frac{A^{1211} - A^{2111}}{A^{1111}} \left[-B^{1112} - \frac{A^{1112} (A^{1211} B^{1112} + B^{1212} A^{1111})}{A} \right] + \right. \\
& + \frac{(A^{1212} - A^{2112})}{A} [A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111}] + B^{1212} - B^{2112} \Bigg] \left[C^{1212} + \right. \\
(4.15) \quad & + \frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}) B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}}{A A^{1111}} - \frac{(B^{1112})^2}{A^{1111}} \Bigg]^{-1} \times \\
& \times \left\{ \frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \left[\frac{A^{1211}}{A^{1111}} (\bar{p}^{11} - a^{11}) - (a^{12} - \bar{p}^{12}) \right] - \right. \\
& \left. - c^{12} - \frac{B^{1112}}{A^{1111}} (\bar{p}^{11} - a^{11}) + \bar{p}^1 + \bar{m}^{12} x^1 \right\}, \\
f_1 \equiv & \frac{B^{1211}}{A} [(\bar{p}^{12} - a^{12}) A^{1111} - (\bar{p}^{11} - a^{11}) A^{1211}]_{,1} + C^{11}_{,1} + \\
& + \frac{B^{1111}}{A^{1111}} \left[(\bar{p}^{11} - a^{11}) \left(1 + \frac{A^{1112} A^{1211}}{A} \right) - (\bar{p}^{12} - a^{12}) \frac{A^{1112} A^{1111}}{A} \right]_{,1} + \\
& + a^2 + \frac{A^{21}}{A^{11}} (\bar{p} - a^1) + C^{1112} - \frac{B^{1211} (A^{1211} - B^{1212} A^{1111})}{A} + \\
& + \frac{B^{1111}}{A^{1111}} \left(-B^{1112} - \frac{A^{1112} A^{1211} B^{1112}}{A} - B^{1212} \right) \Bigg] \left[C^{1212} + \right. \\
& + \frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \frac{B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}}{A^{1111}} - \frac{(B^{1112})^2}{A^{1111}} \Bigg]^{-1} \times \\
& \times \left\{ \frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \left[\frac{A^{1211}}{A^{1111}} (\bar{p}^{11} - a^{11}) - a^{12} - \bar{p}^{12} \right] - c^{12} - \right. \\
& \left. - \frac{B^{1112}}{A^{1111}} (\bar{p}^{11} - a^{11}) + \bar{p}^1 + \bar{m}^{12} x^1 \right\}.
\end{aligned}$$

Powyższe współczynniki układu równań (4.13) spełniają nierówności zgodnie ze wzorami (4.4)

$$k_{00} > 0, \quad k_{11} > 0, \quad l_{00} < 0, \quad l_{11} < 0;$$

pozostałe współczynniki mają być różne (dodatnie, ujemne, lub równe zero). Równanie charakterystyczne układu (4.13) ma postać

$$(4.16) \quad a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0,$$

gdzie

$$(4.17) \quad a \equiv k_{00} k_{11}, \quad b \equiv k_{00} l_{11} + l_{00} k_{11} - k_{10} l_{01}, \quad c \equiv l_{00} l_{11},$$

przy czym $a > 0$, $b < 0$ oraz $c > 0$.

Wyróżnik równania (4.16) może być dodatni, ujemny lub równy zero.

1. Gdy wyróżnik $\Delta > 0$, to z uwagi na $-b > \sqrt{\Delta} > 0$ mamy

$$(4.18) \quad \begin{aligned} v &= Ae^{ax} + Be^{-ax} + Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} + v^*, \\ v_1 &= A_1 e^{ax} + B_1 e^{-ax} + C_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x} + v_1^*, \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}, \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}};$$

v^* i v_1^* oznacza całki szczególne układu równań (4.13). Stałe A_1, B_1, C_1 i D_1 w przypadku ogólnym można wyrazić przez stałe A, B, C i D . Po podstawieniu (4.18) do jednego z równań (4.13) otrzymamy

$$(4.19) \quad \begin{aligned} A_1 (ak_{01}) + A (\alpha^2 k_{00} + l_{00}) &= 0, \\ -B_1 (ak_{01}) + B (\alpha^2 k_{00} + l_{00}) &= 0, \\ C_1 (\beta k_{01}) + C (\beta^2 k_{00} + l_{00}) &= 0, \\ -D_1 (\beta k_{01}) + D (\beta^2 k_{00} + l_{00}) &= 0. \end{aligned}$$

2. Gdy wyróżnik $\Delta = 0$ to rozwiązanie układu (4.13) ma postać

$$(4.20) \quad \begin{aligned} v &= Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x} + Cxe^{\gamma x} + Dxe^{-\gamma x} + v^*, \\ v_1 &= A_1 e^{\gamma x} + B_1 e^{-\gamma x} + C_1 xe^{\gamma x} + D_1 xe^{-\gamma x} + v_1^*, \end{aligned}$$

gdzie $\gamma = \sqrt{-b/2a}$.

Związek pomiędzy stałymi całkowania A_1, B_1, C_1, D_1 a A, \dots, D otrzymamy po wykorzystaniu (4.20) i (4.13):

$$(4.21) \quad \begin{aligned} A_1 \gamma k_{01} + C_1 k_{01} + A (k_{00} \gamma^2 + l_{00}) + 2C\gamma k_{00} &= 0, \\ -B_1 \gamma k_{01} + D_1 k_{01} + B (k_{00} \gamma^2 + l_{00}) - 2D\gamma k_{00} &= 0, \\ C_1 \gamma k_{01} + C (\gamma^2 k_{00} + l_{00}) = 0, \quad -D_1 k_{01} \gamma + D (\gamma^2 k_{00} + l_{00}) &= 0. \end{aligned}$$

3. Gdy wreszcie $\Delta < 0$, to po wprowadzeniu dodatnich liczb rzeczywistych μ i ν ,

$$\mu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - \Delta a}}{a}}, \quad \nu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\Delta}{a(-b + \sqrt{b^2 - \Delta})}}$$

znajdziemy rozwiązanie układu (4.13) w postaci

$$(4.22) \quad \begin{aligned} v &= Ae^{\mu x} \sin \nu x + Be^{\mu x} \cos \nu x + Ce^{-\mu x} \sin \nu x + De^{-\mu x} \cos \nu x + v^*, \\ v_1 &= A_1 e^{\mu x} \sin \nu x + B_1 e^{\mu x} \cos \nu x + C_1 e^{-\mu x} \sin \nu x + D_1 e^{-\mu x} \cos \nu x + v_1^*, \end{aligned}$$

przy czym między stałymi całkowania zachodzą związki

$$(4.23) \quad \begin{aligned} A_1 k_{01} \mu - B_1 k_{01} \nu + A(k_{00}(\mu^2 - \nu^2) + l_{00}) - 2Bk_{00} \mu \nu &= 0, \\ A_1 k_{01} \nu + B_1 k_{01} \mu + 2Ak_{00} \mu \nu + B[k_{00}(\mu^2 - \nu^2) + l_{00}] &= 0, \\ -C_1 k_{01} \mu - D_1 k_{01} \nu + C[k_{00}(\mu^2 - \nu^2) + l_{00}] + 2k_{00} D \mu \nu &= 0, \\ C_1 k_{01} \nu - D_1 k_{01} \mu + D[k_{00}(\mu^2 - \nu^2) + l_{00}] - 2C k_{00} \mu \nu &= 0. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu ogólnej postaci funkcji $v(x^1)$ i $v_1(x^1)$ możemy obliczyć funkcje $v_2(x^1)$ z (4.12):

$$(4.24) \quad \begin{aligned} v_2(x^1) &= \frac{1}{[C^{1212} A^{1111} + A^{-1}(B^{1212} A^{1111} - \\ &\quad - B^{1112} A^{1112})(B^{1112} A^{1211} - B^{1212} A^{1111}) - (B^{1112})^2]} \times \\ &\quad \times \int_0^{x^1} \left\{ \left[\frac{(B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112})}{A} (A^{1111} B^{1211} - A^{1211} B^{1111}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (A^{1111} C^{1211} - B^{1112} B^{1111}) \right] v_{1,1} + \left[\frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (A^{1111} A^{1221} - A^{1211} A^{1121}) + (B^{1112} A^{1121} - B^{2112} A^{1111}) \right] v + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^{1212} A^{1111} - B^{1112} A^{1112}}{A} [A^{1211} (\bar{p}^{11} - a^{11}) - A^{1111} (\bar{p}^{12} - a^{12})] - \right. \\ &\quad \left. - B^{1112} (\bar{p}^{11} - a^{11}) + A^{1111} (\bar{p}^1 + \bar{m}^{12} x^1 - c^{12}) \right\} d\xi + \bar{v}_2, \quad v_2 \equiv \bar{v}_2(0). \end{aligned}$$

Pozostałe funkcje $u(x^1)$, $u_1(x^1)$ i $u_2(x^1)$ wyznaczmy z (4.10)_{1,2,3}:

$$(4.25) \quad \begin{aligned} u(x^1) &= \int_0^{x^1} \left(\frac{A^{12}}{A^{11}} v^1 - v^2 - \frac{1}{A^{11}} a^1 \right) d\xi + \frac{1}{A^{11}} \bar{p}^1 x^1 + \bar{u}, \\ \bar{u} &\equiv u(0), \\ u_1(x^1) &= -\frac{1}{A^{1111}} \int_0^{x^1} \left[\left(B^{1112} + \frac{A^{1112} (A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111})}{A} \right) v_{2,1} + \right. \end{aligned}$$

$$(4.25) \quad \begin{aligned} & + \left(B^{1111} + \frac{A^{1112} (A^{1211} B^{1111} - B^{1211} A^{1111})}{A} \right) v_{1,1} + \\ & + \left(A^{1121} + \frac{A^{1112} (A^{1211} A^{1121} - A^{1111} A^{1221})}{A} \right) v + \left(1 + \frac{A^{1112} A^{1211}}{A} \right) (\bar{p}^{11} - a^{11}) + \\ & \left. + \frac{A^{1112} A^{1111}}{A} (\bar{p}^{12} - a^{12}) \right] d\xi + \bar{u}_1, \\ \bar{u}_1 & \equiv u_1(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x^1) &= \int_0^{x^1} \left\{ v + \frac{1}{A} [(A^{1211} B^{1112} - B^{1212} A^{1111}) v_{2,1} + \right. \\ & + (A^{1211} B^{1111} - B^{1211} A^{1111}) v_{1,1} + (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}) v + \\ & \left. + A^{1111} (\bar{p}^{12} - a^{12}) - A^{1211} (\bar{p}^{11} - a^{11}) \right\} d\xi + \bar{u}_2, \\ u_2 & \equiv u_2(0) \end{aligned}$$

Obliczając $v(x^1)$ i $v_1(x^1)$ w zależności od znaku wyróżnika Δ z jednego ze wzorów (4.18) (4.20) lub (4.22) oraz korzystając ze wzorów (4.24) i (4.25)_{1, 2, 3}, otrzymamy ogólne rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia. Rozwiązanie to zależy od dwunastu stałych całkowania $A, B, C, D, \bar{v}_2, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{p}^{11}, \bar{p}^{12}, \bar{p}^1$ i \bar{m}^{12} , które wyznaczymy z sześciu warunków na brzegu $x^1 = 0$ i $x^1 = L$. Po wyznaczeniu składowych stanu przemieszczenia obliczamy w znany sposób składowe naprężenia (por. [4]).

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *O równaniach teorii ustrojów siatkowych*, w druku.
2. Cz. WOŹNIAK, *Load carrying structures of dense lattice type*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 581-597.
3. Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability problems of plates with lattice structure*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 781-796.
4. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1969 r.
5. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Pewne zagadnienia statyki siatek rusztowych*, Rozpr. Inżyn., **2**, **17** (1969).

Резюме

НЕКОТОРАЯ ЗАДАЧА, КАСАЮЩАЯСЯ СЕТЧАТЫХ СИСТЕМ С ЗАКРИВЛЕННЫМИ СТВЕРЖНЯМИ

В работе представлена некоторая задача, касающаяся плоских сетчатых систем, в которых стержни соединяющие соседние узлы закручены и подвергаются немеханическим влияниям (1). В этом случае имеет место сопряжение плоской задачи с пластинчатой. Формулы для составляющих тензоров упругой жесткости, характеризующие геометрическую структуру и физические свойства системы даны для соединителей, оси которых представляют

с собой круговые арки, а одна главная ось инерции каждого поперечного сечения, наклонена к плоскости системы под постоянным углом. Дается также, выражение для составляющих тензоров, характеризующих термическое влияние.

В заключение дается общее решение для сетчатой полосы с закрученными соединителями.

Summary

SOME PROBLEMS OF GRID SYSTEMS WITH CURVED BARS

In the paper some of the problems of plane grid systems have been presented, in which the bars connecting neighbouring nodes are curved and subjected to non-mechanical effects (1). In this case there occurs the elastic disk problem with plate. The formulae for the tensor components of elastic rigidity characterizing the geometrical structure and physical properties of the system were given for links whose axes are arcs of a circle, and one main axis of inertia of each transverse cross-section is inclined to the plane of the system at a constant angle.

The expression is also given for the tensor components characterizing thermal influences.

At the end the general solution is given for a grid band with curved links.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1969 r.
