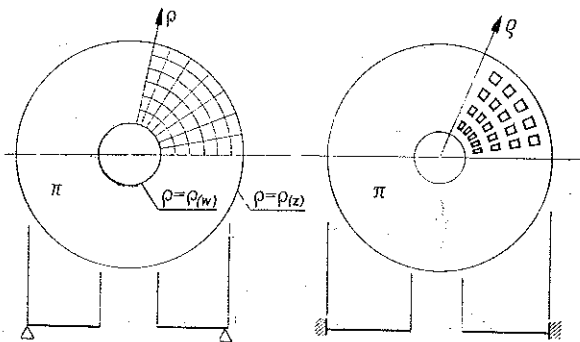


KOŁOWO-SYMETRYCZNE NIELINIOWE
ZAGADNIENIA STATYKI PŁYT SIATKOWYCH

P. KLEMM (ŁÓDŹ), CZ. WOŹNIAK (WARSZAWA)

Wstęp

Koliste płyty siatkowe, do których zaliczamy między innymi gęste ruszty o biegunowej siatce oraz płyty perforowane regularnym układem wielu otworów (rys. 1), rozpatrywane na podstawie ciągłego i jednospójnego (dwuspójnego dla płyt pierścieniowych) modelu obliczeniowego [1 i 2], były tematem wielu opracowań. Statyka



Rys. 1

płyt poddanych wyłącznie obciążeniom działającym w płaszczyźnie środkowej płyty (statyka tarcz siatkowych) została omówiona w pracach [3 i 4]; niektóre przypadki zginania były rozwiązane w pracy [5], a wyznaczeniu sił krytycznych poświęcono opracowania [6 i 7]. Tematem tej pracy jest geometrycznie nieliniowe (lecz liniowe fizycznie) kołowo-symetryczne zagadnienie statyczne sprężystych płyt siatkowych. Zakładamy więc, że ugięcia płyt są porównywalne co do wielkości z grubością, a ich materiał podlega prawu Hooke'a. Pewien szczególny przypadek przedstawionej tu problematyki był już omówiony w artykule [8]. W pracy przytoczymy najpierw podstawowe równania tzw. technicznej nieliniowej teorii płyt siatkowych, wyrażone w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych (p. 1). W punkcie 2 równania te przedstawimy we współrzędnych biegunowych zakładając jednocześnie kołową symetrię zagadnienia i przyjmując, że płyta jest ortotropowa, a kierunki ortotropii pokrywają się z liniami parametrycznymi biegunowego układu współrzędnych.

W punkcie 3 wyprowadzimy podstawowy układ równań oraz omówimy przybliżone sposoby jego rozwiązania. Wreszcie w p. 4 podamy przykłady rozwiązań dla płyt perforowanych, a w p. 5 dla siatek rusztowych. Cytowane przykłady rozwiązań są wzorowane na pracy [9].

1. Podstawowe pojęcia i równania

Parametryzujemy płaszczyznę π , na której kształtujemy siatkę płyty prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych x^K (1). Wskutek obciążenia płyty siatkowej w jej elementach (np. w węzłach siatki rusztowej) pojawiają się przesunięcia u prostopadłe do płaszczyzny π oraz przesunięcia u_K zachodzące w kierunku osi x^K . Elementy płyty ulegają jednocześnie obrotowi v w płaszczyźnie π oraz obrotowi v_K względem linii parametrycznych x^K przechodzących przez środek elementu. Tym samym stan przemieszczenia dźwigara w ramach przyjętego ciągłego modelu obliczeniowego (1.2) charakteryzowany jest sześciu składowymi stanu przemieszczenia $u(x^L)$, $u_K(x^L)$, $v(x^L)$, $v_K(x^L)$. Funkcje te są powiązane ze składowymi stanu odkształcenia γ_{KS} , γ_K , \varkappa_{KS} , \varkappa_K następującymi zależnościami (2):

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{KS} &= u_{S,K} + \varepsilon_{SK} v + 1/2 (u + \bar{u})_{,K} (u + \bar{u})_{,S} - 1/2 \bar{u}_{,S} \bar{u}_{,K}, \\ \gamma_K &= \bar{u}_{,K} + \varepsilon_{KM} v^M, \quad \varkappa_{KS} = v_{S,K}, \quad \varkappa_K = v_{,K}, \end{aligned}$$

w których $\bar{u} = \bar{u}(x^L)$ jest danym początkowym (beznapięzeniowym) wygięciem płyty oraz ε_{KM} jest symbolem Ricciego. Składowe γ_{KS} , \varkappa_K stanu odkształcenia spełniają następujące warunki nierozdzielności:

$$(1.2) \quad \varepsilon^{KL} \gamma_{KM,L} + \varkappa_M = \frac{1}{2} \varepsilon^{KL} [(u + \bar{u})_{,K} (u + \bar{u})_{,ML} - \bar{u}_{,K} \bar{u}_{,ML}], \quad \varepsilon^{ML} \varkappa_{M,L} = 0.$$

Stan napięcia w modelu ciągłym dźwigara jest określony funkcjami p^{KL} , m^K , m^{KL} , p^K , których znaczenie przedstawia rys. 2. Przyjmując, że na płytę działają tylko obciążenia powierzchniowe o intensywności b i h^L (rys. 3) otrzymamy następującą postać równań równowagi odkształconego elementu płyty:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p^{KL}_{,K} &= 0, \quad m^K_{,K} + \varepsilon_{KL} p^{KL} = 0, \\ p^K_{,K} + p^{KL} b_{KL} + b &= 0, \quad m^{KL}_{,K} - \delta^{LM} m^K b_{MK} - \varepsilon^K_L p^K + h^L = 0, \end{aligned}$$

w której wprowadzono oznaczenie

$$(1.4) \quad b_{KL} \equiv (u + \bar{u})_{,KL}.$$

Przyjmijmy, że stan napięcia jest powiązany ze stanem odkształcenia przez związki

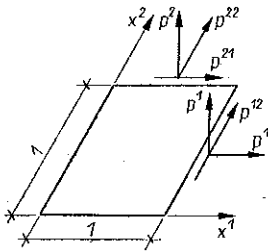
$$(1.5) \quad p^{KL} = A^{KLMN} \gamma_{MN}, \quad m^K = C^{KL} \varkappa_L, \quad m^{KL} = C^{KLMN} \varkappa_{MN}, \quad p^K = A^{KL} \gamma_L,$$

(1) Wskaźnik K, L, M, \dots przebiegają ciąg 1, 2; stosujemy konwencję sumacyjną. Pochodne cząstkowe oznaczamy przecinkiem.

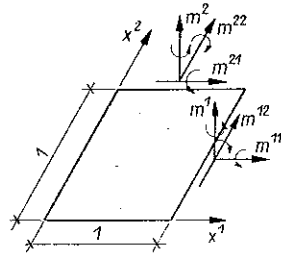
(2) Równania w tym punkcie pracy przytaczamy za autorem pracy [2] zamieniając jedynie niektóre oznaczenia.

przy czym A^{KLMN} , C^{KL} , C^{KLMN} , A^{KL} są składowymi tensorów sztywności sprężystej płyty. Budowę tych składowych w zależności od materiałowej i geometrycznej struktury płyty siatkowej podano w pracach [1 i 2]. Wprowadzamy funkcję naprężeń $\Phi(x^L)$ taką, że

$$(1.6) \quad p^{KL} = \varepsilon^{KM} \varepsilon^{LN} \Phi_{,MN} - \varepsilon^{KM} m^L_{,M},$$



Rys. 2



Rys. 3

spełnione są tożsamościowo równania równowagi (1.3)₁ i (1.3)₂. Przedstawimy związki (1.5)₁ i (1.5)₂ w postaci

$$(1.7) \quad \gamma_{KM} = a_{KMPR} p^{PR}, \quad \varkappa_M = c_{MN} m^N.$$

Wyraźmy następnie obroty v^S przez ugięcie u oraz przez funkcje γ_K zgodnie z (1.1):

$$(1.8) \quad v^S = \varepsilon^{SK} (u_{,K} - \gamma_K).$$

Równania (1.2) oraz (1.3)_{3,4} po wykorzystaniu (1.1)₄, (1.4), (1.5)_{3,4} (1.6), (1.7) i (1.8) prowadzą do układu sześciu równań dla sześciu funkcji Φ , m^K , u i γ^K :

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon^{KL} [a_{KMPR} \varepsilon^{PS} (\varepsilon^{RT} \Phi_{,ST} - m^R_{,S})]_{,L} + c_{MN} m^N &= \\ &= 1/2 \varepsilon^{KL} [(u + \bar{u})_{,K} (u + \bar{u})_{,ML} - \bar{u}_{,K} \bar{u}_{,ML}], \\ \varepsilon^{ML} (c_{MP} m^P)_{,L} &= 0, \\ (A^{KL} \gamma_{L,K} + \varepsilon^{KM} (\varepsilon^{LN} \Phi_{,MN} - m^L_{,M}) (u + \bar{u})_{,KL} + b &= 0, \\ [C^{KLMN} \varepsilon^P_N (u_{,P} - \gamma_P)_{,M}]_{,K} - \delta^{LM} m^K (u + \bar{u})_{,MK} - \varepsilon^K_L A^{KP} \gamma_P + h^L &= 0. \end{aligned}$$

Ze względu na występowanie w (1.2)₁ funkcji ugięcia $u(x^L)$ oraz na występowanie składowych p^{KL} , m^K stanu napięcia w (1.3)_{3,4} równań (1.9) nie da się rozdzielić na niezależny układ równań «tarczowych» i «płytowych» tak, jak to się dzieje w teorii liniowej. Teorię płyt siatkowych, opisaną równaniami (1.9), nazywamy *techniczną teorią nieliniową*. Gdy w (1.1), a tym samym w (1.2)₁, pominiemy wyraży nieliniowe, to otrzymamy równania *teorii «drugiego rzędu»*, pozwalające na wyznaczenie sił krytycznych [6 i 7], lecz nie opisujące pokrytycznych stanów przemieszczenia. Przytoczone w tym punkcie równania technicznej teorii nieliniowej przyjmujemy jako punkt wyjścia dalszych rozważań.

2. Przypadek kołowej symetrii

Założmy teraz, że stan przemieszczenia płyty siatkowej jest kołowo-symetryczny. Wprowadzając współrzędne biegunowe ϱ, φ przyjmujemy tym samym, że wszystkie wielkości zależą tylko od współrzędnej ϱ . Założymy następnie, że rozważana płyta siatkowa jest ortotropowa, a główne kierunki ortotropii pokrywają się z liniami parametrycznymi $\varrho = \text{const}, \varphi = \text{const}$. Równania fizyczne (1.5)_{3,4} i (1.7) sprowadzają się wtedy do postaci⁽³⁾

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m^{\varrho\varrho} &= C^{\varrho\varrho\varrho\varrho} \kappa_{\varrho\varrho} + C^{\varrho\varrho\varphi\varphi} \kappa_{\varphi\varphi}, & m^{\varrho\varphi} &= C^{\varrho\varphi\varrho\varphi} \kappa_{\varrho\varphi} + C^{\varrho\varphi\varphi\varrho} \kappa_{\varphi\varrho}, \\ m^{\varphi\varrho} &= C^{\varphi\varrho\varrho\varphi} \kappa_{\varrho\varphi} + C^{\varphi\varrho\varphi\varrho} \kappa_{\varphi\varrho}, & m^{\varphi\varphi} &= C^{\varphi\varphi\varphi\varphi} \kappa_{\varphi\varphi} + C^{\varphi\varphi\varrho\varrho} \kappa_{\varrho\varrho}, \\ p^{\varrho} &= A^{\varrho\varrho} \gamma_{\varrho}, & p^{\varphi} &= A^{\varphi\varphi} \gamma_{\varphi}, \\ \gamma_{\varrho\varrho} &= a_{\varrho\varrho\varrho\varrho} p^{\varrho\varrho} + a_{\varrho\varrho\varphi\varphi} p^{\varphi\varphi}, & \gamma_{\varrho\varphi} &= a_{\varrho\varphi\varrho\varphi} p^{\varrho\varphi}, \\ \gamma_{\varphi\varrho} &= a_{\varphi\varrho\varphi\varrho} p^{\varphi\varrho}, & \gamma_{\varphi\varphi} &= a_{\varphi\varphi\varphi\varphi} p^{\varphi\varphi} + a_{\varphi\varphi\varrho\varrho} p^{\varrho\varrho}, \\ \kappa_{\varrho} &= c_{\varrho\varrho} m^{\varrho}, & m^{\varphi} &= C^{\varphi\varphi} \kappa_{\varphi}. \end{aligned}$$

Równania geometryczne (1.1)₃ (przypatujemy w tym punkcie tylko te równania, z których dalej korzystamy) po uwzględnieniu (1.8) sprowadzają się do następujących:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \kappa_{\varrho\varrho} = v_{\varrho, \varrho} &= -(\varrho^{-1} \gamma_{\varphi})_{, \varrho}, & \kappa_{\varrho\varphi} = v_{\varphi, \varphi} - \varrho^{-1} v_{\varphi} &= -\varrho (u_{, \varrho} - \gamma_{\varrho}), \\ \kappa_{\varphi\varrho} = -\varrho^{-1} v_{\varphi} &= u_{, \varrho} - \gamma_{\varrho}, & \kappa_{\varphi\varphi} = \varrho v_{\varrho} &= -\gamma_{\varphi}. \end{aligned}$$

Niezerowymi składowymi tensora (1.4) są teraz tylko

$$(2.3) \quad b_{\varrho\varrho} = (u + \bar{u})_{, \varrho\varrho}, \quad b_{\varphi\varphi} = \varrho (u + \bar{u})_{, \varrho}.$$

Składowe stanu napięcia są powiązane z funkcją naprężeń związkami (1.6), które teraz przyjmą postać

$$(2.4) \quad p^{\varrho\varrho} = \varrho^{-1} \Phi_{, \varrho}, \quad p^{\varphi\varrho} = \varrho^{-1} m^{\varrho}_{, \varrho}, \quad p^{\varrho\varphi} = -\varrho^{-2} m^{\varrho}, \quad p^{\varphi\varphi} = \varrho^{-2} \Phi_{, \varrho\varrho}.$$

Zauważmy następnie, że z uwagi na [por. (1.1)₂ i (1.5)₂]

$$\kappa_{\varphi} = v_{, \varphi} = 0, \quad m^{\varphi} = C^{\varphi\varphi} \kappa_{\varphi}$$

dla kołowo-symetrycznego stanu przemieszczenia oraz przypadku, w którym kierunki ortotropii pokrywają się z liniami $\varrho = \text{const}, \varphi = \text{const}$ (tylko wtedy $C^{\varphi\varrho} = C^{\varrho\varphi} = 0$), mamy

$$(2.5) \quad m^{\varphi} = 0.$$

(3) Wszystkie składowe tensorów wyrażone w biegunowym układzie współrzędnych są składowymi kowariantnymi lub kontrawariantnymi. Pomijamy tu rachunki prowadzące od równań podanych w p. 1, wyrażonych w prostokątnych współrzędnych kartezjańskich, do równań we współrzędnych biegunowych.

Równania równowagi (1.3) mają postać

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & p^{ee},_e + \varrho^{-1} p^{ee} - \varrho p^{\varphi\varphi} = 0, \\
 & p^{\varphi\varphi},_e + 2\varrho^{-1} p^{\varphi\varphi} + \varrho^{-1} p^{\varphi e} = 0, \\
 & m^e,_e + p^{-1} m^e + \varrho p^{\varphi\varphi} - \varrho p^{\varphi e} + h = 0, \\
 & p^e,_e + \varrho^{-1} p^e + b_{ee} p^{ee} + b_{\varphi\varphi} p^{\varphi\varphi} + b = 0, \\
 & m^{ee},_e + \varrho^{-1} m^{ee} - \varrho m^{\varphi\varphi} + \varrho p^{\varphi} - b_{ee} m^e + h^e = 0, \\
 & m^{\varphi\varphi},_e + 2\varrho^{-1} m^{\varphi\varphi} + \varrho^{-1} m^{\varphi e} - \varrho^{-1} p^e + h^{\varphi} = 0,
 \end{aligned}$$

a warunki nierozdzielności odkształcenia (1.2) sprowadzają się do równań

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & -\varrho^{-1} \gamma_{\varphi\varphi,e} + \varrho^{-2} \gamma_{\varphi\varphi} + \gamma_{ee} = 1/2u_{,e} u_{,e} + u_{,e} \bar{u}_{,e}, \\
 & -\varrho^{-1} \gamma_{\varphi e,e} - \varrho^{-2} \gamma_{\varphi e} + \varkappa_e = 0.
 \end{aligned}$$

Korzystając z przytoczonych związków wprowadzimy w następnym punkcie podstawowy układ równań naszego zagadnienia. Układ ten odpowiada układowi (1.9), zawiera jednak jedną niewiadomą i jedno równanie mniej [por. (2.5)].

3. Podstawowy układ równań. Rozwiązanie przybliżone

Jako niewiadome przyjmujemy dalej funkcję naprężeń $\Phi(\varrho)$, ugięcie $u(\varrho)$, obrót $v_e(\varrho)$, funkcje $\gamma_e(\varrho)$ i napięcie momentowe $m^e(\varrho)$. Podstawiając prawe strony (2.4) do pierwszych trzech równań równowagi (2.6) spełniamy je tożsamościowo. Pozostałe równania równowagi napiszemy w bardziej zwartej postaci:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & (\varrho p^e),_e + \varrho p^{ee} b_{ee} + \varrho p^{\varphi\varphi} b_{\varphi\varphi} + \varrho b = 0, \\
 & (\varrho m^{ee}),_e - \varrho^2 m^{\varphi\varphi} + \varrho^2 p^{\varphi} - \varrho b_{ee} m^e + \varrho h^e = 0, \\
 & (\varrho^2 m^{\varphi\varphi}),_e + \varrho m^{\varphi e} - \varrho p^e + \varrho^2 h^{\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Korzystając z (2.1)_{1,5}, (2.2)₄, (2.3) i (2.4)_{1,4}, po prostym przekształceniu równań (3.1) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & (\varrho A^{ee} \gamma_e),_e + \Phi_{,e} (u + \bar{u})_{,ee} + \Phi_{,ee} (u + \bar{u})_{,e} + \varrho b = 0, \\
 & (\varrho C^{eeee} v_{e,e}),_e + (2\varrho C^{ee\varphi\varphi} + \varrho^2 C^{ee\varphi\varphi},_e - \varrho^3 C^{\varphi\varphi\varphi\varphi} - \varrho^3 A^{\varphi\varphi}) v_e - \\
 & \quad - \varrho m^e (u + \bar{u})_{,ee} + \varrho h^e = 0, \\
 & [\varrho^3 C^{e\varphi\varphi e} (u_{,e} - \gamma_e),_e],_e - \varrho (C^{e\varphi\varphi e} + 2C^{e\varphi\varphi e},_e + \varrho C^{e\varphi\varphi e},_e) (u_{,e} - \\
 & \quad - \gamma_e) + \varrho A^{ee} \gamma_e - \varrho^2 h^{\varphi} = 0.
 \end{aligned}$$

Podstawmy teraz do warunków nierozdzielności odkształcenia (2.7) prawe strony równań fizycznych (2.1)_{6,9} oraz wykorzystajmy (2.4). Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & (\varrho^{-3} a_{\varphi\varphi\varphi} \Phi_{,ee}),_e - (\varrho^{-1} a_{eeee} + 2\varrho^{-3} a_{\varphi\varphi ee} - \varrho^{-2} a_{\varphi\varphi ee,e}) \Phi_{,e} = \\
 & \quad = -1/2u_{,e} u_{,e} - u_{,e} \bar{u}_{,e}, \\
 & (\varrho^{-1} a_{\varphi ee e} m^e),_e + (2\varrho^{-3} a_{\varphi ee \varphi} - \varrho^{-2} a_{\varphi ee \varphi},_e - \varrho^{-3} a_{\varphi ee \varphi} - \varrho C_{ee}) m^e = 0.
 \end{aligned}$$

Trzy równania (3.2) i dwa równania (3.3) stanowią podstawowy układ równań zagadnienia kołowo-symetrycznego w ramach technicznej teorii nieliniowej; poszukiwanymi funkcjami są Φ , u , γ_e , m^e i v_e . Dla funkcji m^e otrzymaliśmy niezależne różniczkowe równanie drugiego rzędu (3.3)₂. Jeżeli brzegi $\varrho = \varrho(w)$ i $\varrho = \varrho(z)$ płyty siatkowej (rys. 1) nie są obciążone ani siłami stycznymi p^{ee} [por. (2.4)₃], ani momentami m^e , to otrzymamy rozwiązanie trywialne $m^e = 0$. W przypadku tym równanie (3.2)₂ staje się niezależnym równaniem dla obrotu v_e ; w przypadku przeciwnym obrót v_e można z (3.2)₂ (oraz z odpowiednich warunków brzegowych) wyznaczyć tylko, gdy uprzednio została wyznaczona funkcja ugięcia $u(\varrho)$. Tę ostatnią funkcję wyznaczamy wraz z funkcją naprężeń $\Phi(\varrho)$ oraz funkcjami $\gamma_e(\varrho)$ z równań (3.2)_{1,3} i (3.3)₁. Wymieniony układ trzech równań można sprowadzić do dwóch równań dla $u(\varrho)$ i $\Phi(\varrho)$. Całkując (3.2)₁ mamy bowiem

$$(3.4) \quad \varrho A^{ee} \gamma_e + \Phi_{,e}(u + \bar{u})_{,e} + \int_{\varrho(w)}^{\varrho} \xi b(\xi) d\xi = c,$$

gdzie stała c [zgodnie z (3.4) oraz (2.1) i (2.4)₁] wynosi

$$(3.5) \quad c = \varrho(w) (p_{(w)}^e + [p_{(w)}^{ee}(u + \bar{u})_{,e}]_{\varrho=\varrho(w)}) = \\ = \varrho(z) (p_{(z)}^e + [p_{(z)}^{ee}(u + \bar{u})_{,e}]_{\varrho=\varrho(z)}) + \int_{\varrho(w)}^{\varrho(z)} \varrho b d\varrho.$$

Symbole $p_{(w)}^e$, $p_{(z)}^e$ i $p_{(w)}^{ee}$, $p_{(z)}^{ee}$ oznaczają gęstości obciążeń brzegów $\varrho = \varrho(w)$ oraz $\varrho = \varrho(z)$ kolejno siłami tnącymi i radialnymi. Oznaczając

$$(3.6) \quad F(\varrho) \equiv 1/\varrho \int_{\varrho(w)}^{\varrho} \xi b(\xi) d\xi$$

z (3.4) otrzymamy

$$(3.7) \quad \gamma_e = \frac{1}{A^{ee}} [-\varrho^{-1} \Phi_{,e}(u + \bar{u})_{,e} - F + c\varrho^{-1}].$$

Tak więc funkcja γ_e może być wyrażona za pomocą funkcji naprężeń Φ i funkcji ugięcia u . Korzystając z (3.7), otrzymamy dla $\Phi(\varrho)$ i $u(\varrho)$ układ złożony z równania (3.2)₃ (po wyznaczeniu γ_e) i równania (3.3)₁.

Przyjęta postać występujących tu równań oraz ich nieliniowy charakter zmusza nas do poszukiwania rozwiązań przybliżonych. W dalszym ciągu pracy posługiwać się będziemy metodą ortogonalizacyjną stosując następujący tok postępowania:

1. Przyjmujemy funkcję ugięcia $u(\varrho)$ w postaci

$$(3.8) \quad u = \sum_{a=1}^N c_{(a)} u_{(a)}(\varrho),$$

w której funkcje $u_{(a)}(\varrho)$ spełniają warunki brzegowe, a $c_{(a)}$ są stałymi.

2. Wyznaczamy funkcję naprężeń $\Phi(\varrho)$ z równania (3.3)₁ i warunków brzegowych. Funkcję tę otrzymamy określoną z dokładnością do N stałych $c_{(a)}$.

3. Określamy z dokładnością do stałych $c_{(a)}$ i c funkcje $\gamma(\varrho)$ na podstawie wzoru (3.7).

4. Spełniamy równanie (3.2)₃ w sposób przybliżony, zastępując je N warunkami ortogonalności. Wyznaczając z tych warunków stałe $c_{(a)}$, otrzymamy przybliżoną postać (3.8) funkcji ugięcia. Stałą c obliczamy z warunku brzegowego [można wykorzystać tu niekiedy wzór (3.5)]. Po określeniu stałych $c_{(a)}$ wyznaczamy także funkcję naprężeń $\Phi(\varrho)$.

5. Wyznaczamy funkcje m^e z równania (3.3)₂ i warunków brzegowych (4), a następnie funkcje v_e z równania (3.2)₂ i warunków brzegowych.

W celu napisania warunków ortogonalności, dogodnie wyrazić równanie (3.2)₃ w nieco zmienionej postaci, korzystając z (3.4) i (3.6):

$$(3.9) \quad [\varrho^3 C^{e\varphi\varphi\varphi}(u_{,e} - \gamma_e)_{,e}]_e - \varrho (C^{\varphi\varphi\varphi\varphi} + 2C^{e\varphi\varphi\varphi} + \varrho C^{e\varphi\varphi\varphi},_e) (u_{,e} - \gamma_e) - \Phi_{,e}(u + \bar{u})_{,e} - \varrho F - \varrho^2 h^p + c = 0.$$

Ponieważ γ_e zależy od $u_{,e}$, przeto w (3.9) jako niewiadomą można przyjąć pochodną $u_{,e}$ i ortogonalizować wyrażenie po lewej stronie równania (3.9) z poszczególnymi N funkcjami $u_{(a)}(\varrho)_{,e}$. Mamy tym samym

$$(3.10) \quad \int_{e(\varrho)}^{e(z)} X(\varrho) u_{(a),e} d\varrho = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N,$$

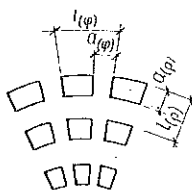
gdzie funkcja $X(\varrho)$ jest określona przez wyrażenie występujące po lewej stronie równania (3.9):

$$(3.11) \quad X \equiv [\varrho^3 C^{e\varphi\varphi\varphi}(u_{,e} - \gamma_e)_{,e}]_e - \varrho (C^{\varphi\varphi\varphi\varphi} + 2C^{e\varphi\varphi\varphi} + \varrho C^{e\varphi\varphi\varphi},_e) \times (u_{,e} - \gamma_e) - \Phi_{,e}(u + \bar{u})_{,e} - \varrho F - \varrho^2 h^p + c.$$

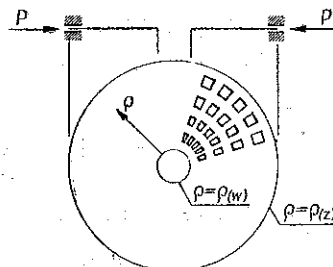
Z równań (3.10) wyznaczamy N stałych $c_{(a)}$. Przedstawiony tu tok postępowania zobrazujemy poniżej przykładami [9].

4. Płyta perforowana

Rozpatrzmy płytę perforowaną, której fragment przedstawia rys. 4, a schemat statyczny — rys. 5.



Rys. 4



Rys. 5

Składowe tensorów sztywności sprężyste wynoszą [9]

$$\begin{aligned}
 A^{ee} &= \hat{K}^{(e)} = \frac{E \delta^3 a_{(\varphi)}}{b_{(e)}^2 l_{(\varphi)}}, \\
 C^{\varphi\varphi\varphi} &= 1/\varrho^2 S^{(III)} = 1/\varrho^2 \frac{\delta^3 E_{(e)}}{12 (1 - \nu_{(e)} \nu_{(\varphi)})}, \\
 C^{\varphi\varphi\varphi e} &= 1/\varrho^2 S^{(IIIe)} = 1/\varrho^2 \frac{\delta^3 E_{(\varphi)}}{12 (1 - \nu_{(e)} \nu_{(\varphi)})}, \\
 C^{\varphi\varphi\varphi e} &= -1/\varrho^2 S^{(IIIe)} = -1/\varrho^2 \frac{\delta^3 E_{(e)} \nu_{(\varphi)}}{12 (1 - \nu_{(e)} \nu_{(\varphi)})}, \\
 C^{\varphi\varphi\varphi e} &= -1/\varrho^2 S^{(IIIe)} = -1/\varrho^2 \frac{\delta^3 E_{(e)} \nu_{(\varphi)}}{12 (1 - \nu_{(e)} \nu_{(\varphi)})}, \\
 a_{eee} &= \frac{1}{\delta E_{(e)}}, \quad a_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{\delta E_{(\varphi)}}, \\
 a_{ee\varphi\varphi} &= \varrho^2 \frac{\nu_{(\varphi)}}{E_{(\varphi)} \delta}, \quad a_{e\varphi\varphi\varphi} = \varrho^2 \frac{\nu_{(e)}}{E_{(e)} \delta}, \\
 E_{(e)} &= E \frac{a_{(\varphi)}}{l_{(\varphi)}}, \quad E_{(\varphi)} = E \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}}, \quad \nu_{(e)} \equiv \nu \frac{a_{(\varphi)}}{l_{(\varphi)}}, \quad \nu_{(\varphi)} \equiv \nu \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}},
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

przy czym E i ν są stałymi materiałowymi oraz δ grubością płyty; znaczenie pozostałych wielkości przedstawiono na rys. 4. Przyjmijmy dalej, że

$$\frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} = 4 \frac{a_{(\varphi)}}{l_{(\varphi)}} = \text{const}, \quad E = \text{const}, \quad \nu = \text{const}, \quad \delta = \text{const}.
 \tag{4.2}$$

Równanie różniczkowe (3.3)₁ dla $\bar{u} \equiv 0$ sprowadzi się wtedy do postaci

$$a\varrho\Phi_{,eee} + a\Phi_{,ee} - b\varrho^{-1}\Phi_{,e} = -\frac{1}{2}u_{,e}u_{,e},
 \tag{4.3}$$

w której

$$a \equiv \frac{1}{\delta E_{(\varphi)}}, \quad b \equiv \frac{1}{\delta E_{(e)}} = 4a.
 \tag{4.4}$$

Funkcję ugięcia przyjmijmy w postaci analogicznej do funkcji występującej w klasycznej teorii małych ugięć płyt cienkich, tj. określoną z dokładnością do jednej stałej u_0 :

$$u = u_0 \left(1 - \frac{\varrho^2}{\varrho_{(z)}^2} \right)^2.
 \tag{4.5}$$

Całka ogólna równania (4.3) ma postać

$$\Phi_{,e} = c_1 \varrho^2 + c_2 \varrho^2 + \frac{8u_0^2}{a\varrho_{(z)}^8} \left(\frac{\varrho^7}{45} - \frac{2}{21} \varrho^5 \varrho_{(z)}^2 - 1/5 \varrho^3 \varrho_{(z)}^4 \right).
 \tag{4.6}$$

Z warunków brzegowych

$$(4.7) \quad p^{ee}(\varrho(w)) = [\varrho(w)^{-1} \Phi, e]_{e=\varrho(w)} = 0, \quad p^{ee}(\varrho(z)) = [\varrho(z)^{-1} \Phi, e]_{e=\varrho(z)} = -p$$

otrzymamy

$$c_1 = \left[-\frac{8u_0^2}{a\varrho(z)^8} \left(-\frac{1}{45} \varrho(w)^7 \varrho(z)^{-3} + \frac{2}{21} \varrho(w)^5 \varrho(z)^{-1} - \frac{1}{5} \varrho(w)^3 \varrho(z) + \frac{8}{63} \varrho(w)^{-2} \varrho(z)^6 \right) + p\varrho(w)^{-2} [\varrho(w)^2 \varrho(z)^{-3} - \varrho(z) \varrho(w)^{-2}]^{-1}, \right.$$

$$c_2 = \left[-\frac{8u_0^2}{a\varrho(z)^8} \left(-\frac{8}{63} \varrho(w)^2 \varrho(z)^6 + \frac{1}{45} \varrho(w)^7 \varrho(z) - \frac{2}{21} \varrho(w)^5 \varrho(z)^3 + \frac{1}{5} \varrho(w)^3 \varrho(z)^5 \right) - p\varrho(w)^2 (\varrho(w)^2 \varrho(z)^{-3} - \varrho(z) \varrho(w)^{-2})^{-1}. \right.$$

Funkcje obciążenia (3.6) oraz wielkość h^p są w tym przypadku równe zero; także stała c zgodnie z (3.5) jest równa zero. Zgodnie z (3.7) mamy więc

$$(4.8) \quad \gamma_e = \frac{4u_0}{\varrho(z) \hat{R}^{(e)}} \left[c_1 \varrho + c_2 \varrho^{-3} - \frac{8u_0^2}{a} \left(\frac{\varrho^6}{45\varrho(z)^8} - \frac{2\varrho^4}{21\varrho(z)^6} + \frac{\varrho^2}{5\varrho(z)^4} \right) \right] \left(\frac{\varrho}{\varrho(z)} - \frac{\varrho^3}{\varrho(z)^3} \right).$$

Korzystając z (4.5), (4.6) i (4.7) zgodnie ze wzorem (3.11) otrzymamy

$$(4.9) \quad X = \frac{36u_0 S^{(I)(I)}}{\varrho(z)^4} - \frac{4u_0 S^{(I)(I)}}{\varrho(z)^2} - \frac{4u_0 S^{(I)(I)}}{\varrho(z)^2 \hat{R}^{(e)}} - \frac{4u_0 S^{(I)(I)}}{\varrho(z)^2 \hat{R}^{(e)}} \left[c_1 4\varrho + c_2 4\varrho^{-3} - \frac{8u_0^2}{a} \left(\frac{49\varrho^6}{\varrho(z)^8 45} - \frac{50}{21} \frac{\varrho^4}{\varrho(z)^6} + \frac{9}{5} \frac{\varrho^2}{\varrho(z)^4} \right) \right] - \frac{4u_0 S^{(I)(I)}}{\varrho(z)^2 \hat{R}^{(e)}} \left[\frac{c_1 16\varrho^3}{\varrho(z)^2} - \frac{8u_0^2}{a} \left(\frac{81\varrho^8}{45\varrho(z)^{10}} - \frac{14}{3} \frac{\varrho^6}{\varrho(z)^8} + \frac{5\varrho^4}{\varrho(z)^6} \right) \right] + \frac{4u_0 S^{(II)(II)}}{\varrho(z)^2} - \frac{4u_0 S^{(II)(II)}}{\varrho(z)^4} \varrho^2 + \frac{4u_0 S^{(II)(II)}}{\varrho(z)^2 \hat{R}^{(e)}} \left[c_1 \varrho + c_2 \varrho^{-3} - \frac{8u_0^2}{a} \left(\frac{\varrho^6}{45\varrho(z)^8} - \frac{2\varrho^4}{21\varrho(z)^6} + \frac{\varrho^2}{5\varrho(z)^4} \right) \right] - \frac{4u_0 S^{(II)(II)}}{\varrho(z)^2 \hat{R}^{(e)}} \left[\frac{c_1 \varrho^3}{\varrho(z)^2} + \frac{c_2 \varrho^{-1}}{\varrho(z)} - \frac{8u_0^2}{a} \times \left(\frac{\varrho^8}{45\varrho(z)^{10}} - \frac{2\varrho^6}{21\varrho(z)^8} + \frac{\varrho^4}{5\varrho(z)^6} \right) \right] + \frac{4u_0}{\varrho(z)^2} \left[c_1 \varrho^3 + c_2 \varrho^{-1} - \frac{8u_0^2}{a} \left(\frac{\varrho^8}{45\varrho(z)^{10}} - \frac{2\varrho^6}{21\varrho(z)^8} + \frac{\varrho^4}{5\varrho(z)^6} \right) \right] + \frac{4u_0}{\varrho(z)^2} \left[c_1 \frac{\varrho^5}{\varrho(z)^2} + c_2 \frac{\varrho}{\varrho(z)} - \frac{8u_0^2}{a} \left(\frac{\varrho^{10}}{45\varrho(z)^{10}} - \frac{2\varrho^8}{21\varrho(z)^8} + \frac{\varrho^6}{5\varrho(z)^6} \right) \right].$$

Warunek ortogonalności (3.10) po obliczeniu całek prowadzi do równania

$$4u_0 S^{(I)(I)}(0,5 - 0,5\lambda^2 - 2,5\lambda^4 + 0,16\lambda^6) + 4u_0 S^{(II)(II)}(0,16 + 0,5\lambda^4 - 0,5\lambda^2 + 0,16\lambda^6) + 4u_0 \left\{ c_1 0,288\varrho(z)^3 (1 - \lambda^7) + c_1 0,2\varrho(z)^3 (1 - \lambda^5) + c_2 \varrho(z)^{-1} (1 - \lambda) - c_2 0,66\varrho(z)^{-1} (1 - \lambda^3) - \frac{8u_0^2}{a} [0,04 (1 - \lambda^{10}) - 0,062 (1 - \lambda^8) + 0,033 (1 - \lambda^6) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - 0,011 (1 - \lambda^{12}) + 0,001 (1 - \lambda^{14}) + c_1 0,111 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^9) + c_2 0,20 \varrho_{(z)}^{-1} (1 - \lambda^5) \Big\} - \\
 & - \frac{4u_0 S^{(I)(I)}}{\bar{R}^{(e)}} \left\{ 2,28 \varrho_{(z)} c_1 (1 - \lambda^7) + 1,33 \varrho_{(z)} c_1 (1 - \lambda^3) + 4c_2 \varrho_{(z)}^{-1} (\lambda - 1) - \right. \\
 & - 3,2 c_1 \varrho_{(z)} (1 - \lambda^5) - \frac{8u_0^2}{a} [1,608 \varrho_{(z)}^{-2} (1 - \lambda^8) - 0,74 \varrho_{(z)}^{-2} (1 - \lambda^{10}) - 0,833 \varrho_{(z)}^{-2} \times \\
 & \times (1 - \lambda^6) + 0,15 \varrho_{(z)}^{-2} (1 - \lambda^{12}) \Big\} + \frac{4u_0 S^{(II)(II)}}{\bar{R}^{(e)}} \left[\varrho_{(z)} c_1 (0,13 - 0,33 \lambda^3 + 0,20 \lambda^5) + \right. \\
 & + \varrho_{(z)}^{-3} c_2 (\lambda + \lambda^{-1} - 2) - \varrho_{(z)} c_1 (0,05 - 0,20 \lambda^5 + 0,144 \lambda^7) - \varrho_{(z)}^{-3} c_2 (0,66 - \lambda + 0,33 \lambda^3) - \\
 & \left. - \frac{8u_0^2}{a \varrho_{(z)}^2} (0,0068 - 0,049 \lambda^8 + 0,009 \lambda^{10} + 0,0149 \lambda^6 - 0,050 \lambda^4 - 0,0016 \lambda^{12}) \right],
 \end{aligned}$$

w którym przyjęto oznaczenia

$$\lambda \equiv \frac{\varrho_{(w)}}{\varrho_{(z)}}.$$

Podstawiając kolejno za λ wartości 0,2 i 0,4 oraz korzystając ze wzorów na stałe c_1 i c_2 , otrzymamy

dla $\lambda = 0,2$

$$(4.10) \quad 4,64 S^{(w)(w)} + (0,064 - 0,80\beta) u_0^2 E \frac{a_{(\varphi)}}{l_{(\varphi)}} \delta - (0,093 + 2,88\beta) p \varrho_{(z)}^2 = 0,$$

dla $\lambda = 0,4$

$$3,37 S^{(w)(w)} + (0,115 + 13,70\beta) u_0^2 \delta E \frac{a_{(\varphi)}}{l_{(\varphi)}} - (0,062 + 5,46\beta) p \varrho_{(z)}^2 = 0,$$

gdzie współczynnik

$$(4.11) \quad \beta = \frac{b_{(e)}^2}{12 [1 - 4\nu^2 (a_{(\varphi)}/l_{(\varphi)})^2] \varrho_{(z)}^2}$$

charakteryzuje wpływ tzw. niezależności obrotu γ_e .

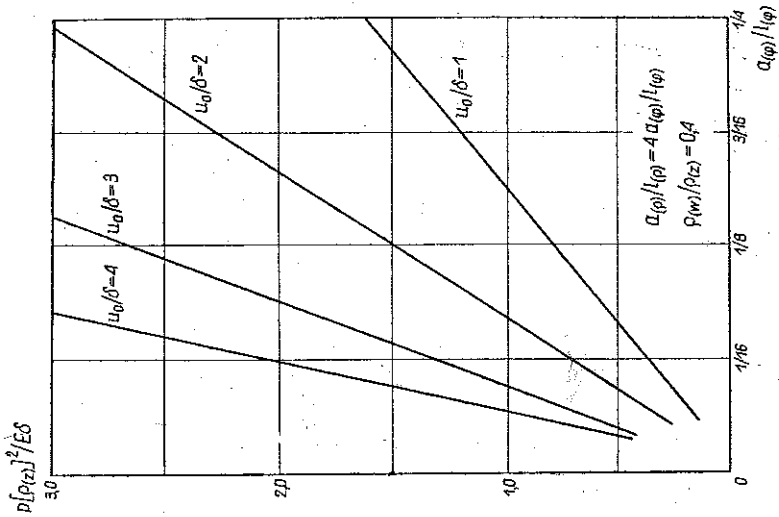
Na rys. 6 i 7 pokazano wykresy ujmujące zależności sił obciążających płytę od parametru λ oraz od wielkości otworów. Otrzymane wyniki dotyczą tylko przypadku (4.2); podobnie postępujemy także w innych przypadkach.

Przyjmijmy teraz, że płyta perforowana jest wstępnie wygięta w stanie nieodkształconym (rys. 8). Niechaj

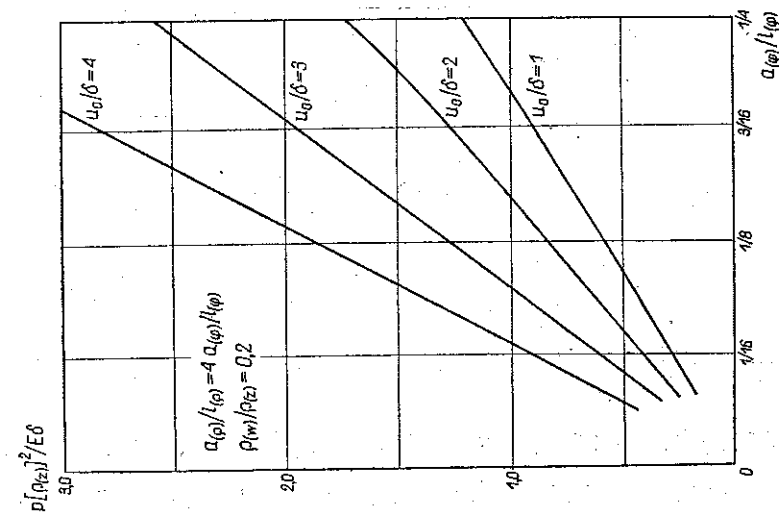
$$(4.12) \quad \frac{a_{(\varphi)}}{l_{(\varphi)}} = \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}}.$$

Oznaczając

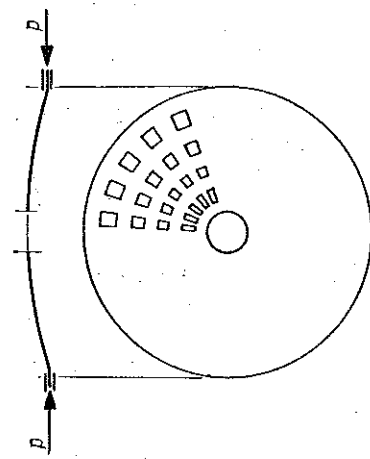
$$(4.13) \quad a \equiv \frac{1}{\delta E_{(e)}},$$



Rys. 7



Rys. 6



Rys. 8

równanie (3.3)₁ napiszemy w postaci

$$(4.14) \quad a(\varrho \Phi_{,eee} + \Phi_{,ee} - \varrho^{-1} \Phi_{,e}) = -1/2 u_{,e} u_{,e} - u_{,e} \bar{u}_{,e}.$$

Funkcję ugięcia $u(\varrho)$ przyjmijmy w postaci (4.5). Niech początkowe wygięcie $\bar{u}(\varrho)$ płyty opisyje funkcja

$$\bar{u} = \bar{u}_0 \left(1 - \frac{\varrho^2}{\varrho(z)^2} \right)^2,$$

przy czym \bar{u}_0 jest znaną stałą. Całka ogólna równania (4.14) ma postać

$$(4.15) \quad \Phi_{,e} = c_1 \varrho + c_2 \varrho^{-1} + \frac{S}{48\varrho(z)^8} (\varrho^7 - 4\varrho(z)^2 \varrho^5 + 6\varrho(z)^4 \varrho^3),$$

gdzie oznaczono

$$S \equiv -8a^{-1} (u_0^2 + 2\bar{u}_0 u_0).$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczmy z warunków brzegowych (4.7), otrzymując

$$c_1 = \left[\frac{S}{48\varrho(z)^8} (3\varrho(z)^6 \varrho(z)^{-2} - \varrho(z)^6 \varrho(z)^{-2} + 4\varrho(z)^4 - 6\varrho(z)^2 \varrho(z)^2) + p\varrho(z)^2 \right] (\varrho(z)^{-2} - \varrho(z)^{-2})^{-1},$$

$$c_2 = \left[\frac{S}{48\varrho(z)^8} (\varrho(z)^6 - 4\varrho(z)^2 \varrho(z)^4 + 6\varrho(z)^4 \varrho(z)^2 - 3\varrho(z)^6) - p \right] (\varrho(z)^{-2} - \varrho(z)^{-2})^{-1}.$$

Funkcja γ_e zgodnie z (3.7) ma postać

$$(4.16) \quad \gamma_e = -\frac{4(u_0 + \bar{u}_0)}{\varrho(z) \hat{R}(e)} \left[c_1 + c_2 \varrho^{-2} + \frac{S}{48\varrho(z)^8} (\varrho^6 - 4\varrho(z)^2 \varrho^4 + 6\varrho(z)^4 \varrho^2) \right],$$

a funkcja X określona za pomocą wzoru (3.11) wyniesie

$$(4.17) \quad X = -\frac{32u_0 S' \varrho^2}{\varrho(z)^4} + \frac{4(u_0 + \bar{u}_0) S'}{\varrho(z)^2 \hat{R}(e)} \left[\frac{S}{48\varrho(z)^6} (48\varrho^6 - 96\varrho(z)^2 \varrho^4 + 48\varrho(z)^4 \varrho^2) \right] - \\ - \frac{4(u_0 + \bar{u}_0) S'}{\varrho(z)^4 \hat{R}(e)} \left[8c_1 \varrho^2 + \frac{S}{48\varrho(z)^8} (80\varrho^8 - 192\varrho(z)^2 \varrho^6 + 144\varrho(z)^4 \varrho^4) \right] - \\ - \frac{4(u_0 + \bar{u}_0)}{\varrho(z)^2} \left[c_1 \varrho^2 + c_2 + \frac{S}{48\varrho(z)^8} (\varrho^8 - 4\varrho(z)^2 \varrho^6 + 6\varrho(z)^4 \varrho^4) \right] + \\ + \frac{4(u_0 + \bar{u}_0)}{\varrho(z)^4} \left[c_1 \varrho^4 + c_2 \varrho^2 + \frac{S}{48\varrho(z)^8} (\varrho^{10} - 4\varrho(z)^2 \varrho^8 + 6\varrho(z)^4 \varrho^6) \right].$$

Podstawiając do (4.17) wyrażenia dla stałych c_1 , c_2 warunkowi ortogonalności (3.10) po wylczeniu całek nadamy postać

$$(4.18) \quad 32S' u_0 [0,17 - 0,25\lambda^4 + 0,18\lambda^6] + 4(u_0 + \bar{u}_0) [\varrho(z)^2 c_1 (0,05 + 0,32\lambda^6 - 0,25\lambda^4 - \\ - 0,12\lambda^8) + c_2 (0,16 - 0,50\lambda^2 + 0,50\lambda^4 - 0,16\lambda^6)] - 0,083 (u_0 + \bar{u}_0) S (0,08 - \lambda^6 +$$

$$\begin{aligned}
 &+2,00\lambda^8 - 1,50\lambda^{10} + 0,49\lambda^{12} - 0,07\lambda^{14} + \frac{4(u_0 + \bar{u}_0) S' S}{\hat{R}^{(e)} 48\varrho^2(z)} [-1,66 + 24\lambda^4 - 60,00\lambda^6 + \\
 &+ 65,00\lambda^8 - 32,00\lambda^{10} + 6,66\lambda^{12}] + \frac{32(u_0 + \bar{u}_0) S' c_1}{\hat{R}^{(e)}} (0,17 - 0,25\lambda^4 + 0,18\lambda^6).
 \end{aligned}$$

Przyjmując w (4.18) na wartości ilorazu λ kolejno 0,2 i 0,4, otrzymamy

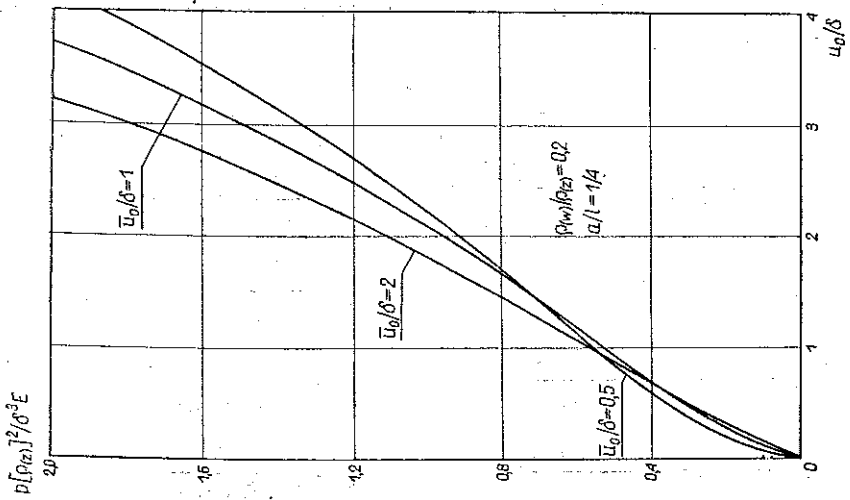
$$\begin{aligned}
 \text{dla } \lambda = 0,2 \quad &0,450 \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} \left[1 - \nu^2 \left(\frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} \right)^2 \right]^{-1} \frac{u_0}{\delta} \left(\frac{u_0}{\delta} + \frac{\bar{u}_0}{\delta} \right)^{-1} + (0,045 + \\
 &+ 3,898\beta) \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} \left[\left(\frac{u_0}{\delta} \right)^3 + 3 \left(\frac{u_0}{\delta} \right)^2 \frac{\bar{u}_0}{\delta} + 2 \frac{u_0}{\delta} \left(\frac{\bar{u}_0}{\delta} \right)^2 \right] \left(\frac{u_0}{\delta} + \frac{\bar{u}_0}{\delta} \right)^{-1} - \\
 &- (0,175 + 5,620\beta) \frac{p\varrho_{(z)}^2}{E\delta^3} = 0; \\
 \text{(4.19)} \quad & \\
 \text{dla } \lambda = 0,4 \quad &0,440 \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} \left[1 - \nu^2 \left(\frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} \right)^2 \right]^{-1} \frac{u_0}{\delta} \left(\frac{u_0}{\delta} + \frac{\bar{u}_0}{\delta} \right)^{-1} + \\
 &+ (0,024 + 3,865\beta) \frac{a_{(e)}}{l_{(e)}} \left[\left(\frac{u_0}{\delta} \right)^3 + 3 \left(\frac{u_0}{\delta} \right)^2 \frac{\bar{u}_0}{\delta} + 2 \frac{u_0}{\delta} \left(\frac{\bar{u}_0}{\delta} \right)^2 \right] \left(\frac{u_0}{\delta} + \frac{\bar{u}_0}{\delta} \right)^{-1} - \\
 &- (0,146 + 6,250\beta) \frac{p\varrho_{(z)}^2}{E\delta^3} = 0.
 \end{aligned}$$

Na wykresach przedstawionych na rys. 9 i 10 zobrazowano otrzymane rezultaty kolejno dla $\lambda = 0,2$ i $\lambda = 0,4$. W rozpatrywanych przypadkach mamy oczywiście $m^e \equiv 0$ oraz $v_e \equiv 0$, tj. równania (3.2)₂ i (3.3)₂ są spełnione tożsamościowo.

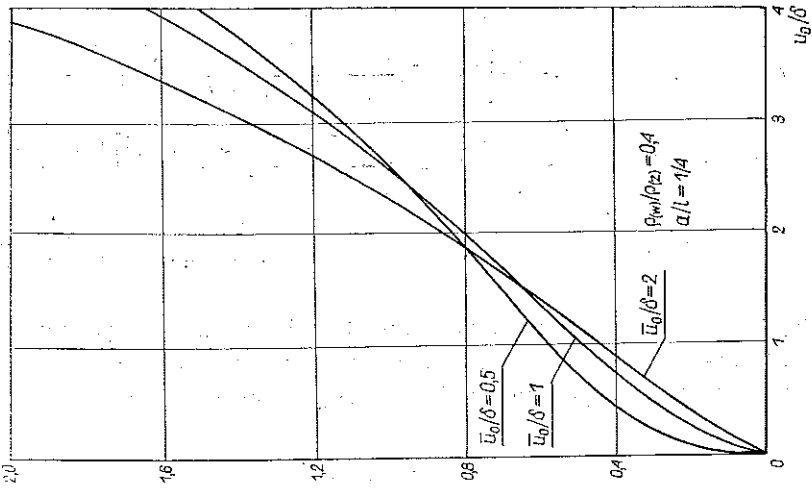
5. Ruszt pierścieniowy

Składowe tensorów sztywności sprężystej rusztu pierścieniowego przedstawionego na rys. 11 wynoszą

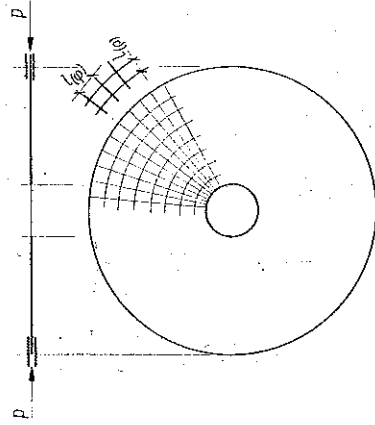
$$\begin{aligned}
 A^{ee} &= \frac{12 (E\bar{J})_{(e)}}{\varrho^3 \mu^2 \Delta\varphi}, \\
 C^{ee\varphi\varphi} &= 1/\varrho^2 \bar{S}^{(e)} = 1/\varrho^2 \frac{(E\bar{J})_{(e)}}{l_{(\varphi)}}, \quad a_{eee} = \frac{1}{R_{(e)}} = \frac{l_{(\varphi)}}{(EA)_{(e)}}, \\
 \text{(5.1)} \quad C^{\varphi ee\varphi} &= 1/\varrho^2 \bar{S}^{(\varphi)} = 1/\varrho^2 \frac{(E\bar{J})_{(\varphi)}}{l_{(e)}}, \quad a_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{R_{(\varphi)}} \varrho^4 = \frac{\varrho^4 l_{(e)}}{(EA)_{(\varphi)}}, \\
 C^{eeee} &= S^{(e)} = \frac{(GC)_{(e)}}{l_{(\varphi)}}, \quad a_{ee\varphi\varphi} = \varrho^2 \frac{1}{R_{(e)} R_{(\varphi)}}, \\
 C^{\varphi\varphi\varphi\varphi} &= S^{(\varphi)} = \frac{(GC)_{(\varphi)}}{l_e}, \quad a_{\varphi\varphi ee} = \varrho^2 \frac{1}{R_{(e)} R_{(\varphi)}}.
 \end{aligned}$$



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

gdzie $(EJ)_{(e)}$ i $(EJ)_{(\varphi)}$ są sztywnościami zginania belek promieniowych i obwodowych, $(EA)_{(e)}$ i $(EA)_{(\varphi)}$ są sztywnościami podłużnymi belek. Przyjmujemy, że stosunek sztywności podłużnej siatki rusztowej w kierunku obwodowym i promieniowym jest równy 2, przekroje belek i parametry materiałowe są stałe oraz $l_{(e)} = \varrho \mu$, $l_{(\varphi)} = \varrho \Delta \varphi$, gdzie $\Delta \varphi$ i μ są stałymi. Równanie (3.3)₁ przyjmuje dla $\bar{u} \equiv 0$ postać

$$(5.2) \quad s \varrho^2 \Phi_{,eee} + 2s \varrho \Phi_{,ee} - t \Phi_{,e} = -\frac{1}{2} u_{,e} u_{,e},$$

w której

$$(5.3) \quad s \equiv \frac{l_{(e)}}{\varrho (EA)_{(\varphi)}} = \frac{\mu}{(EA)_{(\varphi)}} = \text{const}, \quad t \equiv \frac{l_{(\varphi)}}{\varrho (EA)_{(e)}} = \frac{\Delta \varphi}{(EA)_{(e)}} = \text{const},$$

przy czym $t = 2s$ zgodnie z przyjętym założeniem. Funkcję ugięcia przyjmiemy jak poprzednio w postaci (4.5). Całka ogólna równia (5.2) wyniesie wtedy

$$(5.4) \quad \Phi_{,e} = c_1 \varrho + c_2 \varrho^{-2} - \frac{8u_0^2}{s} \left(\frac{\varrho^6}{40\varrho_{(z)}^8} - \frac{\varrho^4}{9\varrho_{(z)}^6} + \frac{\varrho^2}{4\varrho_{(z)}^4} \right).$$

Z warunków brzegowych (4.7) otrzymamy

$$c_1 = \left[-\frac{8u_0^2}{s} \left(-\frac{1}{40} \frac{\varrho_{(w)}^6}{\varrho_{(z)}^{11}} + \frac{1}{9} \frac{\varrho_{(w)}^4}{\varrho_{(z)}^9} - \frac{1}{4} \frac{\varrho_{(w)}^2}{\varrho_{(z)}^7} + \frac{1}{40\varrho_{(w)}^2 \varrho_{(z)}^3} - \frac{1}{9\varrho_{(z)}^3 \varrho_{(w)}^2} + \frac{1}{4\varrho_{(z)}^3 \varrho_{(w)}^2} \right) + p\varrho_{(w)}^{-2} \right] (\varrho_{(w)} \varrho_{(z)}^{-3} - \varrho_{(w)}^{-2})^{-1},$$

$$c_2 = \left[-\frac{8u_0^2}{s} \left(-\frac{1}{40} \frac{\varrho_{(w)}}{\varrho_{(z)}^3} + \frac{1}{9} \frac{\varrho_{(w)}}{\varrho_{(z)}^3} - \frac{1}{4} \frac{\varrho_{(w)}}{\varrho_{(z)}^3} + \frac{1}{40} \frac{\varrho_{(w)}^6}{\varrho_{(z)}^8} - \frac{1}{9} \frac{\varrho_{(w)}^4}{\varrho_{(z)}^6} + \frac{1}{4} \frac{\varrho_{(w)}^2}{\varrho_{(z)}^4} \right) - p\varrho_{(w)} \right] (\varrho_{(w)} \varrho_{(z)}^{-3} - \varrho_{(w)}^{-2})^{-1}.$$

Dla γ_e uzyskamy teraz na podstawie (3.7) funkcję

$$(5.5) \quad \gamma_e = \frac{4u_0 \mu^2 \Delta \varphi}{12 (EJ)_{(e)}} \left[c_1 \varrho^3 + c_2 - \frac{8u_0^2}{s} \left(\frac{\varrho^8}{40\varrho_{(z)}^8} - \frac{\varrho^6}{9\varrho_{(z)}^6} + \frac{\varrho^4}{4\varrho_{(z)}^4} \right) \right] \left(\frac{\varrho}{\varrho_{(z)}^2} - \frac{\varrho^3}{\varrho_{(z)}^3} \right).$$

Funkcja (3.11) będzie równa

$$(5.6) \quad X = \frac{24u_0 \bar{S}^{(e)}}{\varrho_{(z)}^4} \varrho + \frac{4u_0 \bar{S}^{(\varphi)}}{\varrho_{(z)}^2 \varrho} - \frac{4u_0 \bar{S}^p}{\varrho_{(z)}^4} \varrho + \frac{4u_0}{\varrho_{(z)}^2} \left[c_1 \varrho^2 + c_2 \varrho^{-1} - \frac{8u_0^2}{s} \left(\frac{\varrho^7}{40\varrho_{(z)}^8} - \frac{\varrho^5}{9\varrho_{(z)}^6} + \frac{\varrho^3}{4\varrho_{(z)}^4} \right) \right] - \frac{4u_0}{\varrho_{(z)}^4} \left[c_1 \varrho^4 + c_2 \varrho - \frac{8u_0^2}{s} \left(\frac{\varrho^9}{40\varrho_{(z)}^8} - \frac{\varrho^7}{9\varrho_{(z)}^6} + \frac{\varrho^5}{4\varrho_{(z)}^4} \right) \right] + \frac{4u_0 \bar{S}^{(e)} \mu^2 \Delta \varphi}{\varrho_{(z)}^2 12 (EJ)_{(e)}} \left[c_1 \left(\frac{30\varrho^4}{\varrho_{(z)}^2} - 12\varrho^2 \right) + c_2 \frac{6\varrho}{\varrho_{(z)}^2} - \frac{8u_0^2}{s} \left(\frac{110\varrho^9}{40\varrho_{(z)}^{10}} - \frac{73}{10} \frac{\varrho^7}{\varrho_{(z)}^8} + \right. \right.$$

$$+ \frac{173}{18} \left[\frac{\varrho^5}{\varrho_{(z)}^6} - \frac{5\varrho^3}{\varrho_{(z)}^4} \right] + \frac{4u_0 \bar{S}^{(\varphi)} \mu^2 \Delta\varphi}{12(EJ)_{(\varphi)} \varrho_{(z)}^2} \left[c_1 \left(\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{\varrho_{(z)}^2} \right) + \right. \\ \left. + c_2 \left(\varrho^{-1} - \frac{\varrho}{\varrho_{(z)}^2} \right) - \frac{8u_0^2}{s} \left(\frac{\varrho^7 - \varrho^9 \varrho_{(z)}^{-2}}{40\varrho_{(z)}^8} - \frac{\varrho^5 - \varrho^9 \varrho_{(z)}^{-4}}{9\varrho_{(z)}^6} + \frac{\varrho^3 - \varrho^5 \varrho_{(z)}^{-2}}{4\varrho_{(z)}^4} \right) \right],$$

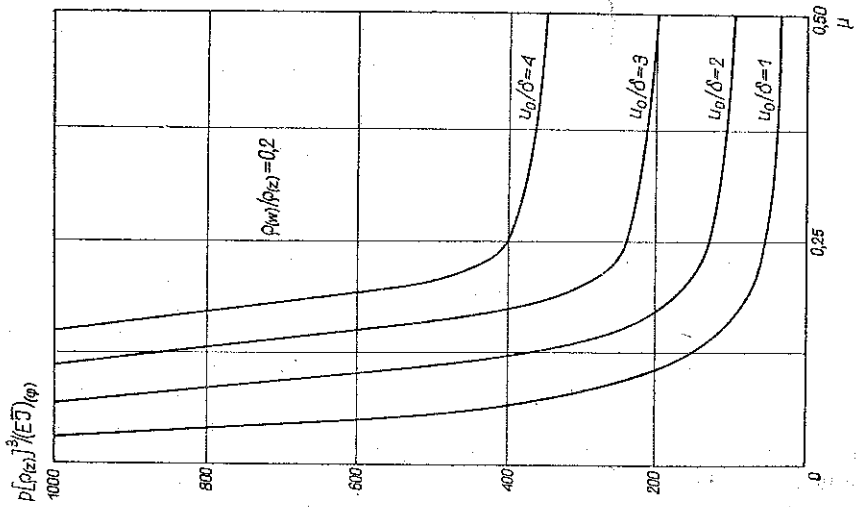
a warunek ortogonalności (3.10) prowadzi do równania

$$(5.7) \quad 24u_0 \bar{S}^{(e)} [-0,13 + 0,33\lambda^3 - 0,2\lambda^5] + 4u_0 \bar{S}^{(\varphi)} [0,66(1 - \lambda^3) - (1 - \lambda) + \\ + 0,2(1 - \lambda^5)] + 4u_0 \left\{ c_1 0,32 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^6) - c_1 0,25 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^4) + c_2 (1 - \lambda^3) 0,66 - \right. \\ \left. - c_2 (1 - \lambda) - c_1 (1 - \lambda^8) 0,125 \varrho_{(z)}^3 - c_2 0,2 (1 - \lambda^5) - \frac{8u_0^2}{s} [0,014(1 - \lambda') - \right. \\ \left. - 0,060(1 - \lambda^9) + 0,088(1 - \lambda^7) - 0,05(1 - \lambda^5) - 0,0001(1 - \lambda^{13})] \right\} - \\ - \frac{4u_0 \bar{S}^{(e)} \mu^2 \Delta\varphi}{12(EJ)_{(e)}} \left\{ c_1 7,0 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^6) - c_1 3,0 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^4) - c_1 3,75 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^8) - \right. \\ \left. - c_2 1,2 (1 - \lambda^5) + c_2 2,0 (1 - \lambda^3) - \frac{8u_0^2}{s} [1,13(1 - \lambda') - 2,76(1 - \lambda^9) + \right. \\ \left. + 3,01(1 - \lambda^7) - (1 - \lambda^5) - 0,2(1 - \lambda^{13})] \right\} + \frac{4u_0 \bar{S}^{(\varphi)} \mu^2 \Delta\varphi}{12(EJ)_{(\varphi)}} \left\{ 0,32 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^6) + \right. \\ \left. + 0,66 c_2 (1 - \lambda^3) - 0,25 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^4) - c_2 (1 - \lambda) - 0,12 \varrho_{(z)}^3 (1 - \lambda^8) c_1 - \right. \\ \left. - 0,2 c_2 (1 - \lambda^5) - \frac{8u_0^2}{s} [0,014(1 - \lambda') - 0,056(1 - \lambda^9) + \right. \\ \left. + 0,078(1 - \lambda^7) - 0,05(1 - \lambda^5) - 0,0019(1 - \lambda^{13})] \right\}.$$

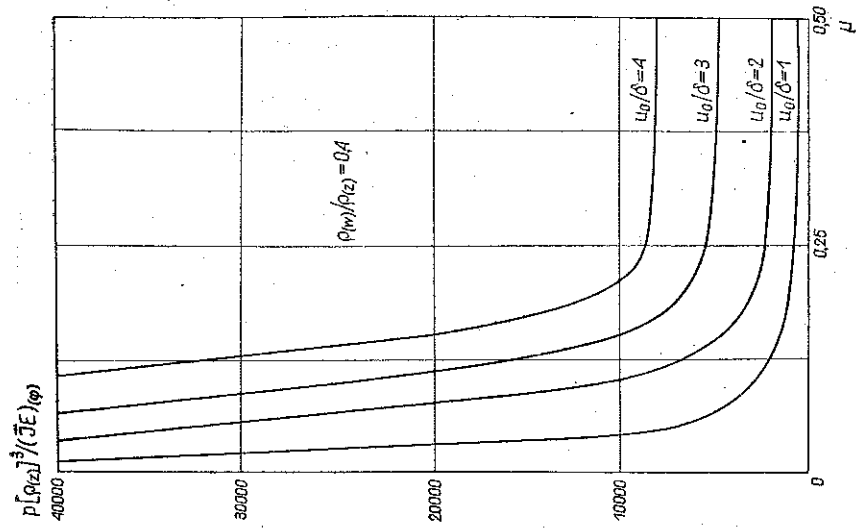
Dla ilorazu $\lambda \equiv \varrho_{(w)}/\varrho_{(z)}$ równego kolejno 0,2 i 0,4 otrzymamy z (5.7) równania

$$(5.8) \quad \text{dla } \lambda = 0,2 \quad 1,76\mu^{-1} + (2,280 - 0,812\eta) \left(\frac{u_0}{\delta} \right)^2 \mu^{-1} - \\ - (0,1930 + 0,0267\eta) \frac{p\varrho_{(z)}^3}{(EJ)_{(\varphi)}} = 0, \\ \text{dla } \lambda = 0,4 \quad 1,04\mu^{-1} + (36,400 - 0,740\eta) \left(\frac{u_0}{\delta} \right)^2 \mu^{-1} - \\ - (0,1365 + 0,01845\eta) \left(\frac{p\varrho_{(z)}^3}{(EJ)_{(\varphi)}} \right) = 0.$$

Na rys. 12 i 13 przedstawiono współzależność siły obciążającej, ugięcia i parametru μ charakteryzującego strukturę siatki.



Rys. 12



Rys. 13

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Load-carrying structures of danse lattice type*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966), 581–597.
2. Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability problems of plates with lattice structure*, 6, 18 (1966) 781–796.
3. Cz. WOŹNIAK and S. ZIELIŃSKI, *Some problems of plane fibrous medium*, Bull. Acad. Polon. Sci., C. IV., 14 (1966), 355–361.
4. Cz. WOŹNIAK and S. ZIELIŃSKI, *On the solution of axially-symmetric problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV., 14 (1966), 439–446.
5. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczenia rusztów pierścieniowych*, Arch. Inżyn. Łądown., 1, 13 (1967), 91–108.
6. Cz. WOŹNIAK i S. ZIELIŃSKI, *Niektóre zagadnienia stateczności kolistych płyt perforowanych*, Arch. Inżyn. Łądown., 1, 13 (1967), 155–161.
7. Cz. WOŹNIAK i S. ZIELIŃSKI, *O wyobczeniū biegunowych siatek prętowych*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 5 (1967), 193–198.
8. P. KLEMM and Cz. WOŹNIAK, *Perforated circular plates under large deflections*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967), 45–56.
9. P. KLEMM, *Stateczność i duże ugięcia kolistych płyt o strukturze siatkowej*, rozprawa doktorska, Politechnika Łódzka, 1967.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА,
КАСАЮЩАЯСЯ СТАТИКИ СЕТАЧНЫХ ПЛАСТИНОК

Темой работы является осесимметрическая задача, касающаяся послекритических упругих сетчатых пластинок. Используя [1, 2] приводится основная система уравнений технической нелинейной теории сетчатых пластинок, из которого получено основную систему уравнений — осесимметрическую задачу. Принято, что сетчатая пластинка — ортотропна, а главные направления ортотропии совпадают с параметрическими линиями полярной координатной системы. Основная система уравнений включает пять уравнений для функций напряжений $\Phi(\varrho)$, прогиба $u(\varrho)$, моментных напряжений $m_\varrho(\varrho)$, а также оборотов $v_\varrho(\varrho)$ и $\gamma_\varrho(\varrho)$. На основе [9] представлено несколько приближенных решений для сферических перфорированных пластинок а также кольцеобразных ростверков, загруженных радиально. Учитывается влияние начального изгиба сетчатой пластинки.

Summary

NONLINEAR CIRCULAR-SYMMETRICAL PROBLEMS OF THE STATIC OF MESH
PLATES

The subject of the paper is the circular symmetrical problem of the postcritical deflections of elastic plates. Following some papers a fundamental set of equation of the applied theory of nonlinear mesh plates has been given. This set has been used to obtain the fundamental set of equation of the circular-symmetrical problem. It has been assumed that a mesh plate is orthotropic and the main directions of the orthotropy coincide with the parametric lines of polar system of coordination. The fundamental sets of equations consists of equations for the stress functions $\Phi(\varrho)$, deflection functions $u(\varrho)$, moment tensions $m^\varrho(\varrho)$ and rotations $v_\varrho(\varrho)$ and $\gamma_\varrho(\varrho)$.

Some examples has been presented for the solution of circular perforated plates and ring grids loaded radially. The effect of initial deflection of the mesh plate has been taken into account.

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1968 r.