

METODA KSZTAŁTOWANIA USTROJÓW CIĘGNOWYCH OSIOWO-SYMETRYCZNYCH

STEFAN JENDO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań są tu powierzchniowe ustroje ciągnowe, które mogą służyć jako przekrycia dachowe dużych i średnich rozpiętości. Mają one zastosowanie w budownictwie przemysłowym, a także często jako przekrycia pawilonów wystawowych, stadionów, hangarów, kin, teatrów i innych obiektów użyteczności publicznej. Ilość tego rodzaju przekryć znacznie wzrosła w ostatnim dziesięcioleciu, co świadczy o ich ekonomicznych zaletach w porównaniu z innymi rodzajami konstrukcji.

W pracy rozpatrzono zagadnienie kształtowania przekryć ciągnowych osiowo-symetrycznych. Przykładami ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych mogą być zrealizowane konstrukcje przekryć np. sali konferencyjnej w San-Antonio (Stany Zjednoczone), stadionu w Montevideo (Urugwaj), hali fabrycznej w Emanżelinie (ZSRR) itd. Szczegółowe opisy tych konstrukcji można znaleźć w pracach [1 i 2].

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie kształtu powierzchniowych ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych oraz jego optymalizacja według kryterium minimum ciężaru. Konstrukcje tego rodzaju zbudowane są z szeregu cięgien ułożonych radialnie i zamocowanych na górnym i dolnym pierścieniu (rys. 1a). W przypadku gdy promień górnego pierścienia r_0 dąży do zera, powstaje ustrój rodzaju namiotowego. W pracy rozpatrzono przypadek ogólny, w którym promienie pierścieni r_1 i r_0 oraz różnica poziomów ich zamocowania mogą być zmienne w sposób dowolny.

Ze względu na symetrię osiową ustroju i obciążenia wyznaczenie kształtu powierzchni osiowo-symetrycznej można sprowadzić do określenia kształtu wycinka powierzchni o kącie środkowym $\Delta\varphi$. Zakładamy, że obciążenie przypadające na powyższy wycinek przenosi się na ciągnę, którego kształt jest poszukiwany.

S. LESSEAR w pracy [3] wyznaczył kształt cięgien nośnych w ustrojach osiowo-symetrycznych pod działaniem ciężaru własnego. Rozwiązanie zagadnienia polegało na wyznaczeniu kształtu cięgien z warunków równowagi. Kształt cięgien wyrażono w postaci nieskończonych szeregów potęgowych.

W niniejszej pracy kształt cięgien nośnych wyznaczono w postaci zamkniętej przez znane funkcje specjalne (funkcje błędu). W odróżnieniu od pracy [3] podano tu ponadto metodę optymalizacji kształtu cięgien nośnych w ustrojach osiowo-symetrycznych. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum ciężaru cięgien nośnych.

2. Założenia i oznaczenia

Przyjęto następujące założenia:

- ciężna są całkowicie wiotkie, tj. niezdolne do przenoszenia momentów zginających, sił ściskających i ścinających;
- przekroje poprzeczne ciężien wzdłuż ich długości są stałe;
- obciążenie działa pionowo i jest rozmieszczone równomiernie na jednostkę pola powierzchni bocznej;
- wpływ przemieszczeń pierścieni podporowych na wielkość sił wewnętrznych w ciężnach może być pominięty;
- ciężna traktowano jako nierozciągliwe, co przy dużych zwisach jest całkowicie uzasadnione.

We wzorach i przekształceniach zastosowano następujące oznaczenia:

- s_1 długość ciężna,
- l rozpiętość ciężna,
- r_1, r_0 promienie dolnego i górnego pierścienia podporowego,
- h różnica poziomów zamocowania ciężien (rys. 1b),
- x, z współrzędne walcowe,
- ξ, η współrzędne bezwymiarowe,
- σ naprężenie dopuszczalne dla rozciągania ciężien,
- q obciążenie równomiernie rozłożone na jednostkę pola powierzchni,
- Z obciążenie przypadające na jednostkę długości ciężna,
- s zmienna mierzona wzdłuż osi ciężna,
- $N(x)$ siła wzdłużna w ciężnie,
- N_{\max} maksymalna siła wzdłużna w ciężnie,
- H rozpór poziomy ciężna,
- γ ciężar objętościowy,
- A przekrój poprzeczny ciężna
- B ciężar własny ciężna

oraz

$$\zeta = \frac{s_1}{l}, \quad \omega = \frac{H}{q l^2 \Delta\varphi}, \quad \alpha = \frac{r_0}{l}, \quad \delta = -\frac{h}{l}, \quad \varrho = \frac{2\sigma B}{\gamma q l^3 \Delta\varphi},$$

$$\xi = \frac{r - r_0}{l}, \quad \eta = \frac{z}{l}, \quad r = r_0 + \xi l.$$

3. Wyznaczenie kształtu ciężien nośnych w ustroju osiowo-symetrycznym

Przedstawione poniżej rozwiązanie zagadnienia uwzględnia dokładny rozkład obciążeń wzdłuż długości ciężien (a nie wzdłuż rozpiętości) oraz obejmuje duże zwisy.

Z warunku równowagi ciężna nośnego wynika następujące równanie różniczkowe [4]:

$$(3.1) \quad Hd \left(\frac{dz}{dx} \right) + Zds = 0,$$

opisujące kształt ciężna pod obciążeniem Z przypadającym na jednostkę długości ciężna (rys. 1b). W przypadku ustrojów osiowo-symetrycznych Z jest funkcją jednej

zmienniej. Wykorzystując symetrię ustroju i obciążenia (rys. 1c) można wyrazić obciążenie przypadające na jednostkę długości cięgna za pomocą wzoru

$$(3.2) \quad Z = -qr\Delta\varphi.$$

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe ξ i η oraz wyrażając ds w postaci

$$(3.3) \quad ds = l\sqrt{1+(\eta')^2} d\xi$$

po przekształceniach równania (3.1) otrzymano następujące równanie różniczkowe:

$$(3.4) \quad \frac{d(\eta')}{\sqrt{1+(\eta')^2}} = \frac{1}{\omega} (\alpha + \xi) d\xi.$$

Całkując równanie (3.4) otrzymano

$$(3.5) \quad \eta' = \text{sh} \left[\frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{2} \xi + \alpha \right) \xi + C \right].$$

Przyjmując układ współrzędnych jak na rys. 1b oraz wyrażając funkcję

$$\text{sh} \left[\frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{2} \xi + \alpha \right) \xi + C \right]$$

przez funkcje wykładnicze można równanie (3.5) po scałkowaniu napisać w postaci

$$(3.6) \quad \eta = \frac{e^C}{e^E} \frac{1}{2\sqrt{G}} \Psi_1 - \frac{e^E}{e^C} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{G}} \Psi_2 + D.$$

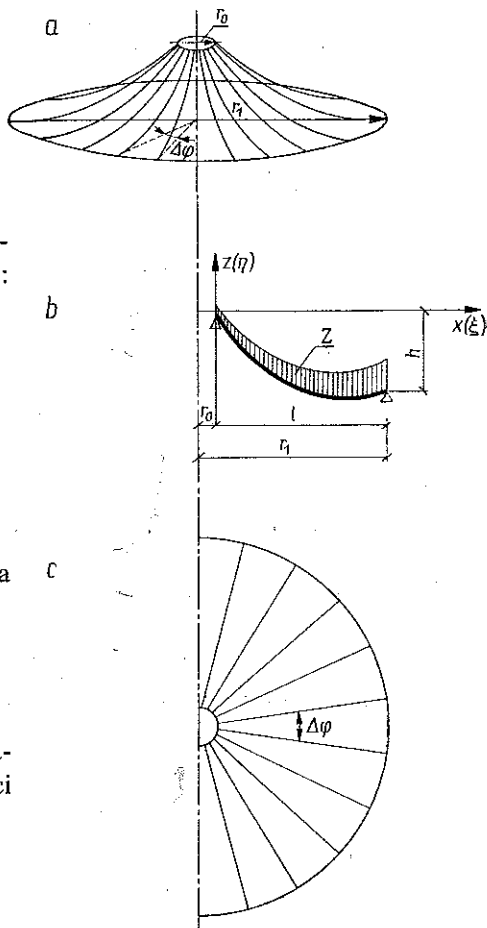
Przez Ψ_1 i Ψ_2 w tym wzorze oznaczono następujące funkcje specjalne [5]:

$$(3.7) \quad \Psi_1 = \int_0^{(\alpha+\xi)\sqrt{G}} e^{t^2} dt - \int_0^{\alpha\sqrt{G}} e^{t^2} dt = K[(\alpha+\xi)\sqrt{G}] - K(\alpha\sqrt{G}),$$

$$\Psi_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(\alpha+\xi)\sqrt{G}} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{G}} e^{-t^2} dt = \text{erf}[(\alpha+\xi)\sqrt{G}] - \text{erf}(\alpha\sqrt{G}).$$

Powyższe funkcje są funkcjami błędu, których wartości liczbowe można znaleźć w tablicach [6, 7 i 8], natomiast stałe mają wartości

$$(3.8) \quad G = \frac{1}{2\omega}, \quad E = \frac{\alpha^2}{2\omega}.$$



Rys. 1

Występujące w równaniu (3.6) stałe całkowania C, D oraz niewiadomą ω charakteryzującą wielkość rozporu H wyznaczymy z warunków brzegowych

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(1) = \delta, \quad \zeta = \int_0^1 \sqrt{1 + (\eta')^2} d\xi.$$

Warunek pierwszy pozwala na wyznaczenie $D = 0$, natomiast dwa pozostałe prowadzą do następującego układu równań:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2\sqrt{G}} \left[\frac{e^C}{e^E} \bar{\Psi}_1 - \frac{e^E}{e^C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{\Psi}_2 \right], \\ \zeta &= \frac{1}{2\sqrt{G}} \left[\frac{e^C}{e^E} \bar{\Psi}_1 + \frac{e^E}{e^C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{\Psi}_2 \right]. \end{aligned}$$

W powyższych równaniach wprowadzono oznaczenia

$$(3.10) \quad \bar{\Psi}_1 = K[(1+a)\sqrt{G}] - K(a\sqrt{G}), \quad \bar{\Psi}_2 = \operatorname{erf}[(1+a)\sqrt{G}] - \operatorname{erf}(a\sqrt{G}).$$

Po przekształceniu równań (3.9) otrzymano

$$(3.11) \quad e^C = \sqrt{G} e^E (\delta + \zeta) \bar{\Psi}_1^{-1}, \quad \zeta^2 - \delta^2 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{G} \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 = 0.$$

Równanie przestępne (3.11)₂ pozwala na obliczenie ω przy danych ζ, δ, a . Podstawiając wyrażenie (3.11)₁ oraz $D = 0$ do równania (3.6) po przekształceniach wyznaczono funkcję określającą kształt cięgna,

$$(3.12) \quad \eta = \frac{1}{2} \left[(\delta + \zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} \Psi_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2G(\delta + \zeta)} \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \right],$$

zależną od parametru ω , który można obliczyć z równania (3.11)₂ przy danych parametrach geometrycznych a, δ oraz obranej z góry wielkości ζ . Dobór wielkości ζ w tym przypadku ma analogiczne znaczenie, jak określenie jednej rzędnej cięgna przy dowolnej odciętej.

4. Optymalizacja kształtu cięgien nośnych według kryterium minimum ciężaru

Funkcja η przedstawiona równaniem (3.12) opisuje kształt cięgien nośnych, a tym samym kształt powierzchni cięgien w zależności od parametrów a, δ, ω i ζ . Parametry a i δ są parametrami geometrycznymi wynikającymi zwykle z warunków konstrukcyjnych i są dane z góry, natomiast ζ i ω są parametrami zależnymi według równania (3.11)₂. Parametr ζ charakteryzujący wielkość zwisu powierzchni cięgien jednoznacznie określa kształt ustroju, a tym samym rozkład sił wewnętrznych i ciężar ustroju. W rzeczywistości istnieje duża dowolność w przyjmowaniu tego parametru. W niniejszej pracy wyznaczono optymalną wielkość zwisu cięgien nośnych, przy której ciężar własny konstrukcji osiąga minimum.

Przekrój poprzeczny cięgna można wyznaczyć z warunku

$$(4.1) \quad A = \frac{N_{\max}}{\sigma} = \frac{H}{\sigma} \sqrt{1 + (\eta'_{\max})^2}.$$

Podstawiając wg (3.5) do wzoru (4.1) i uwzględniając wzór (3.11) otrzymano

$$(4.2) \quad A = \frac{H}{2\sigma} \left[e^{\frac{1}{\omega} \left(\frac{\xi}{2} + \alpha \right) \xi} e^c + e^{-\frac{1}{\omega} \left(\frac{\xi}{2} + \alpha \right) \xi} e^{-c} \right].$$

Największa siła wzdłużna w cięgnie może wystąpić przy $\xi = 0$ lub przy $\xi = 1$ w zależności od wielkości parametrów geometrycznych α i δ . Przy ustalonym α z warunku

$$(4.3) \quad \eta'(0) = -\eta'(1)$$

można wyznaczyć takie δ_{gr} , przy którym siła wzdłużna w cięgnie będzie jednakowa w obu końcach cięgna. Warunek (4.3) po uwzględnieniu zależności (3.5) i (3.11)₁ prowadzi do równania

$$(4.4) \quad \beta_1 (\delta + \zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} = e^{-\frac{\alpha_1}{2\omega}}.$$

W równaniu (4.4) oznaczono

$$(4.5) \quad \beta_1 = \sqrt{G} e^E = \sqrt{\frac{1}{2\omega} e^{\frac{\alpha^2}{2\omega}}}, \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{2} + \alpha \right).$$

W wyniku rozwiązania układu równań (4.4) i (3.11)₂ otrzymano

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} \left[\beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1 e^{-\frac{\alpha_1}{2\omega}} + \omega \sqrt{\pi} \beta_1 \bar{\Psi}_2 e^{\frac{\alpha_1}{2\omega}} \right], \\ \delta &= \frac{1}{2} \left[\beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1 e^{-\frac{\alpha_1}{2\omega}} - \omega \sqrt{\pi} \beta_1 \bar{\Psi}_2 e^{\frac{\alpha_1}{2\omega}} \right] \end{aligned}$$

zależne od parametru ω . Optymalną wielkość parametru ω można wyznaczyć z warunku ekstremum funkcji ciężaru q , która w tym przypadku ma postać

$$(4.7) \quad q = \frac{\omega}{2} \left(1 + e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} \right) \left[\beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1 e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} + \omega \sqrt{\pi} \beta_1 \bar{\Psi}_2 \right].$$

Warunek ekstremum funkcji q prowadzi do następującego równania przestępnego:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{dq}{d\omega} &= \left[\beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1 e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} + \omega \sqrt{\pi} \beta_1 \bar{\Psi}_2 \right] \left[1 + e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\omega} \right) \right] + \\ &+ \left(1 + e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} \right) \left\{ \beta_1^{-1} e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} \left[\bar{\Psi}_1 \left(\beta_3 + \frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \beta_2 \right] + \omega \beta_1 \left[\sqrt{\pi} \bar{\Psi}_2 (1 - \beta_3) - \beta_4 \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

W równaniu (4.8) przyjęto następujące oznaczenia:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left[(1+\alpha) e^{\frac{(1+\alpha)^2}{2\omega}} - \alpha e^{\frac{\alpha^2}{2\omega}} \right], \\ \beta_3 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega} \right), \\ \beta_4 &= \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left[(1+\alpha) e^{-\frac{(1+\alpha)^2}{2\omega}} - \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2\omega}} \right]. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu równania (4.8) znamy ω , a następnie ze wzoru (4.6)₂ można obliczyć graniczną wartość parametru δ_{gr} , która charakteryzuje się tym, że przy $\delta > \delta_{gr}$ największa siła wzdłużna występuje, gdy $\xi = 0$, a gdy $\delta < \delta_{gr}$, maksymalna siła występuje, jeśli $\xi = 1$.

W przypadku $\delta > \delta_{gr}$ pole przekroju poprzecznego cięgna można wyrazić w postaci

$$(4.10) \quad A = \frac{H}{2\sigma} [\beta_1(\delta+\zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} + \beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1(\delta+\zeta)^{-1}],$$

natomiast ciężar cięgna

$$(4.11) \quad \rho = \omega \zeta [\beta_1(\delta+\zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} + \beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1(\delta+\zeta)^{-1}].$$

Ciężar (4.11) jest funkcją złożoną $\rho = \rho(\omega, \zeta)$, $\zeta = \zeta(\omega)$, w której argumenty ω i ζ są związane w sposób uwikłany zależnością (3.11)₂. Dogodnie jest przeprowadzić wyznaczenie ekstremum funkcji ρ względem argumentu ω , natomiast odpowiedni argument ζ wyznaczyć z równania (3.11)₂. Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji ρ ze względu na ω ma postać

$$(4.12) \quad \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\partial \rho}{\partial \omega} + \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{d\omega} = 0.$$

Warunek (4.12) prowadzi do następującego równania przestępnego:

$$(4.13) \quad 2(\delta+\zeta) \zeta^2 [\bar{\Psi}_1^{-2}(1+\beta_2 \bar{\Psi}_1^{-1} - \beta_3) + \beta_1^{-2}(\delta+\zeta)^{-2}(1 - \beta_2 \bar{\Psi}_1^{-1} + \beta_3)] + \\ + \omega [\bar{\Psi}_1^{-2}(\delta+2\zeta) + \beta_1^{-2} \delta(\delta+\zeta)^{-2}] [\sqrt{\pi} \bar{\Psi}_2(\bar{\Psi}_1 - \beta_2) - \beta_4 \bar{\Psi}_1] = 0.$$

W przypadku $\delta < \delta_{gr}$ największa siła w cięgnię wystąpi, gdy $\xi = 1$; odpowiednie pola przekroju poprzecznego i ciężar cięgna mają postać

$$(4.14) \quad \begin{aligned} A &= \frac{H}{2\sigma} \left[\beta_1(\delta+\zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} + \beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1(\delta+\zeta)^{-1} e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} \right], \\ \rho &= \zeta \omega \left[\beta_1(\delta+\zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} + \beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1(\delta+\zeta)^{-1} e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} \right]. \end{aligned}$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji ρ ze względu na ω (4.12) prowadzi do następującego równania przestępnego:

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad & 2\zeta^2 \left\{ (\delta + \zeta) e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} \beta_1 \bar{\Psi}_1^{-1} \left(1 - \beta_3 + \beta_2 \bar{\Psi}_1^{-1} - \frac{\alpha_1}{\omega} \right) + \right. \\
 & \left. + (\delta + \zeta)^{-1} \beta_1^{-1} e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} \left[\bar{\Psi}_1 \left(1 + \beta_3 + \frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \beta_4 \right] \right\} + \omega \left[(\delta + 2\zeta) \beta_1 \bar{\Psi}_1^{-1} e^{\frac{\alpha_1}{\omega}} + \right. \\
 & \left. + \delta (\delta + \zeta)^{-2} \beta_1^{-1} \bar{\Psi}_1 e^{-\frac{\alpha_1}{\omega}} \right] [\sqrt{\pi} \bar{\Psi}_2 (\bar{\Psi}_1 - \beta_2) - \beta_4 \bar{\Psi}_1] = 0,
 \end{aligned}$$

Układy równań (3.11)₂ i (4.13) oraz (3.11)₂ i (4.15) umożliwiają obliczenie parametrów ω i ξ charakteryzujących optymalne zwisы cięgien. Uwzględnienie optymalnych parametrów ω i ζ w równaniu (3.12) umożliwia wyznaczenie optymalnych kształtów cięgien nośnych w zależności od przyjętych parametrów geometrycznych α i δ .

Rozwiązanie zagadnienia zaprogramowano na maszynę cyfrową GIER. Program zakodowano w języku GIER-ALGOL. Na podstawie istniejących konstrukcji ustalono do opracowania tablic przedziały zmienności parametrów geometrycznych α i δ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad & \alpha = 0,05; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; \\
 & \delta_m = -0,2m; \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned}$$

Pierwiastki układów równań (3.11)₂ i (4.13) oraz (3.11)₂ i (4.15) ζ i ω charakteryzujące optymalne zwisы cięgien w zależności od parametrów α i δ zestawiono w tablicy 1. Rzędne optymalnych kształtów cięgien przy danych α i δ obliczono na podstawie wzoru (3.12), uwzględniając optymalne parametry ζ i ω wynikające z rozwiązania układów równań (3.11)₂ i (4.13) oraz (3.11)₂ i (4.15), i zestawiono w tablicy 2. Na podstawie tablicy 2 wykonano wykresy optymalnych kształtów cięgien w zależności od parametrów geometrycznych α i δ i przedstawiono na rys. 2-8. Na wszystkich wykresach podano wielkość parametru ζ , przy którym ciężar własny cięgna osiąga minimum.

Ponieważ minimum funkcji ciężaru cięgien występuje przy dużych zwisach, które nie zawsze mogą być wskazane z punktu widzenia zastosowań, przeto zbadano przebieg zmienności funkcji ρ w zależności od wielkości zwisu ζ oraz parametrów geometrycznych α i δ . Wartości liczbowe ciężaru zestawiono w tablicy 3.

Dla ilustracji wykonano dwa wykresy ciężaru cięgien przy $\alpha = 0,05$ oraz przy $\alpha = 1,00$ i przedstawiono na rys. 9 i 10. Wartości liczbowe parametrów α i δ przyjęto w podanych powyżej przedziałach (4.16). Zmienność parametrów ζ przyjęto według zależności

$$(4.17) \quad \zeta_i = (1 + 0,01i) \sqrt{1 + \delta^2}, \quad i = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.$$

Jednakże w obliczeniach numerycznych dogodniej jest ustalić przedział zmienności parametru ω w następujący sposób:

$$(4.18) \quad \omega_i = 0,1i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

a odpowiednie ζ obliczyć z równania (3.11)₂.

Tablica 1

Optymalne parametry kształtów cięgien wynikające z kryterium minimum ciężaru w zależności od α i δ

 $\alpha = 0,05$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,344	1,12	1,22
-0,20	0,332	1,14	1,08
-0,31	0,301	1,19	1,02
-0,40	0,240	1,31	1,09
-0,60	0,231	1,41	1,30
-0,80	0,220	1,53	1,56
-1,00	0,209	1,67	1,88

 $\alpha = 0,10$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,370	1,12	1,30
-0,20	0,357	1,15	1,16
-0,28	0,326	1,19	1,13
-0,40	0,265	1,30	1,21
-0,60	0,255	1,40	1,45
-0,80	0,243	1,52	1,75
-1,00	0,232	1,66	2,11

 $\alpha = 0,20$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,422	1,12	1,48
-0,20	0,407	1,15	1,32
-0,24	0,377	1,18	1,30
-0,40	0,316	1,29	1,46
-0,60	0,305	1,38	1,75
-0,80	0,292	1,50	2,12
-1,00	0,277	1,64	2,57

 $\alpha = 0,40$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,525	1,13	1,84
-0,19	0,479	1,17	1,65
-0,20	0,426	1,22	1,66
-0,40	0,419	1,27	1,95
-0,60	0,405	1,36	2,36
-0,80	0,388	1,48	2,87
-1,00	0,370	1,62	3,49

 $\alpha = 0,60$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,629	1,13	2,20
-0,16	0,582	1,17	2,01
-0,20	0,530	1,21	2,07
-0,40	0,523	1,26	2,45
-0,60	0,506	1,25	2,97
-0,80	0,485	1,47	3,63
-1,00	0,463	1,61	4,42

 $\alpha = 0,80$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,733	1,14	2,56
-0,13	0,685	1,17	2,37
-0,20	0,635	1,20	2,49
-0,40	0,627	1,26	2,96
-0,60	0,607	1,35	3,59
-0,80	0,582	1,46	4,38
-1,00	0,557	1,60	5,35

 $\alpha = 1,00$

δ	ω	ζ	ϱ
0,00	0,837	1,14	2,93
-0,12	0,789	1,16	2,73
-0,20	0,740	1,20	2,90
-0,40	0,730	1,25	3,46
-0,60	0,708	1,34	4,20
-0,80	0,680	1,46	5,14
-1,00	0,650	1,59	6,28

Ciężar ϱ przy ustalonym α przedstawia funkcję, będącą powierzchnią rozpiętą nad płaszczyzną $\zeta\delta$. Linia przerywaną na płaszczyźnie $\zeta\delta$ zaznaczono zmienność parametru ζ w zależności od δ według wzoru (4.17) przy $i = 0$. Na wykresach zaznaczono punkty, w których ciężar osiąga minimum w zależności od δ i ζ .

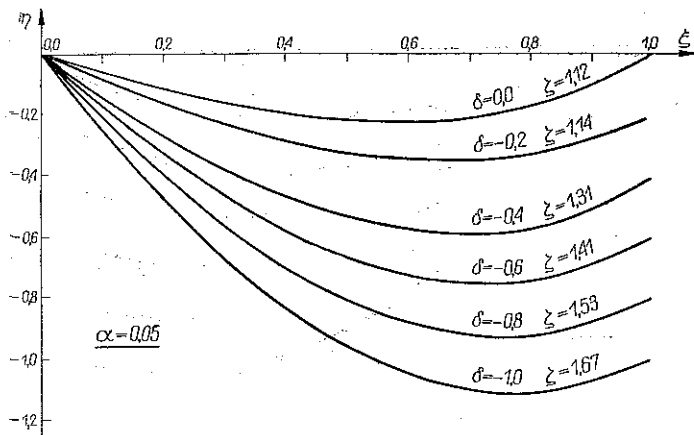
W przypadkach gdy zastosowanie optymalnych zwisów jest niewskazane, można przyjmować zwisy mniejsze od optymalnych, zawarte jednak w przedziałach wolnej

Tablica 2

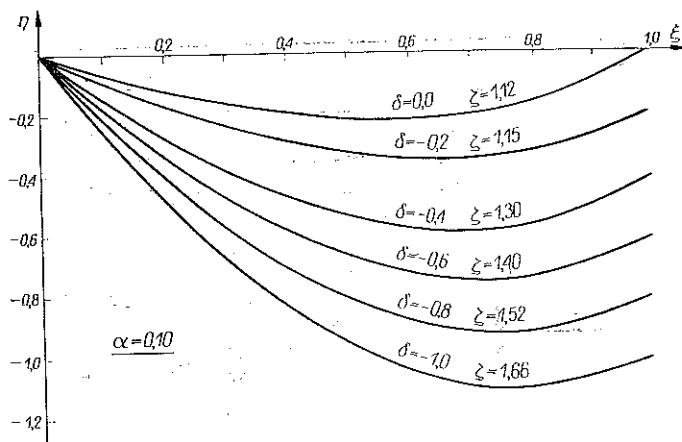
Wartość funkcji $\eta = \eta(\xi)$ określającej kształt ciągnien w zależności od parametrów geometrycznych α i δ

α	δ	0,0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1,0
	ξ	η	η	η	η	η	η
0,05	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,058	-0,083	-0,138	-0,170	-0,206	-0,245
	0,2	-0,112	-0,159	-0,265	-0,327	-0,396	-0,471
	0,3	-0,157	-0,227	-0,376	-0,465	-0,563	-0,669
	0,4	-0,191	-0,282	-0,467	-0,579	-0,702	-0,834
	0,5	-0,212	-0,322	-0,533	-0,665	-0,808	-0,960
	0,6	-0,217	-0,345	-0,574	-0,722	-0,881	-1,050
	0,7	-0,202	-0,348	-0,586	-0,748	-0,919	-1,100
	0,8	-0,165	-0,328	-0,567	-0,741	-0,923	-1,110
	0,6	-0,101	-0,281	-0,509	-0,696	-0,887	-1,080
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000
0,10	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,061	-0,085	-0,139	-0,172	-0,208	-0,248
	0,2	-0,116	-0,164	-0,266	-0,328	-0,398	-0,474
	0,3	-0,161	-0,232	-0,375	-0,464	-0,564	-0,669
	0,4	-0,195	-0,286	-0,464	-0,575	-0,699	-0,830
	0,5	-0,215	-0,326	-0,528	-0,659	-0,803	-0,953
	0,6	-0,219	-0,347	-0,567	-0,714	-0,873	-1,040
	0,7	-0,204	-0,349	-0,579	-0,739	-0,911	-1,090
	0,8	-0,166	-0,328	-0,560	-0,733	-0,915	-1,100
	0,9	-0,100	-0,281	-0,504	-0,690	-0,882	-1,080
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000
0,20	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,065	-0,090	-0,142	-0,174	-0,211	-0,252
	0,2	-0,122	-0,171	-0,268	-0,330	-0,400	-0,477
	0,3	-0,168	-0,240	-0,374	-0,462	-0,561	-0,668
	0,4	-0,202	-0,294	-0,459	-0,569	-0,691	-0,824
	0,5	-0,221	-0,332	-0,520	-0,650	-0,791	-0,942
	0,6	-0,223	-0,351	-0,556	-0,702	-0,859	-1,030
	0,7	-0,206	-0,352	-0,567	-0,727	-0,896	-1,070
	0,8	-0,166	-0,329	-0,548	-0,721	-0,902	-1,090
	0,9	-0,100	-0,281	-0,496	-0,682	-0,872	-1,070
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000

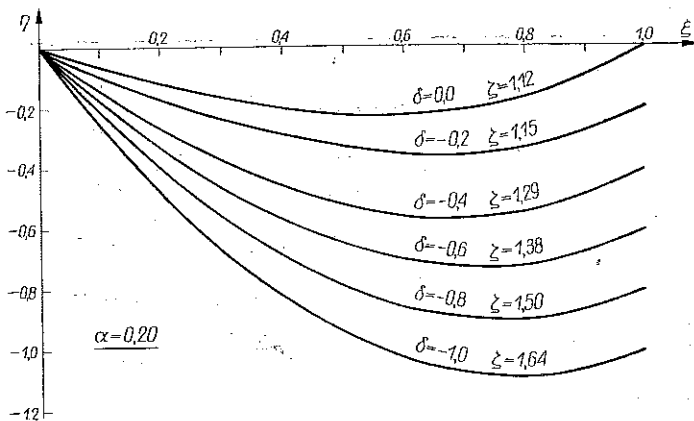
α	δ	0,0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1,0
	ξ	η	η	η	η	η	η
0,40	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,071	-0,116	-0,144	-0,178	-0,216	-0,257
	0,2	-0,132	-0,215	-0,268	-0,332	-0,403	-0,480
	0,3	-0,179	-0,295	-0,371	-0,460	-0,559	-0,665
	0,4	-0,211	-0,354	-0,451	-0,562	-0,684	-0,814
	0,5	-0,228	-0,393	-0,508	-0,638	-0,778	-0,928
	0,6	-0,228	-0,410	-0,542	-0,687	-0,843	-1,010
	0,7	-0,208	-0,403	-0,550	-0,710	-0,879	-1,050
	0,8	-0,167	-0,370	-0,533	-0,706	-0,886	-1,070
	0,9	-0,100	-0,305	-0,485	-0,671	-0,861	-1,050
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000
0,60	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,076	-0,117	-0,146	-0,180	-0,218	-0,260
	0,2	-0,138	-0,215	-0,269	-0,333	-0,403	-0,481
	0,3	-0,185	-0,293	-0,370	-0,458	-0,557	-0,664
	0,4	-0,218	-0,350	-0,447	-0,558	-0,678	-0,809
	0,5	-0,233	-0,387	-0,502	-0,631	-0,770	-0,919
	0,6	-0,252	-0,402	-0,533	-0,678	-0,833	-0,996
	0,7	-0,211	-0,394	-0,541	-0,701	-0,868	-1,040
	0,8	-0,168	-0,361	-0,524	-0,697	-0,876	-1,060
	0,9	-0,100	-0,299	-0,479	-0,665	-0,855	-1,050
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000
0,80	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,079	-0,118	-0,147	-0,181	-0,220	-0,263
	0,2	-0,142	-0,215	-0,270	-0,333	-0,404	-0,482
	0,3	-0,190	-0,291	-0,368	-0,456	-0,554	-0,661
	0,4	-0,222	-0,346	-0,443	-0,553	-0,673	-0,803
	0,5	-0,237	-0,380	-0,495	-0,623	-0,762	-0,910
	0,6	-0,234	-0,394	-0,525	-0,669	-0,823	-0,986
	0,7	-0,212	-0,385	-0,533	-0,691	-0,856	-1,030
	0,8	-0,168	-0,353	-0,516	-0,688	-0,867	-1,050
	0,9	-0,099	-0,293	-0,473	-0,659	-0,848	-1,040
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000
1,00	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	0,1	-0,081	-0,119	-0,148	-0,182	-0,220	-0,263
	0,2	-0,146	-0,215	-0,270	-0,333	-0,404	-0,482
	0,3	-0,194	-0,291	-0,368	-0,456	-0,554	-0,661
	0,4	-0,225	-0,345	-0,442	-0,552	-0,672	-0,801
	0,5	-0,240	-0,379	-0,494	-0,622	-0,760	-0,908
	0,6	-0,236	-0,392	-0,523	-0,667	-0,821	-0,983
	0,7	-0,213	-0,383	-0,530	-0,689	-0,856	-1,030
	0,8	-0,168	-0,351	-0,514	-0,686	-0,865	-1,050
	0,9	-0,099	-0,291	-0,472	-0,658	-0,847	-1,040
	1,0	0,000	-0,200	-0,400	-0,600	-0,800	-1,000



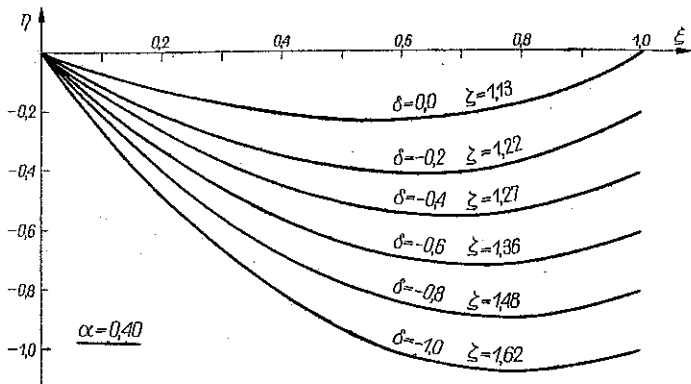
Rys. 2



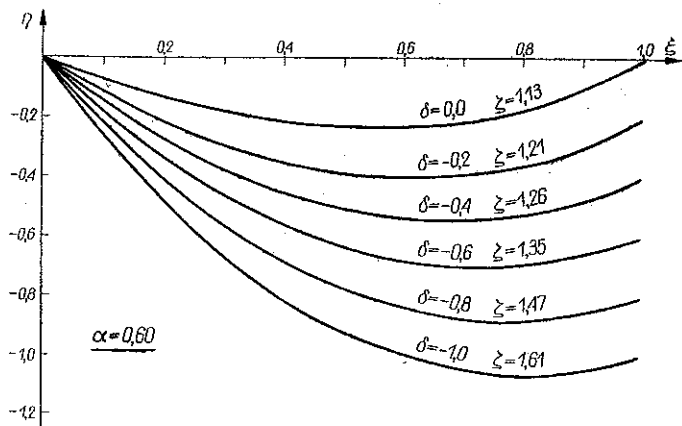
Rys. 3



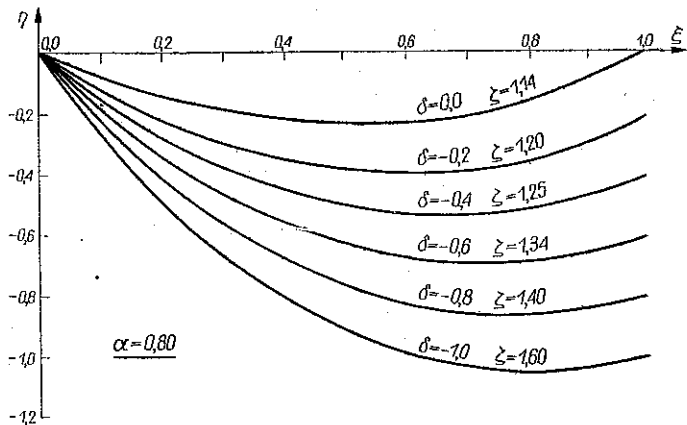
Rys. 4



Rys. 5

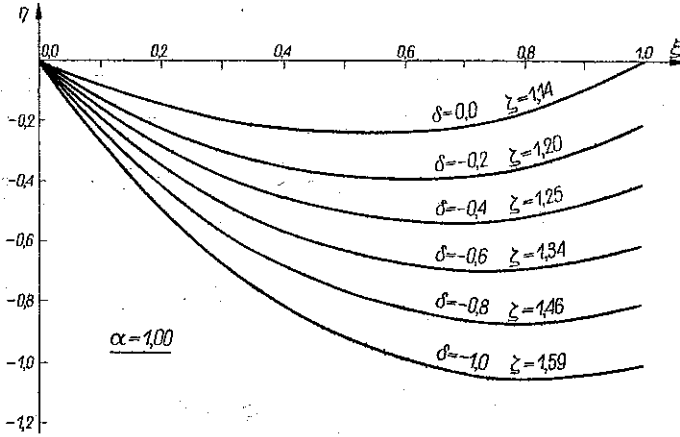


Rys. 6

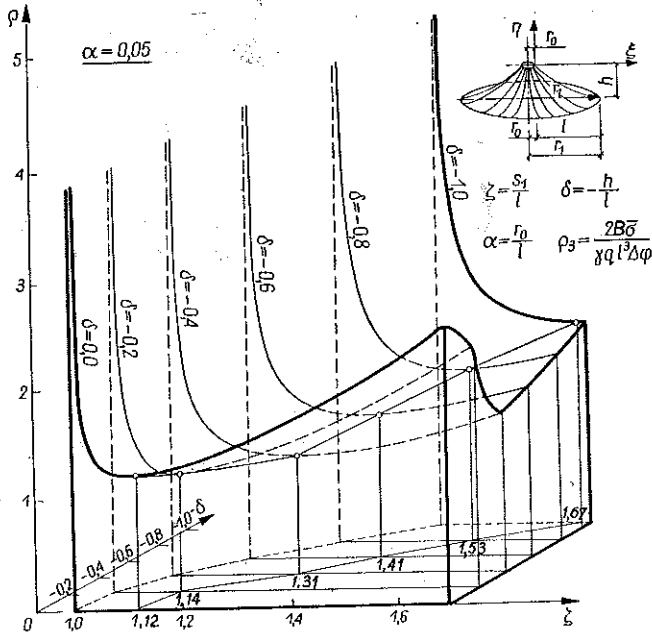


Rys. 7

zmienności funkcji ρ według wykresów na rys. 9 i 10 lub zgodnie z danymi w tabelicy 3. Przyjmowanie zwisów zbyt małych w przedziale szybkiej zmienności funkcji ρ powoduje znaczne zwiększenie ciężaru ustroju. Podane wykresy i tablice mogą być bezpośrednio zastosowane w projektowaniu konstrukcji wiszących.



Rys. 8



Rys. 9

W pracy wyznaczono optymalne kształty powierzchniowych ustrojów ciężnowych osiowo-symetrycznych spełniające kryterium minimum ciężaru. Należy stwierdzić, że optymalnym kształtem ciężen odpowiadają minimalne wartości rozporu ciężen, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia pozostałych elementów konstrukcyjnych, takich jak podpory, pierścienie podporowe itp.

Tablica 3

Ciężar ciągłych w zależności od parametrów geometrycznych α i $\delta = 0,05$

α	0,0		-0,2		-0,4		-0,6		-0,8		-1,0	
	δ	ω	ζ	ϱ	ζ	ϱ	ζ	ϱ	ζ	ϱ	ζ	ϱ
0,05	0,1	3,046	8,590	3,052	8,060	3,072	3,073	3,104	3,310	3,149	3,575	3,873
	0,2	1,372	1,620	1,387	1,430	1,429	1,118	1,498	1,321	1,588	1,575	1,884
	0,3	1,155	1,230	1,173	1,090	1,223	1,126	1,302	1,359	1,405	1,662	2,037
	0,4	1,086	1,240	1,104	1,110	1,157	1,277	1,240	1,547	1,348	1,903	2,347
	0,5	1,054	1,330	1,073	1,220	1,128	1,467	1,213	1,775	1,323	2,185	2,701
	0,6	1,037	1,470	1,057	1,370	1,112	1,673	1,198	2,020	1,310	2,485	3,072
	0,7	1,027	1,630	1,047	1,540	1,103	1,897	1,190	2,273	1,302	2,794	3,452
	0,8	1,021	1,800	1,040	1,720	1,096	2,106	1,184	2,532	1,297	2,108	3,837
	0,9	1,017	1,980	1,036	1,900	1,092	2,328	1,180	2,794	1,294	3,425	4,226
	1,0	1,013	2,160	1,033	2,090	1,089	2,552	1,178	3,057	1,291	3,745	4,617
0,10	0,1	3,583	12,600	3,589	12,000	3,605	4,641	3,633	4,939	3,671	5,269	5,634
	0,2	1,447	1,910	1,461	1,700	1,501	1,301	1,567	1,527	1,653	1,807	2,147
	0,3	1,185	1,350	1,202	1,200	1,251	1,223	1,328	1,475	1,430	1,799	2,200
	0,4	1,101	1,310	1,119	1,170	1,172	1,348	1,254	1,635	1,361	2,011	2,480
	0,5	1,064	1,390	1,083	1,270	1,137	1,525	1,222	1,849	1,331	2,279	2,818
	0,6	1,044	1,520	1,063	1,410	1,118	1,724	1,204	2,087	1,315	2,571	3,180
	0,7	1,032	1,670	1,052	1,570	1,107	1,933	1,194	2,335	1,306	2,874	3,554
	0,8	1,025	1,830	1,044	1,740	1,100	2,149	1,187	2,590	1,300	3,184	3,035
	0,9	1,020	2,000	1,039	1,920	1,095	2,368	1,183	2,849	1,296	3,498	4,321
	1,0	1,016	2,180	1,035	2,110	1,092	2,590	1,180	3,110	1,293	3,815	4,709

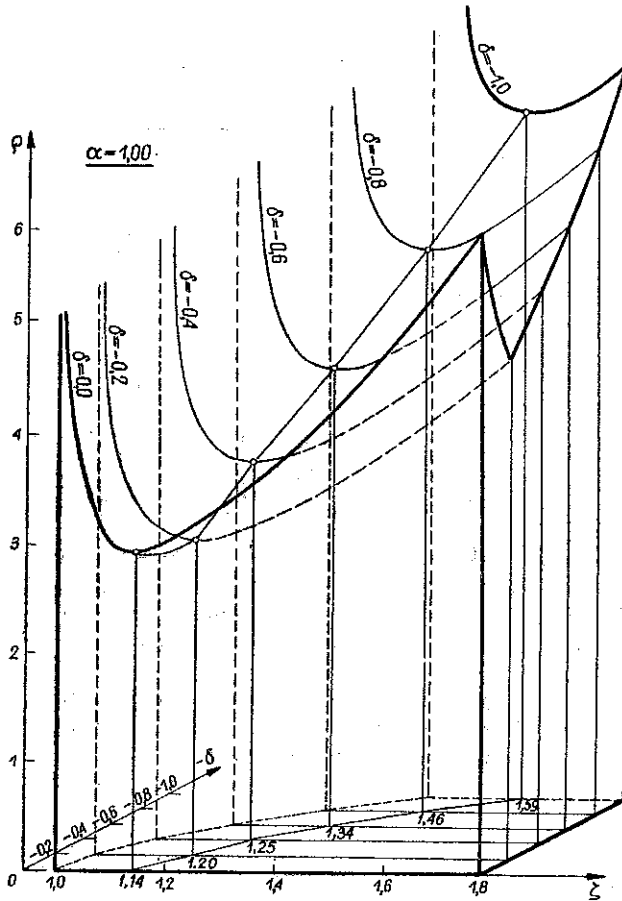
c.d. Table 3

α	δ	0,0		-0,2		-0,4		-0,6		-0,8		-1,0	
		ζ	q	ζ	q	ζ	q	ζ	q	ζ	q	ζ	q
0,20	0,1	5,047	28,000	5,051	26,900	5,062	10,860	5,082	11,340	5,110	11,860	5,145	12,410
	0,2	1,626	2,700	1,638	2,410	1,674	1,796	1,733	2,076	1,812	2,416	1,909	2,821
	0,3	1,253	1,650	1,269	1,450	1,316	1,460	1,389	1,752	1,487	2,123	1,603	2,579
	0,4	1,138	1,490	1,155	1,320	1,206	1,513	1,286	1,836	1,391	2,254	1,515	2,774
	0,5	1,087	1,520	1,105	1,370	1,158	1,658	1,241	2,016	1,350	2,486	1,477	3,073
	0,6	1,069	1 620	1,078	1,480	1,133	1,838	1,218	2,233	1,328	2,756	1,457	3,412
	0,7	1,044	1,750	1,063	1,630	1,118	2,035	1,204	2,468	1,315	3,045	1,445	3,771
	0,8	1,033	1,900	1,053	1,790	1,108	2,243	1,195	2,714	1,307	3,346	1,438	4,142
	0,9	1,026	2,060	1,046	1,960	1,101	2,456	1,189	2,966	1,301	3,653	1,433	4,519
	1,0	1,021	2,240	1,041	2,140	1,097	2,673	1,184	3,223	1,297	3,964	1,429	4,902
0,40	0,2	2,125	5,590	2,135	3,284	2,163	2,641	2,208	4,065	2,271	4,562	2,349	5,137
	0,3	1,432	2,530	1,446	1,859	1,187	2,161	1,552	2,548	1,640	3,029	1,749	3,609
	0,4	1,230	1,970	1,247	1,656	1,294	1,958	1,369	2,391	1,468	2,874	1,586	3,505
	0,5	1,144	1,850	1,161	1,683	1,212	1,997	1,292	2,429	1,396	2,986	1,519	3,677
	0,6	1,099	1,870	1,117	1,789	1,169	2,121	1,252	2,585	1,359	3,191	1,486	3,947
	0,7	1,072	1,950	1,090	1,931	1,144	2,282	1,228	2,782	1,338	3,440	1,466	4,262
	0,8	1,055	2,070	1,074	2,092	1,128	2,465	1,213	3,001	1,324	3,712	1,453	4,602
	0,9	1,043	2,220	1,062	1,266	1,117	2,660	1,203	3,234	1,315	3,998	1,445	4,957
	1,0	1,035	2,370	1,054	2,447	1,109	2,864	1,196	3,476	1,308	4,293	1,439	5,322
	0,60	0,2	2,883	12,100	2,889	7,278	2,910	7,848	2,944	8,495	2,991	9,228	3,051
0,3		1,677	4,030	1,689	2,925	1,724	2,336	1,781	3,844	1,858	4,459	1,952	5,190
0,4		1,353	2,690	1,367	2,225	1,411	2,608	1,480	3,106	1,572	3,728	1,682	4,485
0,5		1,218	2,310	1,234	2,074	1,282	2,459	1,358	2,973	1,457	3,628	1,576	4,434
0,6		1,148	2,210	1,166	2,092	1,216	2,488	1,296	3,028	1,400	3,726	1,523	4,590
0,7		1,108	2,220	1,126	2,182	1,178	2,594	1,260	3,166	1,366	3,910	1,492	4,836
0,8		1,082	2,300	1,100	2,309	1,153	2,739	1,237	3,345	1,346	4,139	1,473	5,130
0,9		1,064	2,410	1,083	2,458	1,137	2,999	1,222	3,550	1,331	4,395	1,460	5,452
1,0		1,052	2,540	1,071	2,621	1,125	3,093	1,211	3,771	1,322	4,668	1,451	5,792

c.d. Tablity 3

α	0,0		-0,2		-0,4		-0,6		-0,8		-1,0		
	δ	ω	ζ	e	ζ	e	ζ	e	ζ	e	ζ	e	
0,80	0,2	4,030	27,200	4,035	6,770	4,050	17,680	4,075	18,690	4,109	19,780	4,153	20,980
	0,3	2,005	6,580	2,015	4,769	2,045	5,324	2,093	5,990	2,159	6,775	2,241	7,690
	0,4	1,509	3,770	1,522	3,077	1,561	3,560	1,624	4,169	1,708	4,919	1,811	5,818
	0,5	1,310	2,950	1,326	2,616	1,370	3,082	1,441	3,690	1,535	4,455	1,648	5,388
	0,6	1,210	2,660	1,226	2,493	1,274	2,960	1,351	3,586	1,450	4,384	1,570	5,365
	0,7	1,152	2,570	1,169	2,504	1,219	2,982	1,299	3,632	1,402	4,471	1,525	5,509
	0,8	1,115	2,580	1,133	2,581	1,185	2,074	1,266	3,754	1,372	4,638	1,498	5,736
	0,9	1,090	2,650	1,180	2,695	1,161	3,206	1,244	3,919	1,352	4,851	1,479	6,012
	1,0	1,073	2,740	1,091	2,833	1,145	3,362	1,229	4,110	1,338	5,092	1,467	6,317
	1,00	0,2	5,757	62,600	5,760	39,720	5,770	41,190	5,788	42,770	5,812	44,450	5,834
0,3		2,440	11,000	2,449	7,984	2,473	8,735	2,513	9,608	2,568	10,610	2,637	11,760
0,4		1,706	5,370	1,718	4,354	1,752	4,959	1,808	5,703	1,884	6,602	1,977	7,666
0,5		1,424	3,830	1,438	3,364	1,479	3,924	1,545	4,640	1,633	5,528	1,740	6,600
0,6		1,284	3,250	1,300	3,019	1,345	3,567	1,417	4,286	1,513	5,194	1,628	6,308
0,7	1,204	3,010	1,221	2,912	1,269	3,463	1,346	4,199	1,446	5,140	1,565	6,297	
0,8	1,154	2,930	1,172	2,918	1,222	3,478	1,301	4,239	1,404	5,219	1,527	6,431	
0,9	1,121	2,940	1,139	2,985	1,190	3,558	1,271	4,348	1,377	5,373	1,502	6,643	
1,0	1,097	3,000	1,115	3,088	1,168	3,678	1,251	4,500	1,358	5,570	1,485	6,903	

Sposób korzystania z tablic jest następujący: należy ustalić parametry geometryczne α i δ , które wynikają z przesłanek konstrukcyjnych, architektonicznych lub innych, następnie trzeba znaleźć w tablicy 1 odpowiadające im optymalne parametry ω i ζ . Znając ω i ζ można obliczyć wielkość rozporu H przypadającego na jednostkę kąta środkowego $\Delta\varphi$, jak również można znaleźć w tablicy 2 rzędne optymalnego kształtu powierzchni cięgien. W przypadkach pośrednich — wyniki można interpolować lub obliczyć na podstawie programu przygotowanego na maszynę cyfrową GIER, który znajduje się w bibliotece programów Centrum Obliczeniowego PAN.



Rys. 10

Przykład liczbowy. Wyznamy optymalny kształt przekrycia cięgnowego osiowo symetrycznego (rys. 1a) o rozpiętości $l = 50$ m pod działaniem obciążenia równomiernie rozmieszczonego na powierzchni bocznej $q = 200$ kG/m². Parametry geometryczne przekrycia wynoszą: $\alpha = 0,05$, $\delta = -0,6$, $\Delta\varphi = 2\pi/100$. W tablicy 1 odczytujemy wartości optymalnych parametrów: $\omega = 0,231$, $\zeta = 1,41$, $\rho = 1,30$.

Wielkość rozporu H wynosi: $H = ql^2 \Delta\varphi \omega = 200 \cdot 50^2 \cdot \frac{2\pi}{100} \cdot 0,231 = 7253$ kG.

Максимальная величина силы вдольней в тугне выстлпи на подпорзе в пункте $\xi = 0$:

$$(4.19) \quad N_{\max} = \frac{H}{\cos \psi} = H \sqrt{1 + [\eta']_{\xi=0}^2}.$$

Велюость η' мюжна облычыч двумя способами. Плервыш спосюб polega на облыченлу С ze wzoru (3.11)₁ i подстлवलенлу до wzoru (3.5); стлду по uwzględnlenlu $\xi = 0$ mamy

$$(4.20) \quad \eta' = \text{sh ln} [\sqrt{G} e^E (\delta + \zeta) \bar{\Psi}_1^{-1}].$$

Другл спосюб polega на wyznaczeniu pochodnej funkcji η окресленей за pomocą wzoru (3.12), skлду по uwzględnlenlu $\xi = 0$ otrzymano

$$(4.21) \quad \eta' = \frac{\sqrt{G}}{2} \left[(\delta + \zeta) \bar{\Psi}_1^{-1} e^{\alpha^2 G} - \frac{\bar{\Psi}_1}{G(\delta + \zeta)} e^{-\alpha^2 G} \right].$$

По знлеленлу wлrości funkcji $\bar{\Psi}_1$ w tablлcлch [7 i 8] i подстлवलенлу odpowiednich wлrości do wzoru (4.20) lub (4.21) otrzymano $\eta'(0) = -2,01$, а нлстęпно ze wzoru (4.19) mamy $N_{\max} = 16283$ kG. Rzędne optymalnego kszлtлtu cęgnл nośnego zestawlono w tablлcy 2, на подстлवलe ktęrej wykonano wykres (rys. 2).

Literatura cytowana w tekście

1. И. М. Раблновлч, *Влслчле покрьгыя*, Труды совещлнл по лсследовлнлу и влнедренлу vlслчлх покрьгыя, Москва 1962.
2. И. Г. Людковсклй, *Влслчле покрьгыя кругового очертлнл в пллне*, Труды НИИЖБ, 25, Москва 1962.
3. S. LESSAER, *Wyznaczenie kszлtлtu lln nośnych w oslowo-symetrycznych powlerzchnlowych ustrojлch wlsлcznych, obclлżonych cęлżлrem wлsnym*, Arch. Inżyn. Lлdow., 2, 4 (1963).
4. П. Ашпель, *Теоретлческл Мехлнлкл*, 1, Москва 1960.
5. Н. Н. Лебедев, *Спецлльные функции и их прллолженл*, Гос. лзд. флз.-мат. лт., Москва —Ленлнград 1963.
6. *Тлблцы веролтностных функций*, 1, Вычлсллтельный центр АН СССР, Москва 1958.
7. Н. М. TERRILL, *Table of the integral e^{x^2}* , Franklin Inst. 3, 238 (1944).
8. Н. М. TERRILL, *An extension of Dawson's table of the integral e^{x^2}* Franklin Inst., 6, 237, 44.
9. Л. Г. Дмлтрлев, А. В. Касллов, *Влнтовые покрьгыя*, Клев 1968.

Резюме

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ВИСЯЧИХ СИСТЕМ

В работе дается определение формы осесимметрических висячих систем по критерию минимума веса. Принимая во внимание осевую симметрию системы и нагрузки, определение формы системы можно свести к определению формы несущих вант с меридианным направлением.

Форму несущих вант можно выразить в замкнутом виде через известные специальные функции (функции ошибок). Кроме того, решение проблемы программируется для цифровой машины GIER, принимая язык ALGOL.

Члмерлческoe решение произведено для геометрических параметров часто встречаемых на практике. Результаты приводятся в виде таблиц и графиков.

Summary

A METHOD OF SHAPING OF AXIALLY-SYMMETRICAL TIE STRUCTURES

The subject of the present work is the determination of the shape of axially-symmetrical surface-suspended structures and its optimization according to the criterion of minimum weight.

Due to the axial symmetry of the structure and load, determination of the shape of the surface can be reduced to the determination of the shape of carrying cables with orientation south.

The shape of carrying ties has been expressed in closed form by known special functions (error functions).

Furthermore, the solution of the problem has been programmed for the GIER computer using the ALGOL code.

Numerical solutions have been obtained for geometrical parameters frequently found in practice.

The results are presented in tables and graphs.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 listopada 1968 r.
