

STATYKA I DYNAMIKA SKRĘCANEGO CIENKOŚCIENNEGO DWUTEOWNIKA  
O ZMIENNYM, BISYMETRYCZNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM

ZBIGNIEW CYWIŃSKI (GDAŃSK)

1. Wprowadzenie

Problem skręcania prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach dwuteowych stał się przedmiotem zainteresowania specjalistów stosunkowo niedawno, bo w połowie lat pięćdziesiątych naszego stulecia.

W roku 1954 publikują swą pracę G. G. KUBO, B. G. JOHNSTON i W. J. ENEY [1]. Praca ta o charakterze doświadczalnym miała jednak głównie na celu zbadanie wpływu odkształcalności przekroju (zginania środnika) na rozkład naprężeń w przekroju pręta i dotyczyła, z wyjątkiem jednego eksperymentu, wyłącznie dwuteowników o stałym przekroju poprzecznym. Jedyne przykłady przekroju zmiennego polegały na zbadaniu belki dwuteowej o dwóch dodatkowych nakładkach pasowych przebiegających na części belki (skokowa zmienność przekroju), pracującej w schemacie wspornika utwierdzonego i obciążonej momentem skręcającym na swym swobodnym końcu; wpływ zmienności przekroju miał tu znaczenie drugorzędne i nie był analizowany teoretycznie.

Dwa lata później, tj. w roku 1956, ogłasza wyniki swych badań L. H. N. LEE [2]. Badania te dotyczą dwuteownika jako pręta zbieżnego. Idąc drogą wskazaną dla dwuteowników o stałym przekroju poprzecznym przez S. P. TIMOSHENKĘ, otrzymuje L. H. N. LEE dla pręta utwierdzonego jednym końcem, a na swobodnym obciążonego skupionym momentem skręcającym, równanie różniczkowe problemu ze względu na kąt obrotu przekroju w formie liniowego, niejednorodnego równania różniczkowego trzeciego rzędu o współczynnikach funkcyjnych, które rozwiązuje metodą szeregów potęgowych.

Z początkiem lat sześćdziesiątych (1960–1961) publikuje dwie prace F. HAMAYOSHI [3 i 4]. W obu opracowaniach analizuje autor ten sam problem, mianowicie skręcanie pręta dwuteowego o parabolicznej zmienności wysokości środnika. Podobnie jak L. H. N. LEE, również F. HAMAYOSHI postępuje drogą S. P. TIMOSHENKI, otrzymując dla schematu wspornika utwierdzonego, obciążonego skupionym momentem skręcającym na końcu swobodnym, podstawowe równanie różniczkowe zagadnienia w formie niejednorodnego, liniowego równania różniczkowego trzeciego rzędu (ze względu na kąt obrotu) o zmiennych współczynnikach; rząd tego równania można obniżyć do drugiego. Rozwiązanie tego ostatniego, które zawiera funkcję paraboliczną zmienności środnika w postaci ogólnej, otrzymuje się metodą szeregów potęgowych.

Nieco innym zagadnieniem zajmuje się w roku 1963 J. C. OSTROMIENCKI [5]. Rozważa on konkretne zadanie zaczerpnięte z praktyki: skręcanie pręta dwuteowego, którego przekrój zmienia się w sposób skokowy wyłącznie w jednym miejscu na długości pręta wskutek nagłej zmiany wysokości środnika przy założeniu, że płaszczyzna jednej z półek pozostaje bez zmian. Praca ta nie zawiera jednak ogólniejszej analizy problemu.

Omawiany problem bada również Cz. MICKIEWICZ [6]. Jego praca opublikowana w roku 1963 dotyczy skręcania prętów typu dwuteownika o skokowym charakterze zmienności przekroju. Przyjęta metoda obliczeniowa polega na uwzględnieniu warunków ciągłości w miejscach skoku przekroju, przy czym wykorzystuje się metodę parametrów początkowych, odniesioną do odcinkowo stałych przekrojów pręta w oparciu o zapis macierzowy. Praca ta przedstawiając pewien sposób obliczania prętów określonego typu nie zawiera jednak merytorycznej analizy problemu.

W roku 1965 autor niniejszego opracowania przedstawia w pracy [7] wyniki własnych badań w tej materii. W oparciu o wszystkie klasyczne założenia technicznej teorii prętów cienkościennych o stałych przekrojach poprzecznych, opracowanej najogólniej przez W. Z. WŁASOWA [8] oraz w nawiązaniu do prac własnych [9 i 10], otrzymuje dla problemu skręcania bisymetrycznego pręta dwuteowego o zmiennej wysokości środnika podstawowe równanie różniczkowe zagadnienia oraz wyrażenia dla sił wewnętrznych i naprężeń w przekroju. Przeprowadza również dowód identyczności otrzymanych wyrażeń z tymi, jakie otrzymano inną drogą w pracach [3 i 4].

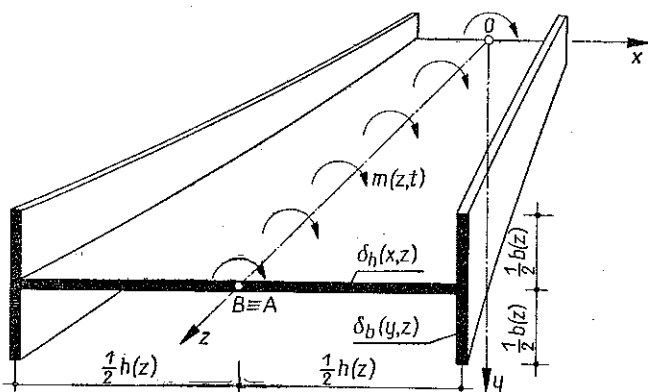
Rozwinięciem pracy [7] jest praca [11] autora, która ukazała się w roku 1968. Uwzględniono w niej nie tylko zmienność wysokości środnika, jak do tej pory, ale również zmienność szerokości półek dwuteownika. Podobnie jak w poprzedniej pracy wyprowadza się tu podstawowe równanie różniczkowe problemu oraz wyrażenia dla sił wewnętrznych i naprężeń w przekroju. Otrzymane wyrażenia analityczne porównuje się z tymi, jakie odpowiadają pracy [7] oraz opracowaniom [9 i 10] autora; te ostatnie prace dotyczą co prawda nieco innego problemu, mianowicie skręcania pręta cienkościennego typu powłoki walcowej o zmiennej długości konturu, ale obejmują swym zakresem również pręty dwuteowe, w których ulegają zmianie wyłącznie szerokości ich półek. Z porównania tego wynika nadrzędny charakter wyrażeń dotyczących dwuteownika o zmiennej wysokości środnika i zmiennej szerokości półek w stosunku do odpowiednich wyrażeń dla dwuteownika, w którym zmienia się tylko wysokość środnika pręta lub też wyłącznie szerokości jego półek.

Należy dodać, że wszystkie wymienione wyżej prace opierały się na założeniu, że nachylenie półek pręta dwuteowego, powstałe wskutek zmieniającej się wysokości jego środnika, jest małe, co w konsekwencji pozwalało przyjąć, że naprężenia normalne w obu półkach i środniku mają kierunek identyczny, równoległy do osi podłużnej pręta. Trzeba stwierdzić, że takie założenie jest tylko przybliżeniem, ponieważ w rzeczywistości naprężenia normalne w półkach zmieniają swój kierunek w zależności od położenia przekroju i są styczne do krzywizn półek w danym przekroju.

Rzeczywisty kierunek naprężeń normalnych w półkach pręta dwuteowego o zmiennej wysokości środnika próbowali w roku 1967 uwzględnić G. C. LEE i B. A. SZABO [12]. Zakładając, że postać odkształcenia dwuteownika przy skręcaniu jest taka, jak w przypadku stałego przekroju poprzecznego, otrzymują oni równanie różniczkowe problemu, które odpowiada spełnieniu warunków równowagi skrętnej, jednak tylko dla liniowo zmiennej wysokości przekroju.

Celem niniejszej pracy jest szczegółowe rozważenie problemu skręcania cienkościennego pręta dwuteowego o zmiennym, bisymetrycznym przekroju poprzecznym na podstawie analizy rzeczywistego stanu przemieszczeń i odkształceń takiego pręta. Problem ten bada się tu przy uwzględnieniu sił masowych i dynamicznego charakteru zewnętrznego obciążenia skręcającego  $m(z, t)$  (rys. 1); w szczególności rozważa się problem statyczny i zagadnienie drgań własnych. Za podstawę analizy teoretycznej przyjmuje się wszystkie klasyczne założenia technicznej teorii prętów cienkościennych o stałych przekrojach poprzecznych [8], a więc następujące hipotezy:

- nieodkształcalność konturu poprzecznego w jego płaszczyźnie,
- brak odkształcenia postaciowego powierzchni środkowej pręta oraz
- spaczenie przekrojów przy skręcaniu (hipoteza Wagnera).



Rys. 1

Jeśli chodzi o sposób zmiany przekroju poprzecznego badanego pręta dwuteowego, to zakłada się, że przekrój ten zmienia się tak, jak to pokazano na rys. 1; tak więc w najogólniejszym przypadku zmianie może ulegać wysokość środnika, szerokość obu półek oraz grubości obu tych elementów pręta. Należy dodać, że zmiany te powinny mieć charakter ciągły i narastać powoli.

## 2. Oznaczenia

Symbolika oznaczeń nawiązuje do proponowanej przez W. Z. WŁASOWA [8], natomiast odpowiednią terminologię czerpie się z pracy J. RUTECKIEGO [13]. Ważniejsze oznaczenia są następujące:

- A* główny biegun wycinkowy przekroju,  
*b* szerokość pólki pręta,  
*B* biegun pomocniczy; punkt przebiecia osi *z* z płaszczyzną bieżącego przekroju; również bimoment,  
*E* moduł Younga,  
*F* pole powierzchni przekroju,  
*g* przyspieszenie ziemskie,  
*G* moduł sprężystości postaciowej,  
*h* wysokość środka pręta,  
*H* wewnętrzny moment skręcający całkowity,  
*H<sub>k</sub>* moment skręcający Saint-Venanta,  
*H<sub>ω</sub>* moment giętno-skrętny,  
*i, j, k* wektory jednostkowe przyporządkowane odpowiednio osiom *x, y, z*,  
*J<sub>a</sub>* moment bezwładności przy skręcaniu,  
*J<sub>A</sub>* biegunowy moment bezwładności przekroju względem punktu *A*,  
*J<sub>x</sub>* moment bezwładności przekroju względem osi *x*,  
*J<sub>y</sub>* moment bezwładności przekroju względem osi *y*,  
*J<sub>ω</sub>* wycinkowy moment bezwładności przekroju,  
*k<sub>no</sub>* częstości drgań własnych, skrętnych pręta,  
*l* rozpiętość pręta,  
*m* obciążenie skręcające rozłożone w sposób ciągły; również masa pręta,  
*0* punkt początkowy prostokątnego układu współrzędnych *x, y, z*,  
*p<sub>x</sub>, p<sub>y</sub>, p<sub>z</sub>* siły d'Alemberta w kierunkach osi *x, y, z*, mierzone na jednostkę powierzchni dla dowolnego punktu powierzchni środkowej pręta,  
*s* długość łuku po konturze przekroju,  
*t* współrzędna czasu,  
*T* energia kinetyczna pręta,  
*u, v, w* przemieszczenia dowolnego punktu powierzchni środkowej pręta odpowiednio na kierunkach osi *z, x, y*,  
*U* energia potencjalna pręta,  
*U<sub>w</sub>* energia sprężysta sił wewnętrznych,  
*U<sub>z</sub>* potencjał sił zewnętrznych,  
*V* objętość pręta,  
*W* energia całkowita pręta,  
*x, y, z* współrzędne prostokątnego układu współrzędnych,  
*γ* ciężar właściwy materiału pręta,  
*δ* grubość elementów pręta,  
*ε<sub>p</sub>* odkształcenie liniowe na kierunku osi *z*,  
*ε<sub>p</sub><sup>\*</sup>* odkształcenie liniowe w kierunku stycznej do krzywizny określonej półki,  
*ξ = z/l* współrzędna bezwymiarowa wzdłuż długości pręta,  
*θ* kąt obrotu przekroju pręta,  
*ρ* gęstość pręta,  
*σ* naprężenie normalne,  
*τ* odpowiadające naprężeniom *σ* naprężenia tnące,  
*τ<sub>k</sub>* naprężenia tnące Saint-Venanta,  
*ω* pole powierzchni wycinkowej.

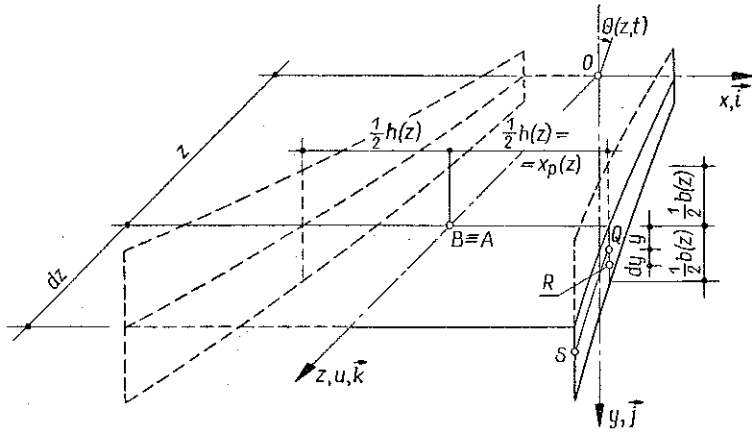
$$(\dot{\phantom{x}}) \equiv \frac{\partial}{\partial z} (\phantom{x}),$$

$$(\dot{\phantom{x}}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\phantom{x}).$$

3. Równanie różniczkowe problemu

3.1. **Premieszczenia i odkształcenia.** Aby można było wyprowadzić podstawowe równanie różniczkowe badanego problemu, trzeba najpierw określić związki między przemieszczeniami a odkształceniami dla dowolnego punktu powierzchni środkowej rozpatrywanego pręta.

W szczególności należy wyprowadzić wzory określające liniowe odkształcenia jednostkowe  $\varepsilon_p^*$  dla punktów położonych na powierzchniach środkowych półek dwuteownika zakładając, że w dowolnym przekroju pręta odkształcenia te mają kierunek styczny do krzywizn półek dwuteownika. Analiza odkształceń liniowych  $\varepsilon$  w punktach powierzchni środkowej środnika jest zbędna, ponieważ obrót tego ostatniego wokół punktu  $A$  jako środka obrotu nie wywołuje takich odkształceń.



Rys. 2

Niech będzie dany pręt dwuteowy (rys. 2). Dla wygody wyznaczy się odkształcenia  $\varepsilon_p^*$  jedynie dla punktów określonego na rys. 2 linią ciągłą elementu półki, a więc dla punktów, których wszystkie współrzędne w przyjętym układzie współrzędnych  $x, y, z$  są dodatnie.

Jak wynika z rys. 2, w stanie nieodkształconym współrzędne dowolnego punktu  $Q$  rozpatrywanego elementu półki oraz jego punktów sąsiednich  $R$  i  $S$ , oddalonych od punktu  $Q$  odpowiednio o  $dy$  i  $dz$ , są następujące:

$$(3.1) \quad Q(x_p, y, z), \quad R(x_p, y+dy, z), \quad S\left(x_p + \frac{dx_p}{dz} dz, y, z+dz\right).$$

Wskutek obrotu pręta i związanych z tym odkształceń punkty  $Q, R, S$  zajmują nowe położenie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} &Q'(x_p - \theta y, y + \theta x_p, z + u), \\ &R'\left(x_p - \theta y - \theta dy, y + dy + \theta x_p, z + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right), \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \text{c.d.} \quad S' \left( x_p + \frac{dx_p}{dz} dz - \theta y - \frac{\partial \theta}{\partial z} dz y, y + \theta x_p + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz x_p + \theta \frac{dx_p}{dz} dz, z + \right. \\ \left. + dz + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right),$$

gdzie  $u(y, z, t)$  jest chwilowo nieznaną funkcją przemieszczenia punktu  $Q$  w kierunku osi  $z$ .

Odształcenia liniowe  $\varepsilon_p^*$  w punkcie  $Q$  w kierunku stycznym do krzywizny rozpatrywanej półki można wyznaczyć (z pominięciem wielkości nieskończenie małej wyższego rzędu) z zależności

$$(3.3) \quad \varepsilon_p^* = \frac{(\overline{Q'S'})^2 - (\overline{QS})^2}{2(\overline{QS})^2},$$

gdzie

$$(3.4) \quad (\overline{QS})^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dx_p}{dz} \right)^2 \right] dz^2, \\ (\overline{Q'S'})^2 = \left[ \left( \frac{dx_p}{dz} - \frac{\partial \theta}{\partial z} y \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} x_p + \theta \frac{dx_p}{dz} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dz^2 \approx \\ \approx \left[ \left( \frac{dx_p}{dz} \right)^2 - 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{dx_p}{dz} y + 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right] dz^2.$$

Podstawiając wyrażenia (3.4) do wzoru (3.3), przyjmując przy tym drugą uproszczoną postać dla  $(\overline{Q'S'})^2$ , otrzymaną przez pominięcie wielkości nieskończenie małych wyższego rzędu, znajdziemy

$$(3.5) \quad \varepsilon_p^* = \frac{1}{1 + \left( \frac{dx_p}{dz} \right)^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{dx_p}{dz} y \right).$$

Jeśli przedstawić teraz elementy liniowe  $\overline{Q'R'}$  i  $\overline{Q'S'}$  w postaci wektorowej

$$(3.6) \quad \mathbf{Q'R'} = -\theta dy \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial y} dy \mathbf{k}, \\ \mathbf{Q'S'} = \left( \frac{dx_p}{dz} - \frac{\partial \theta}{\partial z} y \right) dz \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} x_p + \theta \frac{dx_p}{dz} \right) dz \mathbf{j} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \mathbf{k},$$

i uwzględnić znany warunek braku odształceń postaciowych w formie

$$(3.7) \quad \cos(\mathbf{Q'R'}, \mathbf{Q'S'}) = \frac{\mathbf{Q'R'} \cdot \mathbf{Q'S'}}{|\mathbf{Q'R'}| |\mathbf{Q'S'}|} = 0,$$

to z tego ostatniego wyniku równanie

$$(3.8) \quad -\theta \frac{dx_p}{dz} + \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial \theta}{\partial z} x_p + \theta \frac{dx_p}{dz} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Po uproszczeniu i pominięciu wielkości nieskończenie małych wyższego rzędu otrzymuje się równanie

$$(3.9) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \theta}{\partial z} x_p,$$

a następnie po jego scałkowaniu względem zmiennej  $y$  funkcję  $u$  w postaci

$$(3.10) \quad u = u_0 - \frac{\partial \theta}{\partial z} x_p y.$$

Funkcja  $u_0$  określa w danym przekroju przemieszczenie liniowe w kierunku osi  $z$  punktu położonego na krawędzi półki i środniczka ( $y = 0$ ). W rozpatrywanym przypadku  $u_0 = 0$ , a zatem mamy

$$(3.11) \quad u = - \frac{\partial \theta}{\partial z} x_p y.$$

Ponieważ pochodna funkcji  $u$  względem zmiennej  $z$  jest określona wzorem

$$(3.12) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} x_p y - \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial x_p}{\partial z} y,$$

więc ostateczna postać wyrażenia określającego odkształcenia liniowe  $\varepsilon_p^*$  jest na mocy wzoru (3.5) następująca:

$$(3.13) \quad \varepsilon_p^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{dx_p}{dz}\right)^2} \left( - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} x_p y - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{dx_p}{dz} y \right) \equiv - \frac{1}{1 + x_p'^2} (\theta'' x_p y + 2\theta' x_p' y).$$

Zakładając, że wielkość  $x_p'^2$  w stosunku do jedności jest dostatecznie mała (założenie łagodnej zmienności przekroju), można tę wielkość pominąć. Otrzymuje się wówczas dla  $\varepsilon_p^*$  prosty wzór

$$(3.14) \quad \varepsilon_p^* = -\theta'' x_p y - 2\theta' x_p' y.$$

Jeśli wprowadzić pojęcie pola powierzchni wycinkowej  $\omega = x_p y$ , można wzór (3.14) wyrazić również w postaci

$$(3.15) \quad \varepsilon_p^* = -\theta'' \omega - 2\theta' \omega'.$$

W tym miejscu należy stwierdzić, że wyprowadzony tu wzór (3.15) różni się od odpowiedniego, jaki przyjęto w pracach [3 i 4] i nawiązujących do nich opracowaniach własnych [7 i 11]

$$(3.16) \quad \varepsilon_p = -(\theta\omega)''$$

o składnik  $-\theta\omega''$ . Jak wiadomo, wzór (3.16) wynika z potraktowania problemu skręcania pręta dwuteowego o przekroju zmiennym podobnie do analogicznego

problemu w przypadku stałego przekroju poprzecznego przy założeniu, że przy skręcaniu dwuteownika jego półki są zginane w swoich płaszczyznach. Tak więc, jeśli  $\eta = \theta x_p$  jest ugięciem półki (przemieszczeniem zgodnym z kierunkiem osi  $y$ ), to, wykorzystując wzory wytrzymałości materiałów, otrzymuje się odkształcenia liniowe w postaci  $\varepsilon_p = -\eta'' y = -(\theta x_p)'' y = -(\theta\omega)''$ . Jak wykazały obliczenia porównawcze, składnik  $-\theta\omega''$  zniekształca rzeczywiste wartości odkształceń liniowych  $\varepsilon_p^*$  dość istotnie, chociaż wielkość odpowiedniego błędu zależy tu od wielkości krzywizny właściwej półki dwuteownika. Im mniejsza jest krzywizna półki, tym błąd ten jest mniejszy, a dla liniowej zmienności wysokości środniczka (stałego nachylenia półek) zanika on zupełnie ( $\omega'' = 0$ ).

Na mocy powyższego można uznać dotychczasowe rozwiązania teoretyczne przedstawione w pracach [3, 4, 7 i 11] jako poprawne tylko w części dotyczącej dwuteownika o liniowej zmienności wysokości środniczka, natomiast w przypadku tej zmienności określonej krzywoliniowo rozwiązania te trzeba traktować jako określone rozwiązania przybliżone.

**3.2. Wyprowadzenie równania różniczkowego metodą energetyczną.** Bliższą analizę teoretyczną przeprowadza się dla pręta pokazanego na rys. 1. Podobnie jak w przypadku stałego przekroju poprzecznego zakłada się również i tu, że w przekroju badanego pręta występują jedynie równomiernie rozłożone na grubości ścianek naprężenia normalne  $\sigma$  i odpowiadające im naprężenia tnące  $\tau$  (dla dwuteownika występują one tylko w półkach) oraz moment skręcający Saint-Venanta  $H_k$ .

Potrzebne do określenia energii sprężystej sił wewnętrznych naprężenia normalne  $\sigma$  wyznacza się zgodnie z prawem Hooke'a na podstawie wzoru (3.14) jak następuje:

$$(3.17) \quad \sigma(y, z, t) = -E [\theta''(z, t) x_p(z) y + 2\theta'(z, t) x'_p(z) y].$$

Naprężenia tnące  $\tau$  w myśl hipotezy braku odkształcenia postaciowego nie mają wpływu na wartość energii sprężystej sił wewnętrznych i nie są na razie istotne; będą one omówione później. Natomiast moment skręcający Saint-Venanta  $H_k$  współuczestniczy w tworzeniu wymienionej energii i określony jest wzorem

$$(3.18) \quad H_k(z, t) = GJ_a(z) \theta'(z, t).$$

W powyższych wyrażeniach  $E$  jest modulem Younga,  $G$  modulem sprężystości postaciowej, a  $J_a$  zmiennym momentem bezwładności przekroju przy skręcaniu. Dla jasności we wzorach (3.17) i (3.18) podano argumenty występujących tam funkcji.

Korzystając z metody energetycznej, należy znaleźć wyrażenie dla całkowitej energii badanego pręta i określić warunki, przy których energia ta będzie minimalna. W danym przypadku energia całkowita  $W$  jest równa energii kinetycznej  $T$  pomniejszonej o energię potencjalną  $U$  według wzoru

$$(3.19) \quad W = T - U.$$

W pierwszej kolejności zostanie wyznaczona energia potencjalna  $U$ . Ma ona postać

$$(3.20) \quad U = U_w + U_z,$$



gdzie  $U_w$  jest energią sprężystą sił wewnętrznych, a  $U_z$  jest potencjałem sił zewnętrznych. Pierwszą z wymienionych można przedstawić w postaci

$$(3.21) \quad U_w = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2E} \int_V \sigma^2 dV + \frac{1}{2} \int_l H_k \theta' dz \right) dt.$$

Tutaj  $t_0$  i  $t_1$  opisują dany przedział czasu, a  $dV = dx dy dz$ . Potencjał  $U_z$  natomiast uzależniony jest tylko od rozłożonych w sposób ciągły momentów skręcających  $m(z, t)$  i jest określony przez wzór

$$(3.22) \quad U_z = \int_{t_0}^{t_1} \left( - \int_z m \theta dz \right) dt.$$

Jeżeli we wzorze (3.21) uwzględni się zależności (3.17) i (3.18), a element objętości  $dV$  zastąpi przez  $dF dz$  ( $dF$  oznacza element pola powierzchni przekroju pręta), to energia potencjalna  $U$  jako suma energii wewnętrznej  $U_w$  i zewnętrznego potencjału  $U_z$  przyjmie postać następującą:

$$(3.23) \quad U = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_l \frac{E}{2} \left( \theta''^2 x_p^2 \int_F y^2 dF + 4\theta'^2 x_p'^2 \int_F y^2 dF + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\theta'' \theta' x_p x_p' \int_F y^2 dF \right) dz + \frac{1}{2} \int_l GJ_a \theta'^2 dz - \int_z m \theta dz \right] dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_l \frac{E}{2} \left( x_p^2 J_x \theta''^2 + 4x_p'^2 J_x \theta'^2 + 4x_p x_p' J_x \theta'' \theta' + \frac{G}{E} J_a \theta'^2 - 2 \frac{m}{E} \theta \right) dz dt.$$

Przechodząc do wyznaczenia energii kinetycznej  $T$  badanego pręta, wyjdziemy z następującego wzoru:

$$(3.24) \quad T = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dm \right\} dt.$$

Tutaj przemieszczenia  $u, v, w$  odnoszą się odpowiednio do kierunków  $z, x, y$  i dotyczą dowolnego punktu powierzchni środkowej dwuteownika, przy czym  $dm = \rho dV$  jest elementarną masą, a  $\rho = \gamma/g$  jest gęstością pręta w tym punkcie ( $\gamma$  oznacza ciężar właściwy, a  $g$  przyspieszenie ziemskie).

Przemieszczenia  $u, v, w$  są określane za pomocą następujących formuł:

$$(3.25) \quad u(y, z, t) = - \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} x_p(z) y, \quad v(y, z, t) = -\theta(z, t) y, \\ w(x, z, t) = \theta(z, t) x,$$

przy czym wyrażenie określające funkcję  $u$  przyjęto zgodnie ze wzorem (3.11). Dla pełniejszej jasności podano tutaj we wzorach raz jeszcze odpowiednie argumenty funkcji. W dalszym ciągu argumenty te pomija się, a odpowiednie pochodne funkcji oznacza się przecinkiem lub kropką.

Po zróżniczkowaniu funkcji (3.25) względem zmiennej  $t$  i podniesieniu do kwadratu oraz przy równoczesnym uwzględnieniu zależności  $dm = \frac{\gamma}{g} dF dz$ , otrzymujemy się w myśl (3.24) wzory

$$(3.26) \quad T = \int_{t_0}^{t_1} \int_l \frac{\gamma}{2g} \left( \theta'^2 x_p^2 \int_F y^2 dF + \theta^2 \int_F y^2 dF + \theta^2 \int_F x^2 dF \right) dz dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_l \frac{\gamma}{2g} (x_p^2 J_x \theta'^2 + J_A \theta^2) dz dt,$$

gdzie  $J_A = J_x + J_y$ .

Tak więc energię całkowitą  $W$  można przedstawić zgodnie ze wzorem (3.19) w następującej postaci:

$$(3.27) \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \int_l \left[ \frac{\gamma}{2g} (x_p^2 J_x \theta'^2 + J_A \theta^2) - \frac{E}{2} \left( x_p^2 J_x \theta''^2 + 4x_p'^2 J_x \theta'^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4x_p x_p' J_x \theta' \theta'' + \frac{G}{E} J_A \theta'^2 - 2 \frac{m}{E} \theta \right) \right] dz dt.$$

Jak wiadomo, całkowita energia  $W$  zawarta w pręcie musi mieć wartość minimalną. W rozpatrywanym przypadku warunek ten spełnia równanie Eulera [14] typu

$$(3.28) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta''} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta''} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta''} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta''} \right) = 0,$$

gdzie  $\Phi$  jest funkcją podcałkową wyrażenia (3.27). Wynikające z warunku (3.28) podstawowe równanie różniczkowe badanego zagadnienia można po przekształceniach przedstawić w postaci

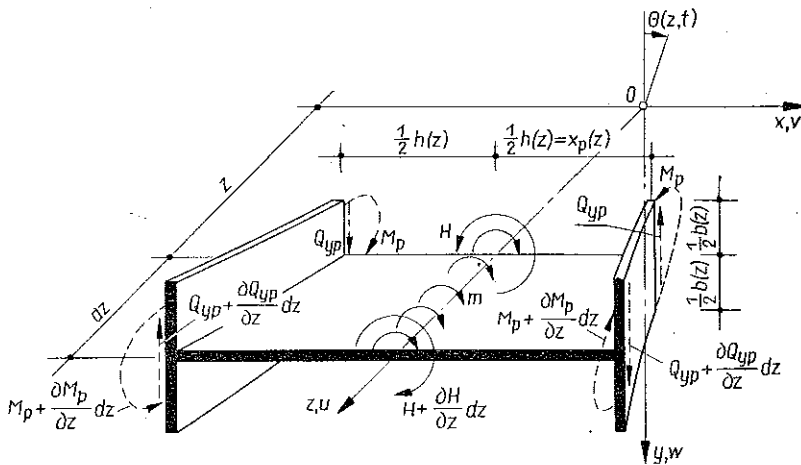
$$(3.29) \quad \{EJ_x [(\theta x_p)'' - \theta x_p''']\}' x_p - EJ_x [(\theta x_p)'' - \theta x_p'''] x_p'' - [GJ_A \theta']' - \\ - \left[ \frac{\gamma}{g} x_p^2 J_x \theta'' \right]' + \frac{\gamma}{g} J_A \theta'' = m$$

lub, wprowadzając wycinkowy moment bezwładności przekroju  $J_\omega = x_p^2 J_x$  i zastępując funkcję  $x_p(z)$  funkcją  $1/2 h(z)$  oraz biorąc pod uwagę, że wielkości  $E, G, \gamma$  i  $g$  nie zależą od  $z$ , wyrazić w równoważnej formie

$$(3.30) \quad \left\{ \frac{J_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h'''] \right\}'' h - \frac{J_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h'''] h'' - \\ - \frac{G}{E} [J_A \theta']' - \frac{\gamma}{gE} \{ [J_\omega \theta'' ]' - J_A \theta'' \} = \frac{m}{E}.$$

Jak widać, z matematycznego punktu widzenia badany problem sprowadza się do rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania różniczkowego cząstkowego typu równania drgań pręta, przy czym tutaj (ze względu na zmienność przekroju pręta) współczynniki przy niewiadomych są zmienne; równanie to [por. (3.30)] traktuje się jako podstawowe dla analizy rozpatrywanego problemu.

3.3. Wyprowadzenie równania różniczkowego z warunku równowagi. Wyprowadzone powyżej podstawowe równanie różniczkowe (3.30) można otrzymać również z warunku równowagi elementarnego odcinka pręta. Rysunek 3 przedstawia badany element wraz z działającymi nań obciążeniami.



Rys. 3

Uwzględniając również wpływy dynamiczne, należy do określonych wyżej sił zewnętrznych i wewnętrznych dodać siły d'Alemberta, które (obliczane na jednostkę powierzchni) dla dowolnego punktu, położonego na powierzchni środkowej rozpatrywanego elementu, są następujące:

$$(3.31) \quad p_z = -\frac{\gamma}{g} \delta u'', \quad p_x = -\frac{\gamma}{g} \delta v'', \quad p_y = -\frac{\gamma}{g} \delta w''.$$

Wobec (3.25) można te siły również przedstawić w postaci

$$(3.32) \quad p_z = \frac{\gamma}{g} \delta \theta'' \cdot x_p y, \quad p_x = \frac{\gamma}{g} \delta \theta'' \cdot y, \quad p_y = -\frac{\gamma}{g} \delta \theta'' \cdot x.$$

Dla omawianego problemu warunkiem równowagi (jedynym) jest znikanie sumy momentów skręcających względem osi z:

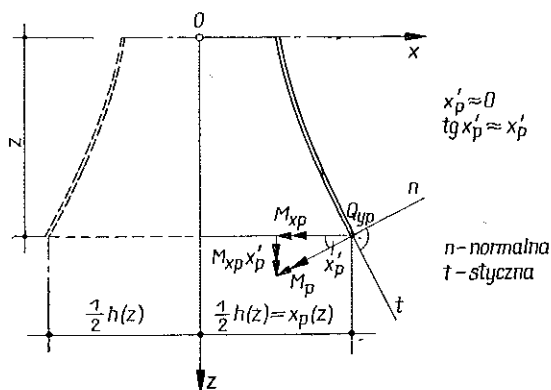
$$(3.33) \quad H + \frac{\partial H}{\partial z} dz - H + m dz - \int_L p_x y ds dz + \int_L p_y x ds dz = 0.$$

Z równania tego wynika równanie

$$(3.34) \quad -\frac{\partial H}{\partial z} + \int_L p_x y ds - \int_L p_y x ds = m.$$

Równania (3.33) i (3.34) zawierają nową zmienną  $s$  (długość łuku po konturze) zastępującą dotychczasowe zmienne  $x$  i  $y$ ;  $L$  oznacza tu całkowitą długość konturu.

Jak zwykle, całkowity moment skręcający  $H$  w przekroju określa się jako sumę momentu giętno-skrętnego  $H_\omega$  i momentu skręcającego Saint-Venanta  $H_k$ . Moment  $H_\omega$  wywołują siły poprzeczne  $Q_{yp}$  w półkach dwuteownika oraz ponadto momenty skręcające  $M_{xp} x'_p$  tworzące wraz z momentami  $M_{xp}$  momenty zginające  $M_p$  w tych półkach ( $M_{xp} \approx M_p$ ). Ilustracją oddziaływań wywołujących moment  $H_\omega$  jest rys. 4, który dla prostoty przedstawia jedynie siły działające na półkę dwuteownika o dodatnich współrzędnych  $x_p$ .



Rys. 4

Na podstawie powyższego dla momentu skręcającego mamy

$$(3.35) \quad H = Q_{yp} h - M_{xp} h' + H_k.$$

Różniczkując (3.35) względem zmiennej  $z$  i podstawiając do (3.34), otrzymuje się następujące równania równowagi momentów skręcających względem osi  $z$ :

$$(3.36) \quad -(Q_{yp} h)' + (M_{xp} h)' - H'_k + \int_L p_x y ds - \int_L p_y x ds = m.$$

Siły poprzeczne  $Q_{yp}$  można określić ze wzoru

$$(3.37) \quad Q_{yp} = M'_{xp} + \int_{L_p} p_z y dy,$$

gdzie  $L_p$  oznacza długość konturu jednej półki dwuteownika. Wstawiając teraz (3.37) do (3.36) otrzymuje się

$$(3.38) \quad -(M'_{xp} h - M_{xp} h') - H'_k - \left( h \int_{L_p} p_z y dy \right)' + \int_L p_x y ds - \int_L p_y x ds = m.$$

Zgodnie z definicją momentu zginającego  $M_{xp}$  mamy

$$(3.39) \quad M_{xp} \approx M_p = \int_{F_p} \sigma y dF_p$$

( $F_p$  oznacza pole powierzchni przekroju jednej półki); po uwzględnieniu (3.17) moment ten przedstawić można w postaci

$$(3.40) \quad M_{xp} = -EJ_{xp} [(\theta_{xp})'' - \theta_{xp}'''];$$

tutaj  $J_{xp}$  oznacza moment bezwładności powierzchni przekroju jednej półki względem osi  $x$ .

Można się teraz przekonać, że, jeśli uwzględnić w równaniu (3.38) związki (3.40) i (3.32), a równocześnie uwzględnić zależności  $J_{\omega} = x_p^2 J_x$ ,  $x_p = h/2$  i  $J_x + J_y = J_A$ , to otrzymuje się wyprowadzone poprzednio na innej drodze równanie (3.30), które jest poszukiwanym podstawowym równaniem różniczkowym badanego problemu.

**3.4. Metoda rozwiązania równania podstawowego. Warunki początkowe i brzegowe.** Wyprowadzone sposobem energetycznym i sprawdzone metodami statyki podstawowe równanie różniczkowe (3.30) badanego problemu posiada budowę, która nie stwarza możliwości ścisłego jego rozwiązania. Możliwe byłoby jednak rozwiązanie tego równania metodami przybliżonymi. Proponuje się tu korzystanie z metody różnic skończonych [15], chociaż trzeba powiedzieć, że metoda ta dla równań różniczkowych cząstkowych nie jest jeszcze opracowana w zadowalający sposób i dlatego rozwiązanie różnicowe badanego problemu w najszerszym jego ujęciu, tj. w zakresie drgań wymuszonych, wymagałoby dodatkowych opracowań.

Przy rozwiązywaniu równania (3.30) muszą być spełnione określone warunki początkowe i brzegowe. W najogólniejszym przypadku należy spełnić dwa warunki początkowe i cztery warunki brzegowe, przy czym te ostatnie zależą, jak wiadomo, od sposobu podparcia końców pręta; oba rodzaje warunków przedstawione są na tablicy 1.

Tablica 1

Warunki początkowe							
$\theta(z, 0) = f_{\theta}(z),$							
$\theta'(z, 0) = f_{\theta}'(z).$							
Warunki brzegowe							
$\theta(0,t)=0$ $B(0,t)=0$	$\theta(L,t)=0$ $B(L,t)=0$	$\theta(0,t)=0$ $\theta'(0,t)=0$	$\theta(L,t)=0$ $B(L,t)=0$	$\theta(0,t)=0$ $\theta'(0,t)=0$	$\theta(L,t)=0$ $\theta'(L,t)=0$	$\theta(0,t)=0$ $\theta'(0,t)=0$	$H(L,t)=0$ $B(L,t)=0$

Dla danych warunków początkowych funkcja  $f_{\theta}(z)$  jest dowolną funkcją kąta obrotu  $\theta$  określoną na długości pręta w chwili  $t = 0$ . Warunki brzegowe dotyczą pośrednio wyłącznie kąta obrotu  $\theta$ , ale bezpośrednio również odpowiednich sił

wewnętrznych, a więc bimomentu  $B$  i momentu skręcającego  $H$ ; te ostatnie określone zostaną w dalszym ciągu niniejszej pracy.

O wiele łatwiejsze jest rozwiązanie problemu wyłącznie statycznego lub zagadnienia drgań własnych badanego pręta.

Dla problemu statycznego równanie (3.30) przyjmuje postać równania zwyczajnego

$$(3.41) \quad \left\{ \frac{J_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] \right\}'' h - \frac{J_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] h'' - \frac{G}{E} [J_a \theta']' = \frac{m}{E},$$

dla którego rozwiązanie różnicowe można otrzymać stosunkowo prosto. Jak wiadomo [9 i 10], w takim przypadku rozwiązuje się układ pewnej liczby liniowych równań algebraicznych, co uzyskuje się bez większego trudu. Liczba tych równań zależy bezpośrednio od liczby części, na jakie dany pręt zostaje podzielony. W pracy [16] wykazano, że w praktyce wystarczy podzielić pręt na dwadzieścia części; odpowiedni błąd rozwiązania różnicowego nie przekracza wówczas  $\pm 1,5\%$ .

Równie prosto otrzymuje się rozwiązanie zagadnienia drgań własnych. Wykorzystując za W. Z. WŁASOWEM [8] metodę Poissona rozdzielania zmiennych otrzymuje się z równania cząstkowego (3.30) odpowiadające mu równanie zwyczajne, które analizuje się w dalszym ciągu za pomocą zwykłej metody różnicowej. Prowadzi to (jak w przypadku problemu statycznego) do układu określonej liczby równań algebraicznych liniowych, które zawierają nieznanne wartości częstości drgań własnych  $k_{n\omega}$ . Te ostatnie wyznacza się z wiadomego warunku, że wyznacznik główny ze współczynników przy niewiadomych musi być równy zero.

W końcowej części niniejszej pracy przedstawione są dwa przykłady liczbowe, które dotyczą właśnie rozwiązania problemu statycznego i zagadnienia drgań własnych badanego pręta. Oba przykłady stanowią szczegółową ilustrację proponowanej metody obliczeniowej.

#### 4. Bimoment i naprężenia normalne

Podobnie jak w przypadku prętów o stałych przekrojach poprzecznych [8] i prętów o przekrojach zmiennych typu powłoki walcowej o zmiennej długości konturu [9 i 10], wprowadza się również i tu pojęcie bimomentu, tj. takiej siły uogólnionej, która wywołuje w przekroju pręta samorównoważny stan naprężeń normalnych  $\sigma$ . Bimoment zdefiniować można w sposób następujący:

$$(4.1) \quad B = \int_F \sigma \omega dF.$$

Tutaj  $\sigma$  oznacza naprężenia normalne wg wzoru (3.17), a  $\omega$  jest polem powierzchni wycinkowej przekroju względem punktu  $A$ . Podstawiając do wzoru (4.1) funkcję (3.17), a także wprowadzając wycinkowy moment bezwładności przekroju  $J_\omega = x_p^2 J_x$  i zastępując funkcję  $x_p(z)$  funkcją  $h(z)/2$  otrzymuje się

$$(4.2) \quad B = - \frac{EJ_\omega}{h} [(\theta h)'' - \theta h''].$$

Naprężenia normalne określone związkiem (3.17) można również wyrazić w zależności od bimomentu  $B$ ; wychodząc mianowicie ze wzorów (3.17) i (4.2) można drogą prostych przekształceń dojść do wzoru następującego:

$$(4.3) \quad \sigma = \frac{B\omega}{J_\omega}.$$

Otrzymane tutaj wzory odnoszą się zarówno do ogólnego problemu drgań wymuszonych, jak również do jego przypadku szczególnego, do problemu statycznego. W pierwszym przypadku  $B$  i  $\sigma$  są funkcjami zmiennymi  $z$  i  $t$ , natomiast w drugim — wyłącznie zmiennej  $z$ .

### 5. Momenty skręcające i naprężenia tnące

W teorii prętów cienkościennych o stałych przekrojach poprzecznych zakłada się, że całkowity moment skręcający  $H$  w przekroju jest sumą momentu skręcającego Saint-Venanta  $H_k$  i momentu giętno-skrętnego  $H_\omega$ . Powyższe założenie przyjmuje się również i tutaj. Dlatego też zagadnienie to rozwiązuje się tu wyłącznie dla problemu statycznego pamiętając, że wpływy dynamiczne ( $p_z, p_x, p_y$ ) wywołują dodatkowe momenty skręcające (czyniące zadość równowadze skrętnej pręta w przypadku ogólnym), nie mieszczące się jednak ani w pojęciu momentu giętno-skrętnego  $H_\omega$ , ani tym bardziej momentu skręcającego Saint-Venanta  $H_k$ .

Moment skręcający Saint-Venanta  $H_k$  określony jest wzorem (3.18), natomiast wyrażenie określające moment giętno-skrętny  $H_\omega$  wyprowadzone zostanie poniżej.

Ze wzoru (3.35) wynika, że

$$(5.1) \quad H_\omega = Q_{yp} h - M_{xp} h'.$$

Mając na uwadze znaną zależność między momentem zginającym a siłą tnącą w przekroju, otrzymuje się zatem

$$(5.2) \quad H_\omega = M'_{xp} h - M_{xp} h'.$$

Podstawiając do wyrażenia (5.2) funkcję (3.40) i przyjmując  $J_\omega = x_p^2 J_x$ ,  $x_p = h/2$ , otrzymuje się

$$(5.3) \quad H_\omega = - \left\{ \left[ \frac{EJ_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] \right]' h - \frac{EJ_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] h' \right\}$$

lub biorąc pod uwagę (4.2)

$$(5.4) \quad H_\omega = \left( \frac{B}{h} \right)' h - \frac{B}{h} h'.$$

Mając wyrażenia określające momenty  $H_k$  i  $H_\omega$  można zbadać bliżej (na innej niż poprzednio drodze) stan równowagi skrętnej rozpatrywanego pręta. Jak wiadomo, stan ten opisuje w najogólniejszym przypadku problemu statycznego ( $E \neq \text{const}$ ,  $G \neq \text{const}$ ) równanie (3.41), które napiszemy w postaci

$$(5.5) \quad \left\{ \frac{EJ_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] \right\}'' h - \frac{EJ_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] h' - [GJ_a \theta']' = m.$$

Można założyć, że momenty giętno-skrętne  $H_\omega$  w przekrojach pręta wywołane są tylko częścią rozłożonych w sposób ciągły zewnętrznych momentów skręcających  $m$ ; tę część oznacza się tu symbolem  $m_\omega$ . Wówczas jest oczywista zależność

$$(5.6) \quad m_\omega = -H'_\omega.$$

Dokonując na wyrażeniu (5.3) operacji przepisanej wzorem (5.6) otrzymuje się

$$(5.7) \quad m_\omega = \left\{ \frac{EJ_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] \right\}'' h - \frac{EJ_\omega}{h^2} [(\theta h)'' - \theta h''] h' = -H_\omega.$$

Odnosząc więc wyrażenia (5.7) i (3.18) do równania (5.5) można to ostatnie wyrazić w postaci

$$(5.8) \quad -H'_\omega - H'_k = m = -H'.$$

Całkując równanie (5.8) względem zmiennej  $z$  przy założeniu, że zewnętrzne obciążenie skręcające stanowią wyłącznie momenty  $m$ , uzyskuje się postulowane poprzednio równanie momentów skręcających w przekroju pręta w formie:

$$(5.9) \quad H = H_\omega + H_k.$$

Z powyższego należy wysnuć powtórnie wniosek, że podstawowe równanie różniczkowe badanego problemu [tutaj w postaci (5.5)] spełnia w całej rozciągłości warunek równowagi skrętnej w przekroju rozpatrywanego pręta.

Pozostaje jeszcze określić naprężenia tnące  $\tau$ . Można je wyznaczyć analogicznie, jak to przedstawiono w pracach [9 i 10] z tym zastrzeżeniem, że tutaj naprężenia  $\tau$  występują tylko w półkach badanego pręta. Wychodząc z równania

$$(5.10) \quad \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial y} = 0,$$

otrzymuje się po jego scałkowaniu względem zmiennej  $y$

$$(5.11) \quad \tau\delta = (\tau\delta)_0 - \int_0^y \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} dy.$$

Wartość strumienia naprężeń tnących  $(\tau\delta)_0$  dotyczy punktu początkowego osi  $y$  (punkt przecięcia linii środkowych środnika i półki); określa się ją z warunku, że w punkcie końcowym  $K$  półki istnieje strumień  $(\tau\delta)_K$ :

$$(5.12) \quad (\tau\delta)_K = (\tau\delta)_0 - \int_0^{y_K(z)} \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} dy.$$

Z prac [9 i 10] wiadomo, że występuje następujący związek:

$$(5.13) \quad (\tau\delta)_K = (\sigma\delta)_K \frac{dy_K(z)}{dz}.$$



Z podstawienia (5.13) do (5.12) wynika

$$(5.14) \quad (\sigma\delta)_K \frac{dy_K(z)}{dz} = (\tau\delta)_0 - \int_0^{y_K(z)} \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial z} dy = (\tau\delta)_0 - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{y_K(z)} \sigma\delta dy - (\sigma\delta)_K \frac{dy_K(z)}{dz} \right],$$

a stąd

$$(5.15) \quad (\tau\delta)_0 = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{y_K(z)} \sigma\delta dy.$$

Tak więc wyrażenie (5.11) można napisać w postaci

$$(5.16) \quad \tau\delta = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^{y_K(z)} \sigma\delta dy - \int_0^y \sigma\delta dy \right] = \frac{\partial}{\partial z} \int_y^{y_K(z)} \sigma dF.$$

Podstawiając teraz do (5.16) naprężenia normalne  $\sigma$  wyrażone wzorem (4.3) otrzymuje się ostatecznie

$$(5.17) \quad \tau = \frac{1}{\delta} \left[ \frac{BS_{\omega(y)}}{J_{\omega}} \right]',$$

gdzie

$$(5.18) \quad S_{\omega(y)} = \int_y^{y_K(z)} \omega dF$$

oznacza wycinkowy moment statyczny powierzchni przekroju ograniczonej współrzędnymi  $y$  i  $y_K(z)$ .

Należy zauważyć, że wzór (5.17) służy do wyznaczania jedynie naprężeń tnących skręcania skrępowanego, tj. tych, które powstają przy skręcaniu wskutek pojawienia się w przekroju pręta naprężeń normalnych  $\sigma$ . Obok tych naprężeń istnieją w przekroju ponadto naprężenia tnące Saint-Venanta  $\tau_k$ , które, podobnie jak w przypadku prętów o przekrojach stałych, określa się tu za pomocą wzoru

$$(5.19) \quad \tau_k = \frac{H_k}{J_{\delta} \delta}.$$

## 6. Zestawienie wzorów

Przeprowadzone badania ilustruje się zestawieniem najważniejszych wzorów. W celu uchwycenia w tych wzorach elementów nowych przedstawia się je na tle odpowiednich wyrażenń odnoszących się do prętów typu powłoki walcowej o zmiennej długości konturu, które wyprowadzono w pracach [9 i 10]. Obie grupy wzorów porównano również z wyrażeniami właściwymi dla przekrojów stałych. Wymienione zestawienie zawiera tablica 2.

Tablica 2

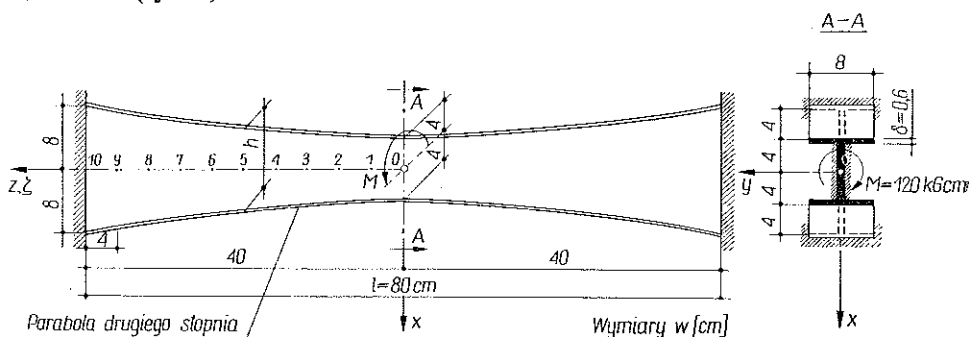
Typ bieżymetrycznego przekroju dwuteowego	P	r	n	z	e	k	r	o	j	z	m	i	e	n	n	y	Przekrój stały	
	Wysokość środka zmienna: $h(z)$ Szerokość połek zmienna: $b(z)$										Wysokość środka stała: $h = \text{const.}$ Szerokość połek zmienna: $b(z)$							
Schemat przekroju																		
Równanie różniczkowe problemu statycznego	$\left[ \frac{EJ_z}{h^2} (\theta h)'''' \right] h - \frac{EJ_z}{h^2} (\theta h)'' \theta h'' - \theta h'' \left[ GJ \theta \right]' = m$										$[EJ_z \theta'''' - GJ \theta'] = m$							
Bimoment	$B = - \frac{EJ_z}{h} (\theta h)'' - \theta h''$										$B = - EJ_z \theta''$							
Moment giętko-skrętny	$H_\omega = - \left[ \frac{EJ_z}{h^2} (\theta h)'' \theta h'' \right] h - \frac{EJ_z}{h^2} (\theta h)'' \theta h'' - \theta h'' \left[ GJ \theta \right]'$ $H_\omega = \left[ \frac{B}{h} \right] h - \frac{B}{h} h'$										$H_\omega = - [EJ_z \theta''']$ $H_\omega = B'$							
Moment skręcający Saint-Venanta	$H_k = GJ \theta'$										$H_k = GJ \theta'$							
Moment skręcający całkowity	$H = H_\omega + H_k$										$H = H_\omega + H_k$							
Napężenia normalne	$\sigma = \frac{B}{J_\omega}$										$\sigma = \frac{B}{J_\omega}$							
Napężenia tnące*)	$\tau = \frac{1}{S} \left[ \frac{B S_{\omega(y)}}{J_\omega} \right]'$										$\tau = \frac{1}{S} \left[ \frac{B S_{\omega(y)}}{J_\omega} \right]'$							
Podstawa opracowania	Praca niniejsza										Praca [9,10]							

\*) bez naprężeń tnących Saint-Venanta

## 7. Przykłady liczbowe

Na podstawie przeprowadzonej szczegółowej analizy teoretycznej w niniejszym rozdziale podamy dwa przykłady liczbowe. W pierwszym przykładzie rozwiązujemy się zadanie statyczne. Rozpatruje się tu skręcanie dwuteownika o zmiennej wysokości średnika przy całkowitym utwierdzeniu obu przekrojów końcowych pręta. Drugi przykład dotyczy analizy drgań własnych skrętnych podobnego pręta dwuteowego przy swobodnym podparciu obu jego końców.

**7.1. Zadanie statyczne.** Dany jest utwierdzony pręt dwuteowy o bisymetrycznym przekroju poprzecznym, wzrastającym ku podporom symetrycznie względem środka rozpiętości pręta wskutek zmiennej według paraboli drugiego stopnia wysokości średnika; szerokość półek oraz grubości średnika i półek są stałe. Pręt obciążony jest w środku swej rozpiętości skupionym momentem skręcającym  $M = 120 \text{ kGcm}$ . Należy wyznaczyć funkcje  $\theta$ ,  $B$ ,  $H = H_\omega + H_k$  i naprężenia normalne  $\sigma$  (rys. 5).



Rys. 5

Podstawą rozwiązania jest tu równanie (3.41); wprowadzając zmienną  $\zeta = z/l$ , można równanie to doprowadzić do postaci bezwymiarowej

$$(7.1) \quad \left\{ \frac{J_\omega}{J_{\omega 0}} \frac{h_0^2}{h^2} \left[ \left( \theta \frac{h}{h_0} \right)'' - \theta \frac{h''}{h_0} \right] \right\}'' \frac{h}{h_0} - \\ - \frac{J_\omega}{J_{\omega 0}} \frac{h_0^2}{h^2} \left[ \left( \theta \frac{h}{h_0} \right)'' - \theta \frac{h''}{h_0} \right] \frac{h''}{h_0} - (kl)^2 \left[ \frac{J_a}{J_{a0}} \theta' \right]' = \frac{ml^4}{EJ_{\omega 0}},$$

gdzie

$$(7.2) \quad k^2 = \frac{GJ_{a0}}{EJ_{\omega 0}}.$$

Tutaj i w dalszym ciągu różniczkowanie dotyczy zmiennej  $\zeta$ , a indeks 0 wskazuje, że dana wielkość dotyczy przekroju  $O$  (w środku rozpiętości pręta). Biorąc pod uwagę związek  $J_\omega = h^2 J_x/4$  (w tym również dla przekroju środkowego  $O$ ) oraz pamiętając, że  $J_x = \text{const}$  na długości pręta (stała szerokość półek), otrzymuje się zamiast (7.1) równanie

$$(7.3) \quad \left[ \left( \theta \frac{h}{h_0} \right)'' - \theta \frac{h''}{h_0} \right] \frac{h}{h_0} - \left[ \left( \theta \frac{h}{h_0} \right)'' - \theta \frac{h''}{h_0} \right] \frac{h''}{h_0} - (kl)^2 \left[ \frac{J_d}{J_{d0}} \theta' \right] \frac{ml^4}{EJ_{\omega 0}}.$$

Wyprowadzone równanie (7.3) rozwiązuje się metodą różnic skończonych. Postać różnicowa tego równania jest następująca:

$$(7.4) \quad \theta_{i+2} \left[ \frac{h_{i+2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di+1}}{J_{d0}} K \right] - \theta_{i+1} \left[ 4 \frac{h_{i+1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \left( \frac{h''_{i+1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \frac{h_{i+1}}{h_0} \frac{h''_i}{h_0} \right) \Delta^2 \right] + \\ + \theta_i \left[ 6 \left( \frac{h_i}{h_0} \right)^2 + 4 \frac{h''_i}{h_0} \frac{h_i}{h_0} \Delta^2 + \left( \frac{h''_i}{h_0} \right)^2 \Delta^4 + \frac{J_{di+1} + J_{di-1}}{J_{d0}} K \right] - \\ - \theta_{i-1} \left[ 4 \frac{h_{i-1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \left( \frac{h''_{i-1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \frac{h_{i-1}}{h_0} \frac{h''_i}{h_0} \right) \Delta^2 \right] + \theta_{i-2} \left[ \frac{h_{i-2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di-1}}{J_{d0}} K \right] = \frac{m_i (\Delta l)^4}{EJ_{\omega 0}},$$

przy czym  $i$  oznacza tu kolejny przekrój pręta,  $K = (kl)^2 \Delta^2/4$ , a  $\Delta$  jest odstępem różnicowym. W rozważanym przypadku przyjęto  $\Delta = 1/20$ , co odpowiada podziałowi rozpiętości pręta na dwadzieścia równych odcinków. Stałe materiałowe przyjęto jak dla szkła organicznego,  $E = 30\,000$  kG/cm<sup>2</sup>,  $E/G = 2,75$  — z myślą wykorzystania rozwiązane zadania jako podstawy do weryfikacji modelowej problemu. Prowadząc rachunek z dokładnością do średnio ośmiu liczb znaczących, otrzymuje się wówczas równanie

$$(7.5) \quad \theta_{i+2} \left[ \frac{h_{i+2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di+1}}{J_{d0}} 0,0030681818 \right] - \theta_{i+1} \left[ 4 \frac{h_{i+1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \right. \\ \left. + 0,02 \left( \frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} \right) \right] + \theta_i \left[ 6 \left( \frac{h_i}{h_0} \right)^2 + 0,08 \frac{h_i}{h_0} + 0,0004 + \frac{J_{di+1} + J_{di-1}}{J_{d0}} 0,0030681818 \right] - \\ - \theta_{i-1} \left[ 4 \frac{h_{i-1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + 0,02 \left( \frac{h_i}{h_0} + \frac{h_{i-1}}{h_0} \right) \right] + \theta_{i-2} \left[ \frac{h_{i-2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \right. \\ \left. - \frac{J_{di-1}}{J_{d0}} 0,0030681818 \right] = 0,104166668 \cdot 10^{-4} m_i.$$

Postaci (7.5) równań różnicowych odpowiada po uwzględnieniu warunków brzegowych układ równań algebraicznych przedstawiony wraz z wynikami jego rozwiązania w tablicy 3.

Określając kąty obrotu  $\theta$  w zależności od wartości  $M = 120$  kGcm (tablica 4) można rachunkiem różnicowym wyznaczyć również siły wewnętrzne  $B$  oraz  $H = H_{\omega} + H_k$ ; bimomenty  $B$  oblicza się z zależności (4.2), momenty giętno-skrętne  $H_{\omega}$  — ze związku (5.4), a momenty skręcające Saint-Venanta  $H_k$  — ze wzoru (3.18). Wymienione wielkości, odpowiadające narzuconej tu zmienności przekroju, zawiera tablica 4. Dla lepszej przejrzystości tablicy ograniczono dokładność przedstawionych wyników średnio do czterech liczb znaczących.

Wyniki otrzymane dla rozpatrywanego pręta o przekroju zmiennym porównuje się z wynikami, jakie uzyskuje się przy skręcaniu pręta o przekroju stałym, przy

Tablica 3

	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
1	3,04327841	-4,08020000	1,03692159	—	—
2	-4,08020000	7,22500909	-4,24260000	1,09779091	—
3	1,03692159	-4,24260000	6,57943864	-4,57700000	1,20323977
4	—	1,09779091	-4,57700000	7,22254091	-5,10260000
5	—	—	1,20323977	-5,10260000	8,17328409
6	—	—	—	1,35926818	-5,84820000
7	—	—	—	—	1,57427614
8	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—
Wynik	0,67248751	0,64449291	0,57488827	0,47954253	0,37351893

c.d. Tablicy 3

$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	$\theta_9$	Wyrazy wolne
—	—	—	—	—	-0,026041667
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
1,35926818	—	—	—	—	0
-5,84820000	1,57427614	—	—	—	0
9,48206818	-6,85220000	1,85906364	—	—	0
-6,85220000	11,21369318	-8,16260000	2,22683068	—	0
1,85906364	-8,16260000	13,44735909	-9,83700000	2,69317727	0
—	2,22683068	-9,83700000	-16,27666591	-11,94260000	0
—	—	2,69317727	-11,94260000	23,08162273	0
0,26937091	0,17636291	0,10051679	0,04515843	0,01163694	$\cdot 10^{-4} M$

Tablica 4

Przekrój	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\theta$ [I]	0	1,40	5,42	12,06	21,16	32,32	44,82	57,55	68,99	77,34	80,70
$B$ [kGcm <sup>2</sup> ]	-152,9	-1057,6	-659,3	-339,5	-81,5	130,8	312,6	478,7	644,6	826,5	1042,3
$H_0$ [kGcm]	59,70	58,43	56,99	55,74	54,74	54,08	53,89	54,32	55,48	57,43	59,20
$H_8$ [kGcm]	0	1,62	3,05	4,32	5,34	6,04	6,26	5,86	4,73	2,77	0
$H$ [kGcm]	59,70	60,05	60,04	60,06	60,08	60,12	60,15	60,18	60,21	60,20	59,20

\*) dokładna wartość wynosi  $H = 60$  kGcm

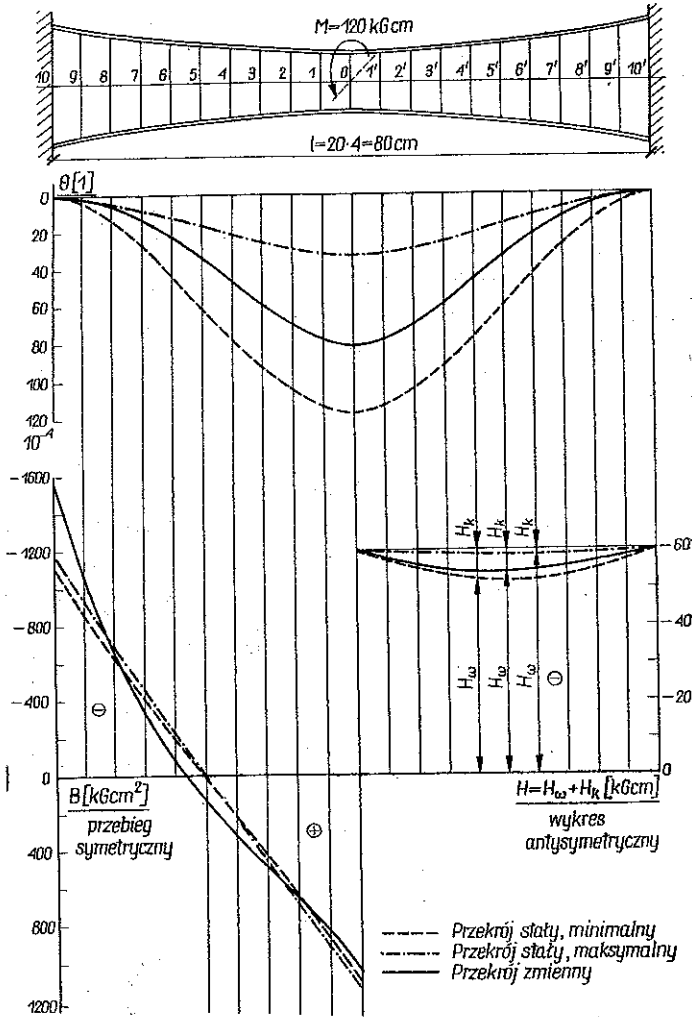
Tablica 5

Przekrój	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\theta$ [I]	0	3,29	12,16	25,18	40,91	57,99	75,08	90,81	103,82	112,69	116,10
$B$ [kGcm <sup>2</sup> ]	-1090,6	-856,9	-633,6	-418,1	-207,8	0	207,8	418,1	633,6	856,9	1090,6
$H_0$ [kGcm]	60,00	57,02	54,72	53,12	52,16	51,84	52,16	53,12	54,72	57,02	60,00
$H_8$ [kGcm]	0	2,98	5,28	6,88	7,84	8,16	7,84	6,88	5,28	2,98	0
$H$ [kGcm]	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00

Tablica 6

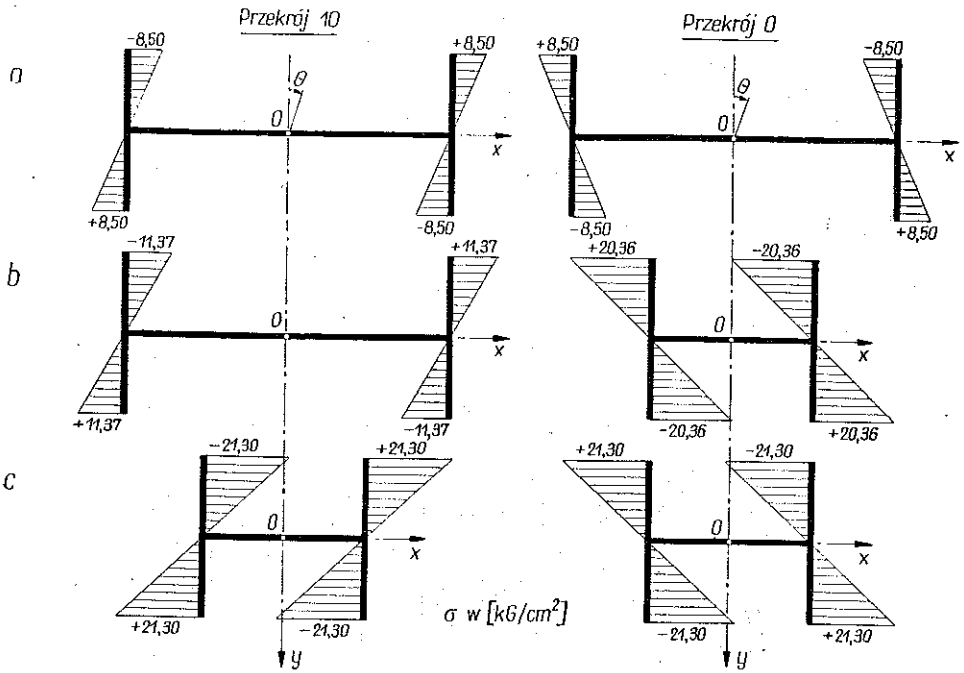
Przekrój	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$\theta$ [I]	0	0,88	3,25	6,76	11,02	15,65	20,26	24,50	28,02	30,40	31,25
$B$ [kGcm <sup>2</sup> ]	-1160,7	-922,9	-688,9	-457,7	-228,4	0	228,4	457,7	688,9	922,9	1160,7
$H_0$ [kGcm]	60,00	58,94	58,11	57,53	57,17	57,06	57,17	57,53	58,11	58,94	60,00
$H_8$ [kGcm]	0	1,06	1,89	2,47	2,83	2,94	2,83	2,47	1,89	1,06	0
$H$ [kGcm]	60,00	60,00	60,00	60,00	60,000	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00

czym w analizie porównawczej uwzględnia się dwa przypadki przekroju stałego: stały przekrój minimalny, odpowiadający najmniejszemu z przekrojów zmiennych (a więc przekrojowi w środku rozpiętości pręta) oraz stały przekrój maksymalny, równy największemu z przekrojów zmiennych (czyli przekrojowi podporowemu pręta). Wyniki dla przekroju stałego minimalnego przedstawione są w tablicy 5, dla maksymalnego zaś w tablicy 6. Przeprowadzone porównanie wyszczególnionych wyżej funkcji ilustrowane jest również wykreślnie na rys. 6.



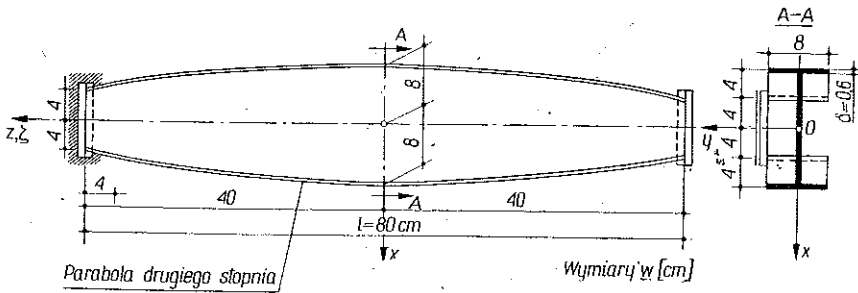
Rys. 6

Wykresy bimomentów  $B$  dają podstawę do określenia naprężeń normalnych  $\sigma$ ; oblicza się je ze wzoru (4.3). Naprężenia  $\sigma$  oblicza się dla przekroju w środku rozpiętości (przekrój  $O$ ) i przekroju podporowego (przekrój 10) pręta. Rysunek 7 przedstawia wykresy tych naprężeń dla pręta o przekroju stałym maksymalnym (a), zmiennym (b) i stałym minimalnym (c).



Rys. 7

7.2. Zadanie dynamiczne. Drgania własne. Dany jest swobodnie podparty pręt dwuteowy o bisymetrycznym przekroju poprzecznym, malejącym ku podporom symetrycznie względem środka rozpiętości pręta wskutek zmiennej według paraboli drugiego stopnia wysokości środka; szerokość półek oraz grubości środka i półek są stałe. Należy wyznaczyć częstotliwości drgań własnych skrętnych  $k_{no}$  pręta. Szczegółową ilustrację pręta stanowi rys. 8.



Rys. 8

Podstawą rozwiązania rachunkowego jest równanie różniczkowe cząstkowe (3.30), które w danym przypadku przyjmuje postać równania jednorodnego. Korzystając z metody rozdzielania zmiennych Poissona [8], tj. podstawiając do tego równania sumę

$$(7.6) \quad \theta(z, t) = \sum_{n=1,2,3,\dots} \chi_n(z) \sin k_{no} t,$$



otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne

$$(7.7) \quad \left\{ \frac{J_\omega}{h^2} [(\chi_n h)'' - \chi_n h''] \right\}'' h - \frac{J_\omega}{h^2} [(\chi_n h)'' - \chi_n h''] h'' - \\ - \frac{G}{E} [J_d \chi_n'] + \frac{\gamma}{gE} \{ [J_\omega \chi_n']' - J_A \chi_n \} k_{n\omega}^2 = 0.$$

Warunkom brzegowym swobodnego podparcia ze względu na kąt obrotu  $\theta$  odpowiadają tu warunki odniesione do funkcji  $\chi_n$ , mianowicie

$$(7.8) \quad \chi_n(0) = 0, \quad \chi_n(l) = 0, \\ [(\chi_n h)'' - \chi_n h'']_0 = 0, \quad [(\chi_n h)'' - \chi_n h'']_l = 0.$$

Równanie (7.7) uzupełnione warunkami brzegowymi (7.8) można analizować zwykłą metodą różnicową.

Doprowadzając równanie (7.7) do postaci bezwymiarowej otrzymuje się

$$(7.9) \quad \left\{ \frac{J_\omega}{J_{\omega 0}} \frac{h_0^2}{h^2} \left[ \left( \chi_n \frac{h}{h_0} \right)'' - \chi_n \frac{h''}{h_0} \right] \right\}'' \frac{h}{h_0} - \left\{ \frac{J_\omega}{J_{\omega 0}} \frac{h_0^2}{h^2} \left[ \left( \chi_n \frac{h}{h_0} \right)'' - \chi_n \frac{h''}{h_0} \right] \right\} \frac{h''}{h_0} - \\ - (kl)^2 \left[ \frac{J_d}{J_{d0}} \chi_n' \right]' + (jl)^2 \left\{ \left[ \frac{J_\omega}{J_{\omega 0}} \chi_n' \right]' - \frac{J_A l^2}{J_{\omega 0}} \chi_n \right\} k_{n\omega}^2 = 0,$$

gdzie  $k$  określa się z zależności (7.2), a  $j$  ze wzoru

$$(7.10) \quad j^2 = \frac{\gamma}{gE};$$

podobnie jak w poprzednim zadaniu różniczkowanie dotyczy tu zmiennej  $\zeta$ , a indeks 0 wskazuje, że dana wielkość dotyczy przekroju  $O$  (w środku rozpiętości pręta).

Wobec stałej szerokości półek rozpatrywanego dwuteownika równanie (7.9) upraszcza się do równania

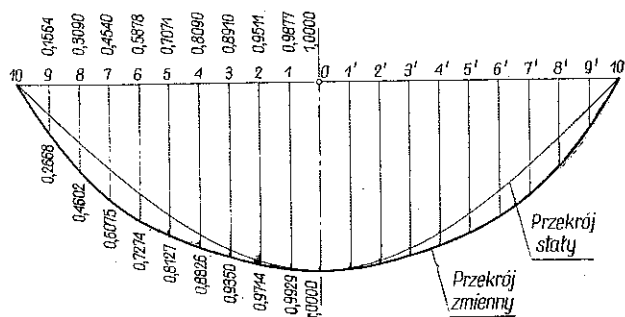
$$(7.11) \quad \left[ \left( \chi_n \frac{h}{h_0} \right)'' - \chi_n \frac{h''}{h_0} \right]'' \frac{h}{h_0} - \left[ \left( \chi_n \frac{h}{h_0} \right)'' - \chi_n \frac{h''}{h_0} \right] \frac{h''}{h_0} - (kl)^2 \left[ \frac{J_d}{J_{d0}} \chi_n' \right]' + \\ + (jl)^2 \left\{ \left[ \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 \chi_n' \right]' - \left( 1 + \frac{J_y}{J_{x0}} \right) \left( \frac{2l}{h_0} \right)^2 \chi_n \right\} k_{n\omega}^2 = 0,$$

którego postać różnicowa jest następująca:

$$(7.12) \quad \chi_{n(i+2)} \left[ \frac{h_{i+2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di+1}}{J_{d0}} K + \left( \frac{h_{i+1}}{h_0} \right)^2 J k_{n\omega}^2 \right] - \chi_{n(i+1)} \left[ 4 \frac{h_{i+1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \right. \\ \left. + \left( \frac{h_{i+1}''}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \frac{h_{i+1}}{h_0} \frac{h_i''}{h_0} \right) \Delta^2 \right] + \chi_{n(i)} \left[ 6 \left( \frac{h_i}{h_0} \right)^2 + 4 \frac{h_i''}{h_0} \frac{h_i}{h_0} \Delta^2 + \left( \frac{h_i''}{h_0} \right)^2 \Delta^4 + \right. \\ \left. + \frac{J_{di+1} + J_{di-1}}{J_{d0}} K - \left\{ \left[ \left( \frac{h_{i+1}}{h_0} \right)^2 + \left( \frac{h_{i-1}}{h_0} \right)^2 \right] J + \left( 1 + \frac{J_{yi}}{J_{x0}} \right) \left( \frac{2l}{h_0} \right)^2 \Delta^4 \right\} k_{n\omega}^2 \right] -$$

Tabli

	$\chi_n(0)$	$\chi_n(1)$	$\chi_n(2)$	$\chi_n(3)$	$\chi_n(4)$
1	2,98107017— —0,161230460· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,96005000	0,97897983+ +0,016819996· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—	—
2	—3,96005000	6,89148750— —0,302089683· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,88065000	0,94921250+ +0,016316683· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—
3	0,97897983+ +0,016819996· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,88065000	5,72531989— —0,309065881· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,72425000	0,90060028+ +0,015494818· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$
4	—	0,94921250— —0,016316683· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,72425000	5,43604432— —0,292814046· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,49565000
5	—	—	0,90060028+ +0,015494818· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,49565000	5,04365852— —0,270968413· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$
6	—	—	—	0,83464318+ +0,014379884· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—3,20205000
7	—	—	—	—	0,75344119+ +0,013007560· ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$
8	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—



Rys. 9

$\chi_n(5)$	$\chi_n(6)$	$\chi_n(7)$	$\chi_n(8)$	$\chi_n(9)$	wyrazy wolne
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
—	—	—	—	—	0
0,83464318 + +0,014379884 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—	—	—	—	0
-3,20205000	0,75344119 + +0,013007560 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—	—	—	0
4,56076250— -0,244410241 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-2,85305000	0,65969432 + +0,011423717 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—	—	0
-2,85305000	4,00355625— -0,214235827 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-2,46065000	0,55670256 + +0,009684420 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	—	0
0,65969432 + +0,011423717 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-2,46065000	3,39183977— -0,181729117 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-2,03925000	0,44836591 + +0,007855929 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	0
—	0,55670256 + +0,009684420 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-2,03925000	2,74901307— -0,148327860 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-1,60565000	0
—	—	0,44836591 + +0,007855929 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	-1,60565000	1,74881819— -0,119831447 · ·10 <sup>-8</sup> $k_{n\omega}$	0

Tablica 8

Przekrój	Częstości drgań własnych skrętnych $k_{1\omega}$			
	Rozwiązanie ścisłe	Podział 20-krotny	Podział 10-krotny	Podział 4-krotny
Stały minimalny	544	543	532	509
Zmienny	—	321	316	289
Stały maksymalny	494	493	489	466

$$\begin{aligned}
 & - \chi_{n(i-1)} \left[ 4 \frac{h_{i-1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \left( \frac{h_{i-1}''}{h_0} \frac{h_i}{h_0} + \frac{h_{i-1}}{h_0} \frac{h_i''}{h_0} \right) \Delta^2 \right] + \\
 & + \chi_{n(i-2)} \left[ \frac{h_{i-2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di-1}}{J_{d0}} K + \left( \frac{h_{i-1}}{h_0} \right)^2 J k_{no}^2 \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Tutaj  $i$  oznacza kolejny przekrój pręta,  $K = (kl)^2 \Delta^2/4$ ,  $J = (jl)^2 \Delta^2/4$ , przy czym  $\Delta$  jest odstępem różnicowym.

Przyjmując podobnie jak w zadaniu pierwszym  $\Delta = 1/20$ ,  $E = 30\,000$  kG/cm<sup>2</sup>,  $E/G = 2,75$  oraz  $\gamma = 0,00125$  kG/cm<sup>3</sup>,  $g = 981$  cm/sek<sup>2</sup>, otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 (7.13) \quad & \chi_{n(i+2)} \left[ \frac{h_{i+2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di+1}}{J_{d0}} 0,0010227273 + \left( \frac{h_{i+1}}{h_0} \right)^2 0,016989466 \cdot 10^{-8} k_{no}^2 \right] - \\
 & - \chi_{n(i+1)} \left[ 4 \frac{h_{i+1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - 0,01 \left( \frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} \right) \right] + \chi_{n(i)} \left[ 6 \left( \frac{h_i}{h_0} \right)^2 - 0,04 \frac{h_i}{h_0} + 0,0001 + \right. \\
 & + \frac{J_{di+1} + J_{di-1}}{J_{d0}} 0,0010227273 - \left. \left\{ \left( \frac{h_{i+1}}{h_0} \right)^2 + \left( \frac{h_{i-1}}{h_0} \right)^2 \right\} 0,016989466 \cdot 10^{-8} + \right. \\
 & + \left. \left( 1 + \frac{J_{yi}}{51,2} \right) 0,000625 \right\} k_{no}^2 \right] - \chi_{n(i-1)} \left[ 4 \frac{h_{i-1}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - 0,01 \left( \frac{h_i}{h_0} + \frac{h_{i-1}}{h_0} \right) \right] + \\
 & + \chi_{n(i-2)} \left[ \frac{h_{i-2}}{h_0} \frac{h_i}{h_0} - \frac{J_{di-1}}{J_{d0}} 0,0010227273 + \left( \frac{h_{i-1}}{h_0} \right)^2 0,016989466 \cdot 10^{-8} k_{no}^2 \right] = 0.
 \end{aligned}$$

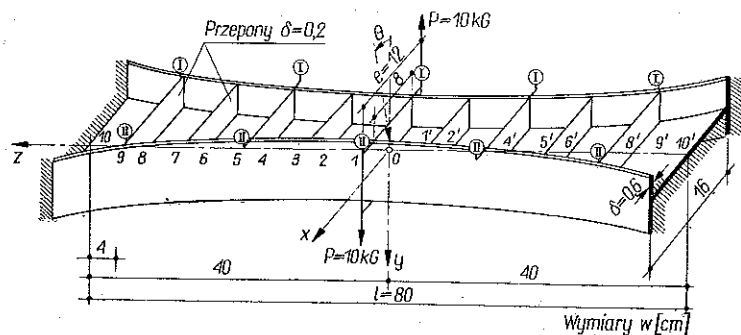
W rozpatrywanym przypadku postaci (7.13) odpowiada dziesięć równań algebraicznych liniowych, których macierz przedstawiona jest w tabelicy 7.

Częstości  $k_{no}$  drgań własnych skrętnych można teraz wyznaczyć ze znanego warunku, że wyznacznik główny ze współczynników przedstawionej macierzy musi być równy zero. Zadanie to zostało zaprogramowane na elektronową maszynę cyfrową, przy czym ograniczono się do wyznaczenia częstości pierwszej  $k_{1\omega}$ . W podobny sposób zostały wyznaczone również pierwsze częstości  $k_{1\omega}$  drgań własnych skrętnych rozpatrywanego pręta przy jego podziale na dziesięć, a także na cztery równe części. Otrzymane wyniki zestawione są w tabelicy 8 na tle odpowiednich danych uzyskanych dla pręta o stałym przekroju poprzecznym, równym kolejno najmniejszemu i największemu ze zmiennych; dla obu ostatnich przypadków określono częstości  $k_{1\omega}$  również w sposób ścisły na podstawie monografii [8]. Z danych zawartych w tabelicy 8 wynika z jednej strony, że zmienność przekroju ma istotny wpływ na częstość drgań własnych skrętnych badanego pręta oraz — z drugiej, że błąd metody różnic skończonych przy dwudziestokrotnym podziale rozpiętości pręta na dwadzieścia części jest znikomy.

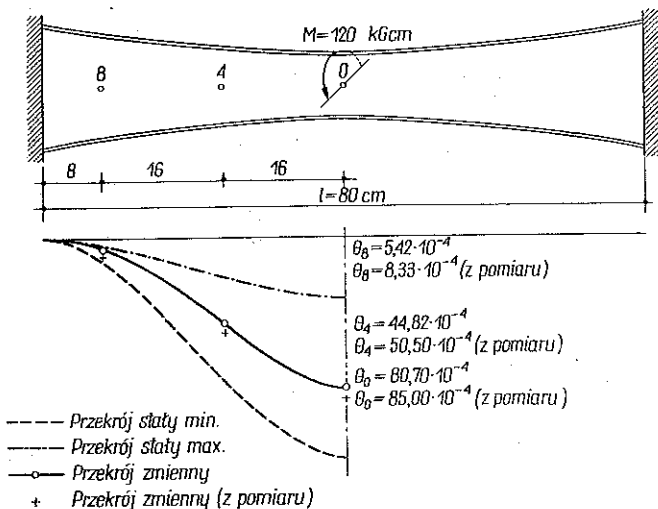
Wartości własnej  $k_{1\omega}$  odpowiada funkcja własna  $\chi_1(z)$ . Wiadomo, że dla swobodnie podpartego pręta o stałym przekroju poprzecznym funkcją tą jest sinusoida, Przyjmując maksymalną amplitudę  $\chi_{1(0)}$  (w środku rozpiętości pręta) równą jednościm można porównać tę sinusoidę z funkcją własną, jaka odpowiada założonej zmienności przekroju pręta; tę ostatnią otrzymuje się z rozwiązania układu równań opisanego w tabelicy 7 przy założeniu  $\chi_{1(0)} = 1$  i  $k_{1\omega} = 321$  (odpada równanie pierwsze). Wykres obu funkcji własnych znajduje się na rys. 9.

8. Badania modelowe

Przeprowadzone obliczenia zostały sprawdzone doświadczalnie za pomocą badań modelowych. Weryfikację modelową przeprowadzono dla zagadnienia statycznego mierząc kąty obrotu  $\theta$  i porównując otrzymane wartości z obliczonymi. Badania takie przeprowadzono dla pręta rozważanego w zadaniu pierwszym.



Rys. 10

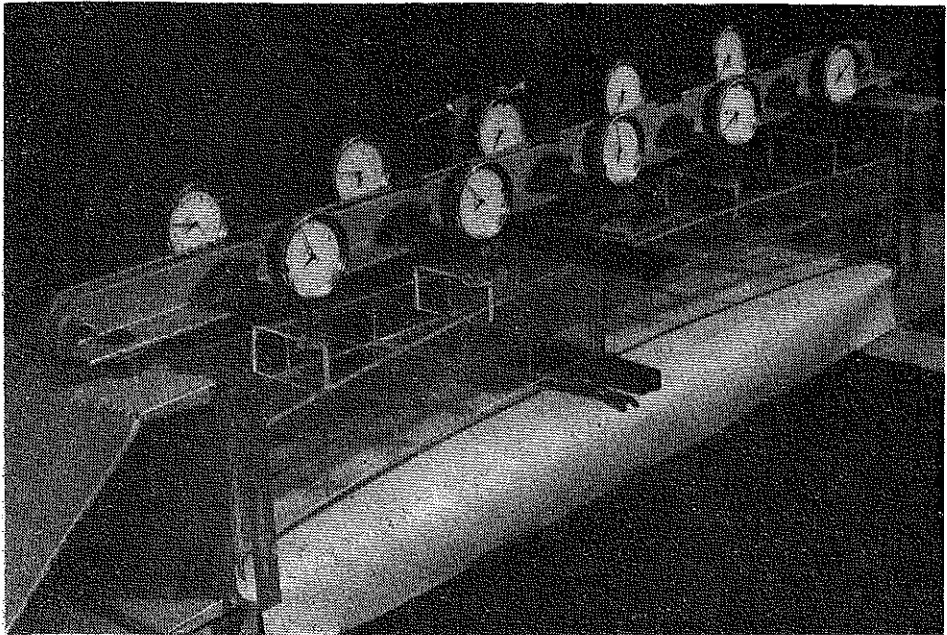


Rys. 11

Model pręta wykonano ze szkła organicznego, a warunki podparcia zapewniono za pomocą odpowiednio sztywnej konstrukcji stalowej. Belkę zamocowano w ten sposób, że jej środek przyjął położenie poziome. Zewnętrzny moment skręcający  $M$ , zaczepiający w środku rozpiętości pręta, zrealizowano jako parę sił  $P$  o wartości 10 kG każda, pracujących na ramieniu  $e = 12$  cm. Siły te oddziaływały na model przez specjalnie skonstruowaną ramkę stalową, umocowaną na modelu; jedna z sił działała w dół, druga zaś w górę, przy czym tę ostatnią otrzymano za pośred-

nictwem odpowiedniej konstrukcji blokowej. Szkic orientacyjny modelu pokazany jest na rys. 10, a jego wygląd rzeczywisty wraz z odpowiednim oprzyrządowaniem (przedstawia fotografia, rys. 12).

Kąty obrotu  $\theta$  mierzono posługując się dwoma układami czujników zegarowych I i II) o dokładności 0,001 mm, rejestrujących przemieszczenia pionowe punktów pomiarowych usytuowanych w przekrojach 8, 4, 0, 4' i 8'; punkty te, położone w odległości równej 12 cm, były sztywno związane z zasadniczym modelem pręta. Przed właściwym pomiarem obciążono pręt wstępnie momentem skręcającym  $M_0 = 2 \cdot 12 = 24$  kGcm, a otrzymane przy tym odczyty na czujnikach pomiarowych stanowiły odczyty zerowe pomiaru zasadniczego. Pręt obciążano i odciążano czterokrotnie. Jako wielkości miarodajne do wyznaczania kątów obrotu  $\theta$  przyjęto średnie różnice odczytów, uwzględniając serie obciążenia i symetryczne względem środka rozpiętości pręta położenie przekrojów pomiarowych.



Rys. 12

Na rys. 11 przedstawiono wykresy kąta obrotu  $\theta$  dla pręta o przyjętej zmienności przekroju poprzecznego, wyznaczone rachunkowo i na modelu, na tle odpowiednich wykresów tego kąta odpowiadających przekrojom stałym, równym kolejno największemu i najmniejszemu z przekrojów zmiennych. Zbieżność wyników uzyskanych dla pręta o przekroju zmiennym rachunkowo i za pomocą badań modelowych trzeba uznać za dobrą. Istniejące różnice między obliczonymi i zmierzonymi wartościami kątów należy przypisać trudnym do uniknięcia niedokładnościom w praktycznym wykonaniu pełnego utwierdzenia przekrojów podporowych modelu.

### 9. Uwagi końcowe

Przedstawiona praca ma na celu zamknięcie cyklu poprzednich opracowań [7 i 11] autora w zakresie problemu skręcania dwuteowych prętów cienkościennych o bisymetrycznym przekroju poprzecznym. W przeciwieństwie do wymienionych opracowań przeprowadza się tu szczegółową analizę stanu przemieszczeń i odkształceń badanego pręta, a ponadto zagadnienie rozpatruje się uwzględniając siły masowe i dynamiczny charakter obciążenia zewnętrznego.

Po szczegółowym przeglądzie istniejących opracowań dotyczących postawionego problemu — analizuje się stan przemieszczeń i odkształceń. Zwraca się uwagę na konieczność przyjęcia kierunków odkształceń liniowych w półkach dwuteownika stycznych do krzywizn tych półek w danym przekroju i stwierdza przy tym, że przyjmowane do tej pory (po raz pierwszy w pracach [3 i 4]) założenia w zakresie postaci wzoru określającego odkształcenia liniowe w półkach, wzór (3.16), są (w ramach przyjętej technicznej teorii skręcania) ściśle tylko dla liniowej zmienności wysokości środniczka pręta dwuteowego; dla zmienności krzywoliniowej wzór (3.16) należy zastąpić ściślejszym wzorem (3.15).

Z kolei, wykorzystując uściślony związek elastostatyczny (3.17), wyprowadza się niezależnie metodami energetycznymi i z warunków równowagi podstawowe równanie różniczkowe (3.30) badanego problemu i dyskutuje metodę rozwiązania tego równania, a także właściwe warunki początkowe i brzegowe. Następnie określa się wyrażenia dla bimomentu  $B$ , naprężeń normalnych  $\sigma$ , momentów skręcających — giętno-skrętnego  $H_w$  i Saint-Venanta  $H_k$  oraz naprężeń tnących  $\tau$  skręcania skrępowanego. W załączonym zestawieniu wyprowadzonych wzorów konfrontuje się je ze wzorami dla prętów cienkościennych o przekrojach zmiennych typu powłoki walcowej o zmiennej długości konturu oraz z tymi, jakie dotyczą prętów o przekrojach stałych. Można tu stwierdzić, iż wyrażenia dotyczące dwuteownika o zmiennej wysokości środniczka i zmiennej szerokości półek mają charakter najogólniejszy; wyrażenia te ulegają uproszczeniu dla dwuteownika, w którym zmienia się wyłącznie szerokość półek (pręt typu powłoki walcowej o zmiennej długości konturu). Postaci najprostsze wyrażenń analitycznych dotyczą dwuteownika o przekroju stałym.

Przedstawia się dwa przykłady liczbowe, przy czym pierwszy weryfikuje się doświadczalnie. Przykłady wskazują praktyczny sposób obliczania badanego pręta przy zastosowaniu metody różnic skończonych w zakresie zadania statycznego i dynamicznego (drżania własne); z obu przykładów wynika wniosek, że zmienność przekroju ma istotny wpływ na rozkład badanych parametrów. Przeprowadzona weryfikacja modelowa potwierdza słuszność opracowanej teorii.

### 10. Uzupełnienie

Już po oddaniu niniejszego opracowania do druku opublikował swą pracę P. WILDE [17]. Analizuje on ogólny przypadek skręcania pręta cienkościennego o zmiennym przekroju poprzecznym, jednak przy pominięciu wpływów dynamicznych. W świetle pracy [17] można niniejsze opracowanie uważać, przynajmniej w zakresie zagadnienia statycznego, jako dotyczące przypadku szczególnego (prze-

кроме двутеовые бисимметричные) общего решения проблемы полученного через P. WILDEGO. Проведенная помимо настоящего исследования автором соответствующая анализ сопоставительная обеих работ в области вопроса статического показывает идентичные формы всех характеристик для представленной теории. Факт получения идентичных форм при другом способе их выведения является желательным подтверждением правильности обеих теоретических в рамках принятых предположений.

#### Литература цитованная в тексте

1. G. G. KUBO, B. G. JOHNSTON, W. J. ENEY, *Non-uniform torsion of plate girders*, Proc. ASCE, 449, 80 (1954), 1-28.
2. L. H. N. LEE, *Non-uniform torsion of tapered I-beams*, J. Franklin Inst., 1, 262 (1956), 37-44.
3. F. HAMAYOSHI, *On the torsion of I-beam with variable webheight of second order*, Proc. 10th Japan Nat. Congress for Appl. Mech. (1960), II-18, 105-108.
4. F. HAMAYOSHI, *On torsion of I-beam with a web of variable height*, Mem. Fac. Eng. Hokkaido Univ., 2, 11 (1961), 209-228.
5. Ю. И. Остроменцкий, *Практический способ расчета тонкостенных стержней ступенчато-переменного сечения*, Расчет пластин и оболочек, 34 (1963), 94-104.
6. Cz. MIKIEWICZ, *Skrećanie pręta cienkościennego o skończonej liczbie skokowych zmienności przekroju poprzecznego*, Zesz. Nauk. Pol. Szczec., Budownictwo IV — Mechanika Stosowana, 39 (1963), 121-138.
7. Z. CYWIŃSKI, *Skrećanie prętów cienkościennych typu dwuteownika o zmiennej wysokości środka*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965), 269-280.
8. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Гос. издат. физ. мат. лит., Москва 1959.
9. Z. CYWIŃSKI, *Teoria skrećania prętów cienkościennych o zmiennej sztywności*, Arch. Inżyn. Łądowej, 2, 10 (1964), 161-183.
10. Z. CYWIŃSKI, *Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderlichem, einfach symmetrischem, offenem Querschnitt*, Der Stahlbau 10, 33 (1965), 301-307.
11. Z. CYWIŃSKI, *Skrećanie prętów cienkościennych typu dwuteownika o dwukierunkowej zmienności przekroju*, Rozpr. Inżyn., 1, 16 (1968), 21-32.
12. G. C. LEE, B. A. SZABO, *Torsional response of tapered I-girders*, J. Struct. Div., Proc. ASCE, ST 4, 93 (1967), 233-252.
13. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, PWN, Warszawa 1966.
14. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, 4, Гос. изд. физ. мат. лит., издание пятое, Москва 1958.
15. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer Verlag, zweite Auflage, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.
16. Z. CYWIŃSKI, *Zum Torsionsproblem des dünnwandigen geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt*, Der Stahlbau 10, 36 (1967), 317-318.
17. P. WILDE, *The torsion of thin-walled bars with variable cross-section*, Arch. Mech. Stos., 4, 20 (1968), 431-443.

#### Резюме

#### СТАТИКА И ДИНАМИКА КРУЧЕНИЯ ДВУТАВРА С ПЕРЕМЕННЫМ БИСИММЕТРИЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Работа является заключением цикла разработок [7, 11] автора. Исследуется кручение двутавра с переменным бисимметричным сечением, причем предполагается, что сечение меняется плавно и постоянно вследствие перемены размеров его составных элементов (стенок и полок). Теоретический анализ проводится с учетом массовых сил и динамического



характера внешней крутящей нагрузки; в частности исследуется статическая проблема и вопрос свободных крутильных колебаний. За основу теоретического анализа принимается техническая теория кручения тонкостенных стержней с постоянными поперечными сечениями [8].

После подробного обзора, имеющихся в области поставленной проблемы работ, анализируется перемещенное и деформационное состояние стержня. Констатируется необходимость введения исправления, в понятие линейных деформаций, в полках двутавра ( $\epsilon_p^*$  вместо  $\epsilon_p$ ), а также связанных с ними нормальных напряжений в сечении. Учитывая приведенные исправления выводится независимо, энергетически и из условия равновесия, фундаментальное дифференциальное уравнение (3.30) исследуемой проблемы, а также формулы для внутренних усилий и напряжений в сечении. Для фундаментального уравнения дискутируются соответствующие начальные и граничные условия, а также постулируется способ решения уравнения методом конечных разностей. Составление формул (таблица 2) доказывает, что выведенная теория является более общей по сравнению с теорией автора о тонкостенных стержнях типа цилиндрической оболочки с переменной длиной контура [9, 10] и теорией стержней с постоянными сечениями [8].

Два численных примера иллюстрируют практический способ вычисления исследуемого двутавра с переменным сечением; первый пример относится к статической задаче, второй же — к вопросу свободных крутильных колебаний. Модельная проверка подтверждает правильность выведенной теории.

### Summary

#### STATICS AND DYNAMICS IN TORSION OF I-BEAMS WITH VARIABLE, BISYMMETRIC CROSS-SECTIONS

The paper is a closure of author's sequence of works [7, 11]. The torsion of an I-beam with variable, bisymmetric section is considered whereby the assumption is made that the section varies slowly and continuously as a consequence of the varying lateral dimensions of its component elements (web and flanges). The theoretical analysis is performed regarding the mass-forces and the dynamic character of the external torsional loading; in particular the static problem and the question of the beam's torsional free vibrations is examined. The theoretical considerations are based on the technical torsion theory of thin-walled beams with constant cross-sections [8].

After a detailed review of the existing research works dealing with the mentioned problem, is given the beam's state of displacements and strains is analysed. The necessity of introducing corrections to the idea of the linear strains in the beam's flanges ( $\epsilon_p^*$  instead of  $\epsilon_p$ ) and the adequate normal stresses is settled. Taking these corrections into consideration the problem's fundamental differential equation (3.30) is derived, independently by the energy-method and satisfying the equilibrium condition, and formulas for the internal forces and stresses in the beam's cross-section are determined. Also the proper initial and boundary conditions are discussed and a way of the fundamental equation's solution by means of the finite differences method is suggested. A comparison of the paper's main formulas with these adequate to author's theory of thin-walled cylindrical beam-shells with varying cross-section [9, 10], and those regarding constant sections [8] leads to the conclusion that among them the theory presented here is the most general one.

Two numerical examples demonstrate the practical computation method of the I-beam considered; the first one concerns the static problem, and the second — the beam's torsional free vibrations question. Model experiments confirm the correctness of the elaborated theory.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 lipca 1968 r.*