

ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ FAL  
W SPRĘŻYSTYM ORTOTROPOWYM WALCU KOŁOWYM (1)

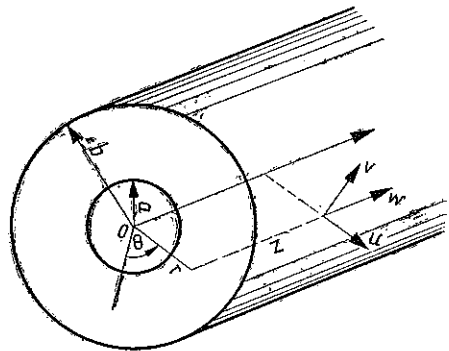
M. KOZAROW i TS. P. IWANOW (BUŁGARIA, SOFIA)

Wstęp

Problem rozchodzenia się fal w walcu izotropowym był rozważany przez POCHHAMMERA [1] w r. 1876 i niezależnie przez CHREE [2] w r. 1889. Szczegółowy opis rezultatów zawartych w tych pracach oraz niektóre wyniki liczbowe można znaleźć w pracy [3]. W r. 1890 CHREE [4] opublikował swoje badania dotyczące propagacji fal podłużnych w walcu o poprzecznej izotropii (2). Ogólny przypadek propagacji fal sinusoidalnych w walcu o izotropii poprzecznej rozważał MIRSKY [5] w r. 1965. W pracy tej zostały przedstawione również niektóre wyniki liczbowe. We wszystkich powyższych pracach rozwiązania są wyrażone przez funkcje Bessela argumentu  $r$ . W pracy NOWIŃSKIEGO [6] z r. 1967 przedstawiono rozwiązanie problemu propagacji fali podłużnej w walcu ortotropowym. Przypadek fal skrętnych w walcu izotropowym był rozważany w pracy [3]. Ten sam problem dla walca ortotropowego badał BERNSTEIN [7], a rozwiązanie  $r$  również zostało wyrażone w postaci funkcji Bessela. Obszerną bibliografię dotyczącą problemu propagacji fal można znaleźć w pracach przeglądowych [8 i 9].

Nie trudno stwierdzić, że w przypadku dowolnej anizotropii lub nawet, gdy  $z = 0$  jest płaszczyzną symetrii, propagacja sinusoidalnych fal w walcu jest niemożliwa, ponieważ w tym przypadku trzy niezależne funkcje argumentu  $r$  muszą spełniać układ więcej niż trzech równań różniczkowych. Gdy walec jest ortotropowy, liczba równań wynosi dokładnie trzy. Ten przypadek jest przedmiotem rozważań niniejszej pracy.

Rozważmy w układzie współrzędnych walcowych nieskończony walec kołowy (rys. 1). Zbadajmy, przy jakich warunkach mogą się w nim propagować fale typu



Rys. 1

(1) Z angielskiego tłumaczył J. BEJDA.

(2) Praca ta w całości dotyczy anizotropii cylindrycznej.

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad u(r, \theta, z, t) &= U(r) \cos \nu \theta \cos (az + \omega t), \\
 v(r, \theta, z, t) &= V(r) \sin \nu \theta \cos (az + \omega t), \\
 w(r, \theta, z, t) &= W(r) \cos \nu \theta \sin (az + \omega t),
 \end{aligned}$$

aby jednocześnie pobocznica walca pozostawała wolna od obciążeń. Przez  $\nu$  oznaczono tu nieujemną liczbę całkowitą, reprezentującą fale obwodowe;  $2\pi/a$  jest długością fali,  $\omega/2\pi$  jej częstością, a  $\omega/a$  fazową prędkością propagacji w kierunku  $z$ .

#### Równania podstawowe i ich rozwiązanie

Zależności między składowymi przemieszczeń  $u, v, w$ , odkształceń  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \dots, \gamma_{r\theta}$  i naprężeń  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \dots, \tau_{r\theta}$  dla trójwymiarowego ortotropowego ośrodka mają postać

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta},
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\
 \sigma_{rr} &= c_{11} \varepsilon_{rr} + c_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \varepsilon_{rr} + c_{22} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{23} \varepsilon_{zz}, \\
 \sigma_{zz} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{23} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33} \varepsilon_{zz}, \\
 \tau_{\theta z} &= c_{44} \gamma_{\theta z}, & \tau_{rz} &= c_{55} \gamma_{rz}, & \tau_{r\theta} &= c_{66} \gamma_{r\theta},
 \end{aligned}$$

gdzie  $c_{ij} = c_{ji}$  są stałymi sprężystymi, spełniającymi następujące nierówności:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & c_{11} > 0, \quad c_{44} > 0, \quad c_{55} > 0, \quad c_{66} > 0, \\
 & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} > 0,
 \end{aligned}$$

a równania ruchu w naprężeniach mają postać

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość.

Podstawiając (2.1) i (2.3) do (2.4) otrzymamy następujące równania ruchu w przemieszczeniach:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r^2} c_{22} u + \frac{1}{r} c_{11} u_r + c_{11} u_{rr} + \frac{1}{r^2} c_{66} u_{\theta\theta} + c_{55} u_{zz} - \frac{1}{r^2} (c_{22} + c_{66}) v_{\theta} + \\
 & \quad + \frac{1}{r} (c_{12} + c_{66}) v_{r\theta} + \frac{1}{r} (c_{13} - c_{23}) w_z + (c_{13} + c_{55}) w_{rz} = \rho u_{tt}, \\
 (2.5) \quad & -\frac{1}{r^2} c_{66} v + \frac{1}{r} c_{66} v_r + c_{66} v_{rr} + \frac{1}{r^2} c_{22} v_{\theta\theta} + c_{44} v_{zz} + \frac{1}{r} (c_{23} + c_{44}) w_{\theta z} + \\
 & \quad + \frac{1}{r^2} (c_{22} + c_{66}) u_{\theta} + \frac{1}{r} (c_{12} + c_{66}) u_{r\theta} = \rho v_{tt}, \\
 & \frac{1}{r} c_{55} w_z + c_{55} w_{rz} + \frac{1}{r^2} c_{44} w_{\theta\theta} + c_{33} w_{zz} + \frac{1}{r} (c_{23} + c_{55}) u_z + (c_{13} + c_{55}) u_{rz} + \\
 & \quad + \frac{1}{r} (c_{23} + c_{44}) v_{\theta z} = \rho w_{tt},
 \end{aligned}$$

gdzie wskaźniki u dołu oznaczają różniczkowanie cząstkowe względem oznaczonej zmiennej.

Rozwiązania układu (2.5) poszukujemy w postaci (1.1). W rezultacie otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych dla szukanych funkcji  $U(r)$ ,  $V(r)$  i  $W(r)$ :

$$\begin{aligned}
 & c_{11} U'' + \frac{1}{r} c_{11} U' + [\rho\omega^2 - c_{55} a^2 - \frac{1}{r^2} (c_{22} + c_{66} \nu^2)] U + \frac{1}{r} (c_{12} + c_{66}) \nu V' - \\
 & \frac{1}{r^2} (c_{22} + c_{66}) \nu V + (c_{13} + c_{55}) a W' + [\rho\omega^2 - c_{44} a^2 - \frac{1}{r^2} (c_{66} + c_{22} \nu^2)] W = 0, \\
 (2.6) \quad & c_{66} V'' + \frac{1}{r} c_{66} V' + [\rho\omega^2 - c_{44} a^2 - \frac{1}{r^2} (c_{66} + c_{22} \nu^2)] V - \\
 & - \frac{1}{r} (c_{23} + c_{44}) \nu a W - \frac{1}{r} (c_{12} + c_{66}) \nu U' - \frac{1}{r^2} (c_{22} + c_{66}) \nu U = 0, \\
 & c_{55} W'' + \frac{1}{r} c_{55} W' + (\rho\omega^2 - c_{33} a^2 - \frac{1}{r^2} c_{44} \nu^2) W - (c_{13} + c_{55}) a U' - \\
 & - \frac{1}{r} (c_{23} + c_{55}) a U - \frac{1}{r} (c_{23} + c_{44}) \nu a V = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie  $d/dr = '$ . Zauważmy, że w przypadku fal podłużnych ( $\nu = 0$ , tzn.  $v = 0$ ) możemy przyjąć  $V(r) \equiv 0$ , zatem drugie równanie układu (2.6) może być wyeliminowane.

Układ równań (2.6) może być rozwiązany dwiema metodami. Pierwsza polega na zastąpieniu równań (2.6) trzema (dwoma dla przypadku  $\nu = 0$ ) równaniami różniczkowymi szóstego rzędu (czwartego rzędu w przypadku gdy  $\nu = 0$ ), z któ-

rych każde zawiera tylko jedną niewiadomą i rozwiązaniu ich metodą FREBENIUSA [10]. Metoda ta była stosowana przez NOWIŃSKIEGO [6] dla przypadku  $\nu = 0$ . Jednak nawet ten szczególny przypadek wymaga długich i żmudnych obliczeń współczynników równań, mających na ogół postać zespoloną. Pojawiają się ponadto punkty osobliwe, które ograniczają obszar określoności rozwiązania. Punkty te nie są punktami osobliwymi układu wyjściowego (2.6), posiadającego tylko jeden punkt osobliwy  $r = 0$ , a wynikają z metody rozwiązania. Wreszcie rozwiązanie [6] zostało uzyskane przy większych ograniczeniach na stałe sprężyste niż rozwiązania otrzymane metodą niżej przedstawioną. Metoda nasza polega na zastąpieniu układu (2.6) liniowym układem równań różniczkowych pierwszego rzędu przez podstawienie:

$$y_1 = U, \quad y_2 = V, \quad y_3 = W, \quad y_4 = U', \quad y_5 = V', \quad y_6 = W'.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.7) \quad \begin{aligned} a_1 &= -\frac{\rho\omega^2 - c_{55}a^2}{c_{11}}, & a_2 &= \frac{c_{22} + c_{66}\nu^2}{c_{11}}, & a_3 &= \frac{c_{22} + c_{66}}{c_{11}}, \\ a_4 &= -\frac{c_{13} - c_{23}}{c_{11}}a, & a_5 &= -\frac{c_{12} + c_{66}}{c_{11}}, & a_6 &= \frac{-c_{13} - c_{15}}{c_{11}}, \\ b_1 &= \frac{c_{22} + c_{66}}{c_{66}}, & b_2 &= -\frac{\rho\omega^2 - c_{44}a^2}{c_{66}}, & b_3 &= \frac{c_{66} + c_{22}\nu^2}{c_{66}}, \\ b_4 &= \frac{c_{23} + c_{44}}{c_{66}}, & b_5 &= \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}}, \\ c_1 &= \frac{c_{23} + c_{55}}{c_{55}}, & c_2 &= \frac{c_{23} + c_{44}}{c_{55}}a, & c_3 &= -\frac{\rho\omega^2 - c_{33}a^2}{c_{55}}, \\ c_4 &= \frac{c_{44}}{c_{55}}, & c_5 &= \frac{c_{13} + c_{55}}{c_{55}}a \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_4, & y_2' &= y_5, & y_3' &= y_6, \\ r^2 y_4' &= (a_1 r^2 + a_2) y_1 + a_3 \nu y_2 + a_4 r y_3 - r y_4 + a \nu r y_5 + a_6 r^2 y_6, \\ r^2 y_5' &= b_1 \nu y_1 + (b_2 r^2 + b_3) y_2 + b_4 \nu r y_3 + b_5 \nu r y_4 - r y_5, \\ r^2 y_6' &= c_1 r y_1 + c_2 \nu r y_2 + (c_3 r^2 + c_4 \nu^2) y_3 + c_4 r^2 y_4 - r y_6. \end{aligned}$$

Liniowy układ (2.8) ma jeden nieregularny punkt osobliwy  $r = 0$ , ale przez podstawienie

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = r y_4, \quad z_5 = r y_5, \quad z_6 = r y_6$$

otrzymuje się następujący układ równań

$$(2.9) \quad \begin{aligned} rz'_1 &= z_4, & rz'_2 &= z_5, & rz'_3 &= z_6, \\ rz'_4 &= (a_1 r^2 + a_2) z_1 + a_3 v z_2 + a_4 r z_3 + a_5 v z_5 + a_6 r z_6, \\ rz'_5 &= b_1 v z_1 + (b_2 r^2 + b_3) z_2 + b_4 v r z_3 + b_5 v z_4, \\ rz'_6 &= c_1 r z_1 + c_2 r v z_2 + (c_3 r^2 + c_4 v^2) z_3 + c_5 r z_4, \end{aligned}$$

w którym punkt  $r = 0$  jest już regularnym punktem osobliwym. Układ ten jest rozwiązany dwiema metodami opisanymi w pracy [10].

*Metoda A.* Układ równań

$$(2.10) \quad rz'_p(r) = \sum_{q=1}^n f_{p,q}(r) z_q(r), \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie funkcje  $f_{p,q}(r)$  mogą być przedstawione przez szeregi potęgowe

$$f_{p,q}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p,q}^{(k)} r^k$$

zbieżne w pewnym otoczeniu zera  $|r| < R$ , przy czym nie wszystkie współczynniki  $a_{p,q}^{(0)}$  są równe zero, posiada rozwiązanie typu

$$z_p(r) = r^s g_p(r),$$

gdzie  $g_p(r)$  są szeregami potęgowymi

$$g_p(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{p,k} r^k$$

zbieżnymi dla każdego  $|r| < R$  i nie wszystkie współczynniki są równe zero. Współczynniki  $c_{p,0}$  są wybrane tak, by nie wszystkie były równe zero i spełniały układ równań

$$(2.11) \quad f_{p,1}(0) c_{1,0} + \dots + [f_{p,p}(0) - s] c_{p,0} + \dots + f_{p,n}(0) c_{n,0} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $s$  jest pierwiastkiem równania charakterystycznego

$$(2.12) \quad \text{Det} |f_{p,q}(0) - s e_{p,q}| = 0.$$

Wprowadziliśmy oznaczenia

$$e_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } p = q, \\ 0, & \text{jeśli } p \neq q. \end{cases}$$

Współczynniki  $c_{p,k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) są określone za pomocą liniowego układu równań

$$(2.13) \quad \sum_{q=1}^n [a_{p,q}^{(0)} - (s+k) e_{p,q}] c_{q,k} = - \sum_{q=1}^n \sum_{m=0}^{k-1} a_{p,q}^{(k-m)} c_{q,m}, \quad p = 1, 2, \dots, m$$

przy warunku, że równanie charakterystyczne (2.12) nie posiada żadnego punktu, który mógłby się różnić od danego pierwiastka  $s$  o wielkość stałą całkowitą. Jeśli równanie charakterystyczne ma taki pierwiastek, to współczynniki  $c_{p,k}$  mogą być jeszcze określone; jeśli ze wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego,

różniących się od siebie o stałą całkowitą, przyjmujemy na  $s$  wartość największą, tzn. taki pierwiastek, że liczby  $s+1, s+2, \dots$  nie spełniają już równania (2.12). Jeśli istnieją pierwiastki, które różnią się od największego pierwiastka  $s$  o stałą całkowitą (tu włączono również przypadek, kiedy  $s$  jest pierwiastkiem wielokrotnym), to wykorzystując rozwiązanie otrzymane metodą A możemy sprowadzić układ (2.10) do układu o mniejszej ilości równań, do którego ponownie metoda A może być zastosowana. W tym celu wykorzystana jest metoda B.

*Metoda B.* Jeśli  $\varphi_p(r)$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) jest rozwiązaniem układu takim, że  $\varphi_1(r) \neq 0$ , to rozwiązanie to może być sprowadzone do podstawowego układu równań w następujący sposób. Znajdujemy podstawowy układ rozwiązań

$$\psi_{p,2}(r), \quad \psi_{p,3}(r), \dots, \quad \psi_{p,n}(r), \quad p = 2, 3, \dots, n$$

układu liniowego składającego się z  $n - 1$  równań

$$rz'_k(r) = \sum_{a=2}^n \left[ f_{k,a}(r) - \frac{\varphi_k(r)}{\varphi_1(r)} f_{1,a}(r) \right] z_a(r), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

oraz

$$\psi_{p,1}(r) = \int \frac{1}{r\varphi_1(r)} \sum_{a=2}^n f_{1,a}(r) \psi_{p,a}(r) dr, \quad p = 2, 3, \dots, n.$$

Zatem funkcje

$$\varphi_{p,1} = \psi_{p,1} \varphi_1, \quad \varphi_{p,2} = \psi_{p,1} \varphi_2 + \psi_{p,2}, \dots, \quad \varphi_{p,n} = \psi_{p,1} \varphi_n + \psi_{p,n} \quad p = 2, 3, \dots, n$$

razem z rozwiązaniem początkowym tworzą podstawowy układ rozwiązań równań (2.10). Należy podkreślić, że metodą B otrzymujemy rozwiązania, które w ogólnym przypadku posiadają dla  $r = 0$  osobliwości typu logarytmicznego.

### 3. Szczególne przypadki

**3.1. Fale podłużne.** W przypadku fal podłużnych ( $\nu = 0, z_2 = 0, z_5 = 0$ ) z układu równań (2.9) odpada drugie i piąte równanie. Otrzymujemy zatem układ czterech równań różniczkowych o czterech poszukiwanych funkcjach  $z_1, z_3, z_4, z_6$ . Do jego rozwiązania stosujemy metodę A. Równanie charakterystyczne w tym przypadku ma postać

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} -s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = s^2(s^2 - a_2) = 0,$$

a jego pierwiastkami są liczby

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{a_2} = \pm \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}, \quad s_{3,4} = 0.$$

Rozwiązania odpowiadające tym pierwiastkom przy założeniu, że  $2\sqrt{c_{22}/c_{11}}$  nie jest liczbą całkowitą mają postać:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} z_1 &= r^{\sqrt{a_2}} h_1^{(1)}(r), & z_3 &= r^{\sqrt{a_2}+1} h_2^{(1)}(r), \\ z_1 &= r^{-\sqrt{a_2}} h_1^{(2)}(r), & z_3 &= r^{-\sqrt{a_2}+1} h_2^{(2)}(r), \\ z_1 &= r h_1^{(3)}(r), & z_3 &= r h_2^{(3)}(r), \end{aligned}$$

gdzie  $h_p^{(q)}(r)$  ( $p = 1, 2; q = 1, 2, 3$ ) są szeregami potęgowymi zbieżnymi dla każdego  $r$  i dla  $h_p^{(q)}(0) = 0$ . Współczynniki tych szeregów są określone równaniami (2.11) i (2.13). Stosując metodę B otrzymujemy czwarte liniowo niezależne równanie odpowiadające podwójnemu pierwiastkowi  $s_{3,4} = 0$  w postaci

$$(3.3) \quad z_1 = r \ln r h_1^{(4)}(r) + r h_1^{(5)}(r), \quad z_3 = \ln r h_2^{(4)}(r) + r h_2^{(5)}(r),$$

gdzie  $h_p^{(q)}(r)$  ( $p = 1, 2; q = 4, 5$ ) są szeregami potęgowymi zbieżnymi dla każdego  $r$  i dla  $h_p^{(q)}(0) \neq 0$ . Gdy  $2\sqrt{c_{22}/c_{11}}$  jest liczbą całkowitą, rozwiązanie uzyskujemy przez powtórne wykorzystanie metody B. Przypadek ten, omówiony szczegółowo przez MIRSKY'EGO [5], praktycznie nie opisuje dowolnej ortotropii, lecz ośrodki o izotropii poprzecznej i izotropowe, dla których  $c_{11} = c_{22}$ , tzn. gdy  $2\sqrt{c_{22}/c_{11}}$  jest liczbą całkowitą. Składowe przemieszczeń i odkształceń odpowiadające rozwiązaniom (3.2)<sub>2</sub> i (3.3) są nieograniczone przy  $r = 0$ , a odpowiadające rozwiązaniu (3.2)<sub>3</sub> są w tym punkcie ograniczone. Przemieszczenia odpowiadające rozwiązaniu (3.2)<sub>1</sub> są w  $r = 0$  ograniczone, odkształcenia natomiast są ograniczone jedynie gdy  $s_1 = \sqrt{c_{22}/c_{11}} > 1$ .

Zatem warunkiem istnienia dwóch liniowo niezależnych rozwiązań o ograniczonych w punkcie  $r = 0$  przemieszczeniach i odkształceniach, gdy  $\sqrt{c_{22}/c_{11}}$  nie jest liczbą całkowitą, jest warunek  $c_{22} > c_{11}$  (3).

Wynik ten, jak zobaczymy później, ma duże znaczenie w dowodzie istnienia dla pełnego walca ortotropowego trzech (dwóch w przypadku  $\nu = 0$ ) liniowo niezależnych rozwiązań układu (2.9) posiadających ograniczone w punkcie  $r = 0$  składowe przemieszczeń i odkształceń, o ile tylko warunki brzegowe (pobocznic walca wolna od naprężeń) są spełnione. Należy wspomnieć, że w przypadku walca wydrążonego potrzeba sześć (cztery — gdy  $\nu = 0$ ) liniowo niezależnych rozwiązań układu (2.9), które zresztą zawsze istnieją. Dlatego też w wydrążonym walcu przy warunku nie obciążonej powierzchni bocznej fale typu (1.1) będą się zawsze propagować, natomiast w przypadku walca pełnego jest to możliwe tylko dla pewnej określonej ortotropii materiału (4).

(3) Nie ma potrzeby teraz żądać, by  $2\sqrt{c_{22}/c_{11}}$  nie było liczbą całkowitą, ponieważ rozwiązanie odpowiadające  $s_2 = -\sqrt{c_{22}/c_{11}}$  jest nie interesujące.

(4) NOWIŃSKI [6] nie spostrzegł, że dla  $c_{11} > c_{22}$  rozwiązanie (3.2) posiada nieograniczoną wartość odkształcenia i dlatego przypuszczał, że propagacja fal podłużnych w pełnym walcu ortotropowym jest zawsze możliwa.

3.2. Fale giętkne. Celem uzyskania z układu równań (2.9) rozwiązania dla fal giętknych ( $\nu = 1$ ) wykorzystujemy ponownie metodę A. Równanie charakterystyczne ma postać

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & a_3 & 0 & -s & a_5 & 0 \\ b_1 & b_3 & 0 & b_5 & -s & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} =$$

$$= (c_4 - s^2) [(a_2 - s^2)(b_3 - s^2) - (a_3 + a_5 s)(b_1 + b_5 s)] = 0$$

i posiada następujące pierwiastki

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{c_4} = \pm \sqrt{c_{44}/c_{55}}, \quad s_{3,4} = \pm p, \quad s_{5,6} = 0,$$

gdzie

$$p^2 = \frac{c_{11} c_{22} - c_{12}^2 + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) c_{66}}{c_{11} c_{66}}.$$

Korzystając z nierówności (2.3) nietrudno wykazać, że  $p^2$  jest liczbą dodatnią, tzn. możemy wybrać taką liczbę  $p$ , aby  $p > 0$ . Rozwiązanie układu równań (2.9) przy założeniu, że  $2\sqrt{c_{44}/c_{55}}$ ,  $2p$ ,  $p \pm \sqrt{c_{44}/c_{55}}$  nie są liczbami całkowitymi ma postać

$$(3.5) \quad \begin{aligned} z_1 &= r^{\sqrt{c_4}+1} h_1^{(1)}(r), & z_2 &= r^{\sqrt{c_4}+1} h_2^{(1)}(r), & z_3 &= r^{\sqrt{c_4}} h_3^{(1)}(r), \\ z_1 &= r^{-\sqrt{c_4}+1} h_1^{(2)}(r), & z_2 &= r^{-\sqrt{c_4}+1} h_2^{(2)}(r), & z_3 &= r^{-\sqrt{c_4}} h_3^{(2)}(r), \\ z_1 &= r^p h_1^{(3)}(r), & z_2 &= r^p h_2^{(3)}(r), & z_3 &= r^{p+1} h_3^{(3)}(r), \\ z_1 &= r^{-p} h_1^{(4)}(r), & z_2 &= r^{-p} h_2^{(4)}(r), & z_3 &= r^{-p+1} h_3^{(4)}(r), \\ z_1 &= h_1^{(5)}(r), & z_2 &= h_2^{(5)}(r), & z_3 &= r h_3^{(5)}(r), \end{aligned}$$

gdzie  $h_p^{(q)}(r)$  ( $p = 1, 2, 3$ ;  $q = 1, 2, \dots, 5$ ) przedstawiają w ogólnym przypadku szeregi potęgowe zbieżne dla każdego  $r$  i dla  $h_p^{(q)}(0) \neq 0$ . Współczynniki tych szeregów są określone równaniami (2.11) i (2.13). Stosując metodę B otrzymujemy sześć następujących liniowo niezależnych rozwiązań odpowiadających podwójnemu pierwiastkowi  $s_{5,6} = 0$ :

$$(3.6) \quad \begin{aligned} z_1 &= \ln r h_1^{(6)}(r) + r h_1^{(7)}(r), & z_2 &= \ln r h_2^{(6)}(r) + h_2^{(7)}(r), \\ z_3 &= r \ln r h_3^{(6)}(r) + h_3^{(7)}(r), \end{aligned}$$

gdzie  $h_p^{(q)}(r)$  ( $p = 1, 2, 3$ ;  $q = 6, 7$ ) są szeregami potęgowymi zbieżnymi na ogół dla każdego  $r$  przy  $h_p^{(q)}(0) \neq 0$ . Możliwość znikania niektórych  $h_p^{(q)}(r)$  ( $p = 1, 2, 3$ ;  $q = 1, 2, \dots, 7$ ) dla pewnych stałych sprężystych nie ma wpływu na dalszy tok rozumowania. Składowe przemieszczeń i odkształceń odpowiadające rozwiązaniom (3.5)<sub>2</sub>, (3.5)<sub>4</sub> i (3.6) są nieograniczone dla  $r = 0$ , gdyż warunek  $h_3^{(2)}(0) \neq 0$  jest zawsze



spełniony, bowiem przynajmniej jedna z liczb  $h_1^{(4)}(0)$  i  $h_2^{(4)}(0)$  jest różna od zera, a  $h_i^{(6)}(0) \neq 0$  dla  $i = 1, 2, 3$ . Przemieszczenia i odkształcenia odpowiadające rozwiązaniu (3.5)<sub>5</sub> są ograniczone w  $r = 0$ , gdyż warunek  $h_1^{(5)}(0) = -h_2^{(5)}(0)$  jest spełniony. Przemieszczenia odpowiadające rozwiązaniom (3.5)<sub>1</sub> i (3.5)<sub>3</sub> są ograniczone dla  $r = 0$ , natomiast odkształcenia są ograniczone tylko wtedy, gdy  $s_1 = \sqrt{c_{44}/c_{55}} > 1$  i  $s_3 = p > 1$ , bowiem warunek  $h_3^{(1)}(0) \neq 0$  jest zawsze spełniony i co najmniej jedna z liczb  $h_1^{(3)}(0)$ ,  $h_2^{(3)}(0)$  jest różna od zera.

Zatem warunkiem istnienia trzech liniowo niezależnych rozwiązań przy warunkach takich, że  $\sqrt{c_{44}/c_{55}}$ ,  $p$ ,  $p - \sqrt{c_{44}/c_{55}}$  nie są liczbami całkowitymi, a przemieszczenia i odkształcenia są ograniczone w  $r = 0$ , jest  $c_{44} > c_{55}$  oraz

$$c_{11} c_{22} - c_{12}^2 + (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) c_{66} > c_{11} c_{66}.$$

Również i tu w przypadku fal giętnych słuszne są uwagi, jakie poczynione zostały w punkcie 3.1 dla fal podłużnych.

**3.3. Przypadek ogólny.** Rozważmy ogólny przypadek propagacji fal, gdy  $\nu \geq 2$ . Równanie charakterystyczne ma teraz postać

$$(3.7) \quad \begin{vmatrix} -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & \nu a_3 & 0 & -s & \nu a_5 & 0 \\ \nu b_1 & b_3 & 0 & \nu b_5 & -s & 0 \\ 0 & 0 & c_4 \nu^2 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} \equiv \\ \equiv (c_1' \nu^2 - s^2) [(a_2 - s^2)(b_3 - s^2) - \nu^2(a_3 + as)(b_1 + b_5 s)] = 0.$$

Korzystając z (2.7) otrzymujemy

$$(3.8) \quad \left( s^2 - \nu^2 \frac{c_{44}}{c_{55}} \right) \{ c_{11} c_{66} s^4 - [(c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66}) \nu^2 + c_{66} (c_{11} + c_{22})] s^2 + c_{22} c_{66} (\nu^2 - 1)^2 \} = 0.$$

Pierwiastkami są liczby

$$(3.9) \quad s_{1,2} = \pm \nu \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{55}}}, \\ s_{3,4,5,6} = \pm \left\{ \frac{1}{2c_{11} c_{66}} \{ [(c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66}) \nu^2 + c_{66} (c_{11} + c_{22})] \pm \right. \\ \left. \pm [[(c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66}) \nu^2 + c_{66} (c_{11} + c_{22})]^2 - 4c_{11} c_{22} c_{66}^2 (\nu^2 - 1)^2]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

Wykażemy, że pierwiastki  $s_i$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) nie mogą być dla  $\nu \geq 2$  liczbami czysto urojonymi, tzn. równanie kwadratowe  $A\xi^2 + B\xi + C = 0$ , gdzie

$$(3.10) \quad A = c_{11} c_{66}, \quad B = -[(c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66}) \nu^2 + c_{66} (c_{11} + c_{22})],$$

$C = c_{22} c_{66} (\nu^2 - 1)^2$ , nie może mieć dla  $\nu \geq 2$  ujemnych pierwiastków. Przypuśćmy, że istnieje taka wartość  $\nu_0 \geq 2$ , dla której jeden z pierwiastków  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) jest liczbą ujemną. Zatem z pierwszego wzoru Vietty  $\xi_1 \xi_2 = c/A > 0$  wynika, że drugi pierwiastek będzie ujemny, ze wzoru drugiego  $\xi_1 + \xi_2 = -B/A$  wynika, że  $B > 0$  dla  $\nu = \nu_0$ . Korzystając z (3.10) otrzymujemy

$$(3.11) \quad x_0 > x_1, \quad c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66} < 0, \quad c_{12} > 0,$$

gdzie

$$(3.12) \quad x_0 = \nu_0^2, \quad x_1 = \frac{c_{66}(c_{11} + c_{22})}{c_{12}^2 + 2c_{12} c_{66} - c_{11} c_{22}}.$$

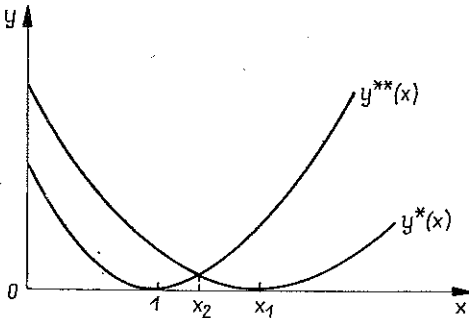
Biorąc pod uwagę (2.3) i nierówność  $c_{11} + c_{22} \geq 2 \sqrt{c_{11} c_{22}}$  nietrudno wykazać, że  $x_1 > 1$ . Ponieważ wyznacznik  $B^2 - 4AC$  musi być dla  $\nu = \nu_0$  nieujemny, otrzymujemy  $y^*(x_0) \geq y^{**}(x_0)$ , gdzie  $x = \nu^2$  oraz

$$(3.13) \quad \begin{aligned} y^*(x) &= [(c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66})x + c_{66}(c_{11} + c_{22})]^2, \\ y^{**}(x) &= 4c_{11} c_{22} c_{66}^2 (x - 1)^2. \end{aligned}$$

Z drugiej strony łatwo zauważyć, że  $y^*(x_0) < y^{**}(x_0)$  dla dostatecznie dużych wartości. Znak wielomianu  $y^*(x) - y^{**}(x)$  dla dużych wartości  $x$  jest określony przez znak współczynnika przy  $x^2$ , równy

$$(c_{11} c_{22} - c_{12}^2) [c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66} - 2c_{66}(2c_{66} + c_{12})],$$

który jest nieujemny, ponieważ nierówności (3.11) są spełnione. Mając na uwadze  $y^*(1) > y^{**}(1)$  i  $y^*(x_1) < y^{**}(x_1)$  dochodzimy do wniosku, że równanie posiada tylko jeden pierwiastek dodatni  $x_2$  spełniający nierówność  $1 < x_2 < x_1$ . Zatem  $y^*(x) \geq y^{**}(x)$  dla  $0 < x < x_2$  i  $y^*(x) < y^{**}(x)$  dla  $x > x_2$  (rys. 2). Widzimy więc, że  $x_0 \leq x_2$  i  $x_0 < x_1$  przeczy pierwszej nierówności (3.11), co kończy dowód.



Rys. 2

Z dowodu tego wynika, że trzy pierwiastki równania (3.8) mają ujemne części rzeczywiste, a pozostałe trzy — dodatnie części rzeczywiste. Rozwiązania odpowiadające tym pierwiastkom są w ogólnym przypadku zespolone, ale zarówno ich części rzeczywiste jak i urojone są rozwiązaniami układu (2.9). Przypuszczając, że nie występują

pierwiastki (3.9) różniące się od siebie o liczbę całkowitą, można wykazać w sposób przedstawiony dla fal podłużnych i poprzecznych w punktach 3.1 i 3.2, że pierwiastkom mającym części rzeczywiste nieujemne odpowiadają rozwiązania, w których przemieszczenia i odkształcenia są ograniczone w  $r = 0$ , a pierwiastkom o dodatnich częściach rzeczywistych odpowiadają rozwiązania, w których przemieszczenia są ograniczone w  $r = 0$ , natomiast odkształcenia są ograni-

zione tylko wtedy, gdy te części rzeczywiste są większe od jedności (5). W p. (3.1) i (3.2) w drugiej części dowodu zakładaliśmy, że nie istnieje rozwiązanie szczególne układu (2.9), dla którego przemieszczenia i odkształcenia są ograniczone w  $r = 0$  i które nie może być liniową kombinacją uzyskanych metodą A rozwiązań szczególnych, dla których przemieszczenia i odkształcenia są ograniczone w  $r = 0$ . Innymi słowy każde rozwiązanie szczególne układu (2.9), w którym przemieszczenia i odkształcenia są ograniczone w  $r = 0$ , jest liniową kombinacją rozwiązań otrzymanych metodą A, mających w  $r = 0$  ograniczone przemieszczenia i odkształcenia; tzn. metoda A daje maksymalną ilość liniowo niezależnych rozwiązań o ograniczonych w  $r = 0$  wartościach przemieszczeń i odkształceń. Fakt ten łatwo udowodnić, jeśli zauważyć, że każde rozwiązanie szczególne układu (2.9) jest liniową kombinacją rozwiązań otrzymanych metodami A i B. Wypływa stąd dla przypadku  $\nu \geq 2$  następujący wniosek: zakładając, że żaden z pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej równania (3.8) nie różni się od pozostałych o liczbę całkowitą, warunkiem istnienia trzech liniowo niezależnych rozwiązań o ograniczonych w  $r = 0$  przemieszczeniach i odkształceniach jest, aby rzeczywiste części pierwiastków były większe od jedności.

#### 4. Równania częstości

Warunek brzegowy, aby pobocznicą walca była wolna od naprężeń ma postać

$$(4.1) \quad \sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0,$$

dla  $r = a$  i  $r = b$  w przypadku walca wydrążonego i  $r = b$  dla walca pełnego, gdy  $\nu = 0$  warunek  $\tau_r = 0$  jest spełniony tożsamościowo. Korzystając z rezultatów otrzymanych w punktach 3.1–3.3 należy spełnić warunki brzegowe (4.1).

Rozwiązaniem ogólnym typu (1.1) dla walca wydrążonego jest układ funkcji

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^6 A_i U_i(r) \cos \nu\theta \cos (az + \omega t), \\ v &= \sum_{i=1}^6 A_i V_i(r) \sin \nu\theta \cos (az + \omega t), \\ w &= \sum_{i=1}^6 A_i W_i(r) \cos \nu\theta \sin (az + \omega t) \end{aligned}$$

dla  $\nu \geq 1$  oraz

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 A_i U_i(r) \cos (az + \omega t), \\ w &= \sum_{i=1}^4 A_i W_i(r) \sin (az + \omega t) \end{aligned}$$

(5) Rozwiązania układu (2.9) są typu  $r^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , gdzie  $s = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Ponadto  $s$  jest pierwiastkiem równania (3.8), a  $c_k$  są określone równaniami. Szereg  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$  jest zbieżny dla każdego  $r$ . Zauważmy, że  $r^s = r^\alpha [\cos(\beta \ln r) + i \sin(\beta \ln r)]$ .

dla  $\nu = 0$ , gdzie  $A_i$  są stałymi dowolnymi, a przez  $U_i(r)$ ,  $V_i(r)$ ,  $W_i(r)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) dla  $\nu \geq 1$  i  $U_i(r)$ ,  $W_i(r)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) dla  $\nu = 0$  oznaczono podstawowy układ rozwiązań układu (2.9).

Spełnienie warunków brzegowych dla walca pełnego jest możliwe tylko w przypadku istnienia trzech (dwóch dla  $\nu = 0$ ) liniowo niezależnych rozwiązań układu (2.9), mających w  $r = 0$  ograniczone przemieszczenia i odkształcenia. Warunki istnienia tych rozwiązań zostały przeanalizowane w punktach (31.) – (3.3). W dalszych rozważaniach będziemy zawsze przyjmować taką ortotropię walca, aby warunki te były spełnione, tzn. aby zawsze istniała żądana liczba liniowo niezależnych rozwiązań, które będziemy oznaczać przez  $U_i(r)$ ,  $V_i(r)$ ,  $W_i(r)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dla  $\nu \geq 1$  i  $U_i(r)$ ,  $W_i(r)$  ( $i = 1, 2$ ) dla  $\nu = 0$ . Rozwiązanie ogólne typu (1.1) dla walca pełnego jest analogiczne do rozwiązań (4.2) i (4.3) z tym, że sumowanie przebiega od 1 do 3 dla  $\nu \geq 1$  i od 1 do 2 dla  $\nu = 0$ .

Podstawiając (4.2) i (4.3) do (2.1), a następnie otrzymany rezultat do (2.2) dostajemy następujące wyrażenia dla naprężeń  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{rz}$  w wydrążonym walcu:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{i=1}^6 A_i F_i(r) \cos \nu\theta \cos (az + \omega t), \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{i=1}^6 A_i G_i(r) \sin \nu\theta \cos (az + \omega t), \\ \tau_{rz} &= \sum_{i=1}^6 A_i H_i(r) \cos \nu\theta \sin (az + \omega t) \end{aligned}$$

dla  $\nu \geq 1$  oraz

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{i=1}^4 A_i F_i(r) \cos (az + \omega t), \\ \tau_{rz} &= \sum_{i=1}^4 A_i H_i(r) \sin (az + \omega t) \end{aligned}$$

dla  $\nu = 0$ , gdzie

$$(4.6) \quad \begin{aligned} F_i(r) &= \frac{c_{12}}{r} U_i(r) + \frac{c_{12}}{r} V_i(r) + c_{13} W_i(r) + c_{11} U_i'(r), \\ G_i(r) &= c_{66} \left[ -\frac{1}{r} \nu U_i(r) - \frac{1}{r} V_i(r) + V_i'(r) \right], \\ H_i(r) &= c_{55} [-\alpha U_i(r) + W_i'(r)]. \end{aligned}$$

W przypadku walca pełnego wzory są analogiczne do (4.4) i (4.5), a sumowanie przebiega od 1 do 3 dla  $\nu \geq 1$  i od 1 do 2 dla  $\nu = 0$ . Spełniając warunki brzegowe (4.1) otrzymujemy równania charakterystyczne dla częstości.

Dla walca wydrążonego mają one postać

$$(4.7) \quad \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) & \dots & F_6(a) \\ F_1(b) & F_2(b) & \dots & F_6(b) \\ G_1(a) & G_2(a) & \dots & G_6(a) \\ G_1(b) & G_2(b) & \dots & G_6(b) \\ H_1(a) & H_2(a) & \dots & H_6(a) \\ H_1(b) & H_2(b) & \dots & H_6(b) \end{vmatrix} = 0$$

dla  $\nu \geq 1$  oraz

$$(4.8) \quad \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) & \dots & F_6(a) \\ F_1(b) & F_2(b) & \dots & F_6(b) \\ H_1(a) & H_2(a) & \dots & H_6(a) \\ H_1(b) & H_2(b) & \dots & H_6(b) \end{vmatrix} = 0$$

dla  $\nu = 0$ .

Dla walca pełnego otrzymujemy

$$(4.9) \quad \begin{vmatrix} F_1(b) & F_2(b) & F_3(b) \\ G_1(b) & G_2(b) & G_3(b) \\ H_1(b) & H_2(b) & H_3(b) \end{vmatrix} = 0$$

dla  $\nu \geq 1$  oraz

$$(4.10) \quad \begin{vmatrix} F_1(b) & F_2(b) \\ H_1(b) & H_2(b) \end{vmatrix} = 0$$

dla  $\nu = 0$ .

Interesujący jest przypadek  $a = 0$ , tzn. gdy ruch nie zależy od  $z$  i w walcu propagują się nieskończenie długie fale. W tym przypadku  $a_4 = a_6 = b_4 = c_1 = c_2 = c_5 = 0$  i układ równań (2.9) rozdziela się dając układ czterech równań dla funkcji  $z_1, z_2, z_4, z_5$  i układ dwóch równań dla  $z_3$  i  $z_6$  przy  $\nu \geq 1$  oraz dwa układy dwóch równań odpowiednio dla  $z_1, z_4$  i  $z_3, z_6$  gdy  $\nu = 0$  (6). Zatem rozwiązanie (4.2) i (4.3) może być napisane w postaci

$$(4.11) \quad \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 A_i U_i(r) \cos \nu \theta \cos \omega t, \\ v &= \sum_{i=1}^4 A_i V_i(r) \sin \nu \theta \cos \omega t, \\ w &= \sum_{i=1}^6 A_i W_i(r) \cos \nu \theta \sin \omega t \end{aligned}$$

(6) Układy te mogą być przedstawione w postaci równań różniczkowych Bessela.

oraz

$$(4.12) \quad u = \sum_{i=1}^2 A_i U_i(r) \cos \omega t, \\ w = \sum_{i=1}^4 A_i W_i(r) \sin \omega t.$$

Każde równanie charakterystyczne dla częstości odpowiadające (4.7)–(4.10) może być przedstawione w postaci iloczynu dwóch wyznaczników

$$D_1 D_2 = 0, \quad D_3 D_4 = 0, \quad D_5 D_6 = 0, \quad D_7 D_8 = 0,$$

gdzie

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) & F_3(a) & F_4(a) \\ F_1(b) & F_2(b) & F_3(b) & F_4(b) \\ G_1(a) & G_2(a) & G_3(a) & G_4(a) \\ G_1(b) & G_2(b) & G_3(b) & G_4(b) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} H_5(a) & H_6(a) \\ H_5(b) & H_6(b) \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) \\ F_1(b) & F_2(b) \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} H_3(a) & H_4(a) \\ H_3(b) & H_4(b) \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} F_1(b) & F_2(b) \\ G_1(b) & G_2(b) \end{vmatrix},$$

$$D_6 = H_3(b), \quad D_7 = F_1(b), \quad D_8 = H_2(b).$$

Gdy  $D_1 = 0$  lub  $D_5 = 0$ , otrzymamy ruch płaski, gdyż  $w = 0$ .

Gdy  $D_2 = 0$  lub  $D_6 = 0$ , ma miejsce ruch w kierunku osi  $z$ , gdyż wtedy  $u = v = 0$ .

W przypadku, gdy  $D_3 = 0$  lub  $D_7 = 0$ , ruch odbywa się w kierunku radialnym, gdyż  $w = 0$ , a dla  $D_4 = 0$  lub  $D_8 = 0$  wzdłuż osi walca, ponieważ  $u = 0$ . W ostatnich dwóch przypadkach również  $v = 0$ , gdyż  $\nu = 0$  (7).

## 5. Wnioski

Najogólniejszym przypadkiem anizotropii walcowej, przy której propagacja fal sprężystych typu (1.1) jest możliwa, jest przypadek ortotropii. Rozwiązania dla poszukiwanych funkcji  $U_i(r)$ ,  $V_i(r)$  i  $W_i(r)$  zostały otrzymane w postaci uogólnionych szeregów potęgowych zbieżnych dla każdego  $r \neq 0$ , a w niektórych przypadkach dla wybranych wartości stałych sprężystych przy ustalonym  $\nu$  uzyskano rozwiązania mające w  $r = 0$  osobliwość typu logarytmicznego.

(7) MIRSKEY (5) popełnia błąd sądząc, że drugie wyznaczniki we wzorach (4.7) i (4.10) w pracy [5] odpowiadają dowolnemu ruchowi walca, gdyż w tych przypadkach  $A_2 = B_2 = A_3 = B_3 = 0$ , tzn.  $u = v = w = 0$ , ponieważ  $n = 0$ .

W przypadku nieskończonego sprężystego ortotropowego walca kołowego warunki brzegowe (wolna od naprężeń pobocznic walca) mogą być zawsze spełnione dla walca wydrążonego, dla walca pełnego natomiast jest to możliwe tylko dla niektórych materiałów ortotropowych, dla których  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) spełniają dodatkowo nierówności zależne od  $\nu$ .

Określone zostały równania częstości w przypadku ogólnym oraz dla pewnych interesujących przypadków szczególnych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. L. POCHHAMMER, *Über Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen*, J. Rein. Angew. Math., **81** (1876), 324–336.
2. C. CHREE, *The equations of an isotropic solid in polar and cylindrical coordinates*, Trans. Camb. Phil. Soc., **17** (1889), 250.
3. H. KOLSKY, *Stress Waves in Solids*, Oxford 1953.
4. C. CHREE, *On longitudinal vibrations of anisotropic bars with one axis of material symmetry*, Quart. J. Math., **24** (1890), 340–358.
5. I. MIRSKY, *Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders*, J. Acoust. Soc. America, **6**, **37** (1965), 1016–1026.
6. J. L. NOWIŃSKI, *Propagation of longitudinal waves in circular cylindrically orthotropic bars*, Trans. of ASME, Ser. B, **3**, **89** (1967), 408–412.
7. П. И. Берштейн, *Волны кручения в анизотропном неоднородном цилиндрическом стержне*, Инж. Ж., **3**, **5** (1965), 572–574.
8. H. N. ABRAMSON, H. J. PLASS, E. A. RIPPERGER, *Stress waves propagation in rods and beams*, Advances Appl. Mech., **5** (1958), 11–194.
9. Л. Аикола, У. Нигул, *Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек*, Изв. АН УССР, Серия физико-мат. и мех. наук., № 1, 1965.
10. E. КАМКЕ, *Differentialgleichungen-Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1959.

#### Резюме

#### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

В работе обсуждается вопрос распространения упругих волн типа (1) в бесконечном ортотропном круговом цилиндре. Это является самым общим случаем цилиндрической ортотропии, при котором возможно распространение такого типа волн. Искомые функции  $U(r)$ ,  $V(r)$  и  $W(r)$  определяются в виде обобщенных степенных рядов сходящихся для каждого  $r \neq 0$ . Для некоторых значений постоянных упругости и данного  $\nu$ , возможно получить решение, имеющее для  $r = 0$  логарифмическую сингулярность.

Красивые условия — поверхность цилиндра свободна от нагрузки — могут всегда удовлетворять пустотелому цилиндру, тогда как для полного цилиндра это возможно единственно для некоторых ортотропных материалов, для которых постоянные упругости удовлетворяют добавочным неравенствам зависящим от  $\nu$ .

Уравнения частоты, выведены как в общем случае, так и в некоторых интересных особых случаях.

## Summary

## WAVE PROPAGATION IN ELASTIC ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDERS

In the following article the propagation of elastic waves of the type (1.1) in an infinite orthotropic circular cylinder is investigated. That is the most-general case of cylindrical anisotropy, for which the propagation of waves of this type is possible. The solutions of the unknown functions  $U(r)$ ,  $V(r)$ ,  $W(r)$  are determined in the form of generalized power series, convergent for every  $r \neq 0$ . For some meanings for the elastic constants by given  $\nu$  it is possible to receive solutions, having logarithmic singularities for  $r = 0$ .

The boundary conditions — the cylindrical surface to be free from loading, can always be satisfied for a hollow cylinder, whereas by a solid cylinder that is possible only for some orthotropic materials, for which the elastic constants satisfy some additional inequalities, depending on  $\nu$ .

Determined are the frequency equations in the general case as well as some interesting particular cases.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lutego 1969 r.*

---