ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
2, 17 (1969)

NIEUSTALONA LAMINARNA KONWEKCJA SWOBODNA NA PIONOWEJ PŁASKIEJ PŁYCIE

I. POP (CLUJ)

Oznaczenia

a współczynnik dyfuzji cieplnej,
A, B, C stałe wprowadzone w równaniach (3.8) i (4.3),
g przyśpieszenie grawitacyjne,
(Gr), G liczba Grashofa,
K stała wprowadzona w równaniu (3.16),
l charakterystyczna długość płyty,
n parametr powierzchniowego gradientu temperatury,
(Nu) liczba Nusselta,
P, Q, R bezwymiarowe funkcje zmiennej η wprowadzone w (3.14),
q lokalny współczynnik transportu ciepła,
t czas,
T temperatura,
u, v składowe wektora prędkości,
x współrzędna wzdłuż płyty mierzona od krawędzi natarcia,
y współrzędna normalna do płyty,
X, Y bezwymiarowe funkcje zmiennej η wprowadzone w równianiu (3.7),
α dowolna stała dodatnia,
β współczynnik rozszerzalności objętościowej,
$\eta, \bar{\eta}$ zmienne,
$\theta_1, \theta_2, \zeta_1, \zeta_2$ bezwymiarowe funkcje zmiennej η,
λ współczynnik przewodnictwa cieplnego,
ν współczynnik lepkości kinematycznej,
ϱ gęstość,
σ liczba Prandtla,
τ tarcie powierzchniowe,
$+$ wskaźniki u góry oznaczają zmienne bezwymiarowe,
$'$ pochodne względem η,
0 wskaźniki u dołu oznaczają warunek odnoszący się do stanu ustalonego,
1, 2 liczba aproksymacji,
i indeks sumacyjny,
w warunek na ściance,
∞ warunek w nieskończoności.

1. Wstęp

Badania dotyczące analitycznych rozwiązań zagadnień laminarnej konwekcji swobodnej były w ostatnich latach przedmiotem dużego zainteresowania. W szczególności problemom tym poświęcone są prace R. SIEGELA [1], A. S. GUPTY [2], E. R. MENOLDA i K. T. YANGA [3], K. T. YANGA [4, 5] i wielu innych. Matematyczne rozwiązanie tego problemu, ważnego z punktu widzenia zastosowań praktycznych, sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych. Uzyskanie dla tych równań rozwiązań ścisłych możliwe jest jedynie dla nieskończonej płyty pionowej, liczby Prandtla równej jedności i przyjęcia krótkotrwałych obciążeń skokowych w postaci temperatury powierzchniowej bądź powierzchniowego strumienia ciepła. Często przyjmuje się w praktyce, że uzyskane przy powyższych założeniach upraszczających rozwiązania asymptotyczne słuszne są nie tylko w dużej odległości od krawędzi natarcia płyty, lecz również odnoszą się do krótkiego przedziału czasu od chwili rozpoczęcia przepływu swobodnej konwekcji wzdłuż płyty o skończonych wymiarach. Ogólna analiza ścisłych asymptotycznych rozwiązań dla nieustalonej laminarnej konwekcji swobodnej na pionowej nieskończonej płycie przy dowolnych zmianach temperatury powierzchniowej lub strumienia ciepła i liczbie Prandtla równej jedności była przeprowadzona w pracy [3]. Efekt odsysania nieustalonego laminarnego przepływu ze swobodną konwekcją na pionowej, płaskiej, nieskończonej, porowatej płycie był przedmiotem badań R. S. NANDY i V. P. SHARMY [6] i autora [7]. Stosunkowo mniej prac poświęconych jest nieustalonej swobodnej konwekcji wywołanej ogrzaniem półnieskończonej płaskiej płyty bądź dowolnych powierzchni. J. MADEJSKI [8] ostatnio przedstawił ogólne sformułowanie problemu niestacjonarnej konwekcji od płaskiej pionowej płyty. Strukturą laminarnej warstwy przyściennej w trójwymiarowym przepływie z udziałem sił unoszenia zajmował się ostatnio R. AŠKOVIČ [9].

Przedmiotem niniejszej pracy jest zbadanie nieustalonej laminarnej konwekcji swobodnej, wywołanej ogrzaniem płaskiej pionowej płyty o długości równej 1. Rozwiązania analityczne w postaci zamkniętej uzyskane zostały dla skokowej zmiany temperatury powierzchniowej i liczby Prandtla równej jedności. Wyprowadzone zostały wzory dla rozkładu prędkości i temperatury.

Szczególny charakter tej pracy polega na poszukiwaniu formalnie ścisłych rozwiązań równań warstwy przyściennej, zależnych od czasu. Rozwiązanie ścisłe rozumiane jest tu w sensie H. SCHLICHTINGA [10], że wszystkie wyrazy w równaniach warstwy przyściennej znikają tożsamościowo lub są oszacowane, natomiast żaden z wyrazów nie jest pomijany *a priori*.

2. Równania podstawowe

Przyjmując początek układu współrzędnych w dolnej krawędzi płyty, oś x wzdłuż płyty oraz oś y w kierunku normalnym do płyty, równania wyjściowe wyrażające prawo zachowania masy, momentu i energii cieplnej dla nieustalonej laminarnej

konwekcji swobodnej na ogrzanej półnieskończonej płycie pionowej przedstawiono następująco [11]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\beta\,(T-T_\infty)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} &y=0: \quad u=v=0, \quad T=T_w,\\ &y=\infty: \quad u=0, \quad\ \ T=T_\infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie (T_w-T_∞) jest daną funkcją czasu t i współrzędnej x. Wprowadzając następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} &x^+=\frac{x}{l}, \quad y^+=\frac{y}{l}, \quad t^+=\nu t/l^2,\\ &u^+=\frac{ul}{\nu}, \quad v^+=\frac{vl}{\nu}, \quad \mathrm{G}^+=g\beta l^3\,(T-T_\infty)/\nu^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

równania (2.1) przedstawić możemy

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{G}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}+u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial y^2},$$

gdzie dla uproszczenia krzyżyki zostały pominięte, a przez $\sigma=\nu/a$ oznaczono liczbę Prandtla.

Zgodnie ze zwykłą procedurą stosowaną w zagadnieniach konwekcji swobodnej przyjęta została aproksymacja Boussinesqua polegająca na tym, że zmiany gęstości są uwzględniane tylko wtedy, jeśli powodują powstanie wyrazu unoszenia.

Pomija się wariacje wszystkich własności fizykalnych, tzn. przyjmuje się, że współczynniki przewodnictwa cieplnego i lepkości kinematycznej są wielkościami stałymi. Pomija się również dysypację lepkościową i pracę wykonaną nad polem grawitacyjnym. Warunki brzegowe teraz można napisać w postaci

$$\begin{aligned} &y=0: \quad u=v=0, \quad \mathrm{G}=\mathrm{G}_w(x,t)=t^a\,\mathrm{G}_{w0}(x),\\ &y=\infty: \quad u=0, \quad \mathrm{G}=0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie $G_{w0}(x)$ nie jest jeszcze sprecyzowaną funkcją x.

Do rozwiązania równań (2.4) z warunkami brzegowymi (2.5) posłużymy się techniką rozwinięcia niewiadomych funkcji w szeregi skończone. Ciąg funkcji aproksymujących konstruujemy tak, aby zagwarantować istnienie rozwiązania. Zatem zgodnie z [12] rozwinięcia funkcji u, v, i G są następujące:

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{N} v_i, \qquad \mathrm{G} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{G}_i, \tag{2.6}$$

gdzie u_1, v_1, G_1 są przybliżeniami pierwszego rzędu, opisującymi przepływ po upływie krótkiego czasu od jego rozpoczęcia; u_i, v_i, G_i $(i \geqslant 2)$ aproksymacjami drugiego rzędu, które uwzględniają wpływ wyrazów nieliniowej konwekcji.

Podstawiając (2.6) do (2.4) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych cząstkowych dla pierwszych dwóch aproksymacji:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \mathrm{G}_1, \\ &\frac{\partial \mathrm{G}_1}{\partial t} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \mathrm{G}_1}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} &y = 0: \quad u_1 = v_1 = 0, \quad \mathrm{G}_1 = t^a \, \mathrm{G}_{w0}(x), \\ &y = \infty: \quad u_1 = \mathrm{G}_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \mathrm{G}_2 - u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}, \\ &\frac{\partial \mathrm{G}_2}{\partial t} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \mathrm{G}_2}{\partial y^2} = -u_1\frac{\partial \mathrm{G}_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial \mathrm{G}_1}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.9}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} &y = 0: \quad u_2 = v_2 = \mathrm{G}_2 = 0, \\ &y = \infty: \quad u_2 = \mathrm{G}_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ogólny dowód zbieżności szeregów tej metody dla $N \to \infty$ nie istnieje. Można jednak mieć nadzieję, że wielkości $u_2, u_3, \ldots$ stają się szybko pomijalne dla bardzo małych t nie tylko ze względu na małe wartości wyrazów konwekcyjnych, lecz również dlatego, że warunki brzegowe są spełnione tożsamościowo dla u_i, v_i i G_i $(i \geqslant 2)$. Na ogół w zupełności wystarcza uwzględnienie tylko pierwszej i drugiej aproksymacji u, v i G, o ile dla nich zachodzi $u_{i+1} \ll u_i$ $(i \geqslant 1)$.

3. Rozwiązanie problemu

Wyżej sformułowany problem rozwiążemy dla przypadku $a = 0$, który odpowiada skokowej zmianie temperatury powierzchniowej i $\sigma = 1$ (jest to przypadek często spotykany w zagadnieniach praktycznych). Przy spełnieniu powyższych warunków rozwiązania równania $(2.7)_1$ poszukujemy w postaci

$$G_1(x, \eta, t) = G_{w0}(x)\,\theta_1(\eta), \tag{3.1}$$

gdzie $\eta = y/2\sqrt{t}$ jest zmienną podobieństwa. Biorąc pod uwagę (3.1) i $(2.7)_3$ widzimy, że nieznana funkcja $\theta_1(\eta)$ musi spełniać równanie

$$\theta_1'' + 2\eta\theta_1' = 0 \tag{3.2}$$

z warunkami brzegowymi $\theta_1(0) = 1, \quad \theta_1(\infty) = 0$.

Rozwiązaniem równania (3.2) jest funkcja

$$\theta_1(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\,d\eta = 1 - \operatorname{erfc}\eta = \operatorname{erf}\eta.$$

Podstawiając teraz (3.1) do $(2.7)_2$ znajdziemy

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = G_{w0}(x)\operatorname{erfc}\eta, \tag{3.3}$$

skąd otrzymamy równanie na nieznaną wielkość u_1. Rozwiązania równania (3.3) poszukujemy w postaci

$$u_1(x, \eta, t) = tG_{w0}(x)\,\zeta_1'(\eta), \tag{3.4}$$

gdzie funkcja $\zeta_1'(\eta)$ spełnia równanie

$$\zeta_1''' + 2\eta\zeta_1'' - 4\zeta_1' = -4\operatorname{erfc}\eta \tag{3.5}$$

i spełnia warunki brzegowe

$$\zeta_1(0) = \zeta_1'(0) = \zeta_1'(\infty) = 0. \tag{3.6}$$

Zajmijmy się teraz równaniem (3.5). Będziemy poszukiwać rozwiązania szczególnego równania (3.5) w postaci

$$\zeta_{1p}'(\eta) = X(\eta)\operatorname{erfc}\eta + Y(\eta), \tag{3.7}$$

gdzie funkcje $X(\eta)$ i $Y(\eta)$ określone równaniami

$$X'' + 2\eta X' - 4X = -4,$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 4Y = \frac{4}{\sqrt{\pi}} X'\,e^{-\eta^2},$$

mają postać

$$X(\eta) = -2\eta^2, \qquad Y(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}.$$

Rozwiązanie szczególne (3.7) przyjmie teraz postać

$$\zeta'_{1p}(\eta) = -2\eta^2 \operatorname{erfc}\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}.$$

Dwa szczególne rozwiązania jednorodnego równania (3.5) są następujące:

$$\zeta'_{1h}(\eta) = 1+2\eta^2,$$

$$\zeta'_{1h}(\eta) = (1+2\eta^2)\operatorname{erfc}\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2},$$

a rozwiązanie ogólne równania (3.5) przyjmuje postać

$$\zeta'_1(\eta) = A(1+2\eta^2)+B\left[(1+2\eta^2)\operatorname{erfc}\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\right] - 2\eta^2\operatorname{erfc}\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}. \tag{3.8}$$

Do określenia stałych A i B wykorzystamy warunki brzegowe (3.6). Mamy $A = B = 0$ i dlatego (3.8) prowadzi do związku

$$\zeta'_1(\eta) = -2\eta^2\operatorname{erfc}\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}.$$

Z równania (2.7) wynika, że

$$v_1(x,\eta,t) = -2t^{3/2}\frac{dG_{w0}}{dx}\zeta_1(\eta), \tag{3.9}$$

gdzie

$$\zeta_1(\eta) = -\frac{2}{3}\eta^3\operatorname{erfc}\eta + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}(2\eta^2-1)e^{-\eta^2} + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}.$$

Wykorzystanie teraz pierwszej aproksymacji równania $(2.9)_3$ daje

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} = tG_{w0}(x)\frac{dG_{w0}}{dx}(\zeta_1\theta'_1 - \zeta'_1\theta_1). \tag{3.10}$$

Jeśli założymy

$$G_2(x,\eta,t) = t^2 G_{w0}(x)\frac{dG_{w0}}{dx}\theta_2(\eta), \tag{3.11}$$

to równanie (3.10) może być sprowadzone do liniowego równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach i z nieliniowymi funkcjami reprezentującymi siły wymuszające:

$$\theta''_2 + 2\eta\theta'_2 - 8\theta_2 = -8\eta^2\operatorname{erfc}^2\eta + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\eta - \frac{2}{3}\eta^3\right)e^{-\eta^2}\operatorname{erfc}\eta + \tag{3.12}$$

$$+ \frac{8}{3\pi}(2\eta^2-1)e^{-2\eta^2} + \frac{8}{3\pi}e^{-\eta^2},$$

gdzie $\theta_2(\eta)$ jest nieznaną funkcją. Warunki brzegowe dla tego równania są następujące:

$$\theta_2(0) = \theta_2(\infty) = 0. \tag{3.13}$$

Dwa rozwiązania szczególne jednorodnego równania (3.12) mają postać

$$\theta_{2h}(\eta) = 1+4\eta^2+\frac{4}{3}\eta^4,$$

$$\theta_{2h}(\eta) = \left(1+4\eta^2+\frac{4}{3}\eta^4\right)\operatorname{erfc}\eta - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}(5\eta+2\eta^3)\,e^{-\eta^2}.$$

Określamy rozwiązanie szczególne niejednorodnego równania (3.12) w postaci [13]

$$\theta_{2p}(\eta) = P(\eta)\operatorname{erfc}^2\eta + Q(\eta)\operatorname{erfc}\eta + R(\eta), \tag{3.14}$$

gdzie dla funkcji $P(\eta)$, $Q(\eta)$ i $R(\eta)$ dostajemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$P''+2\eta P'-8P = -8\eta^2,$$

$$Q''+2\eta Q'-8Q = \frac{8}{\sqrt{\pi}}P'\,e^{-\eta^2}+\frac{8}{\sqrt{\pi}}\left(\eta-\frac{2}{3}\eta^3\right)e^{-\eta^2}, \tag{3.15}$$

$$R''+2\eta R'-8R = \frac{4}{\sqrt{\pi}}Q'\,e^{-\eta^2}-\frac{8}{\pi}Pe^{-2\eta^2}+\frac{8}{3\pi}(2\eta^2-1)\,e^{-2\eta^2}+\frac{8}{3\pi}e^{-\eta^2}.$$

Rozwiązaniem równania (3.15) jest funkcja

$$P(\eta) = K+\frac{1}{2}+2(1+2K)\eta^2+\frac{4}{3}K\eta^4, \tag{3.16}$$

gdzie K jest stałą bezwymiarową i będzie określona później. Korzystając z (3.16) i równania $(3.15)_2$ znajdziemy

$$Q''+2\eta Q'-8Q = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\left[(5+8K)\eta+\frac{2}{3}(8K-1)\eta^3\right]e^{-\eta^2},$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$Q(\eta) = -\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left[\left(\frac{19}{2}+20K\right)\eta+(8K-1)\eta^3\right]e^{-\eta^2}.$$

Równanie $(3.15)_3$ napisane teraz w postaci

$$R''+2\eta R'-8R = -\frac{4}{3\pi}\left[\frac{29}{2}+26K+(8K-1)\eta^2+\right.$$
$$\left.+2(1-4K)\eta^4\right]e^{-2\eta^2}+\frac{8}{3\pi}e^{-\eta^2}$$

ma rozwiązania tylko dla $K=-1/2$. Zatem otrzymujemy następujące wyrażenia na poszukiwane funkcje $P(\eta)$, $Q(\eta)$, $R(\eta)$:

$$P(\eta) = -\frac{2}{3}\eta^4, \qquad Q(\eta) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\eta+5\eta^3\right)e^{-\eta^2},$$

$$R(\eta) = -\frac{1}{\pi}\eta^2\,e^{-2\eta^2}-\frac{4}{15\pi}e^{-\eta^2}.$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe (3.13) otrzymujemy

$$\theta_2(\eta) = -\frac{2}{3}\eta^4 \operatorname{erfc}^2\eta + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left[\left(\frac{1}{2}\eta+5\eta^3\right)e^{-\eta^2} + \right.$$

$$\left. +\frac{4}{5\sqrt{\pi}}\left(1+4\eta^2+\frac{4}{3}\eta^4\right)\right]\operatorname{erfc}\eta - \frac{1}{\pi}\eta^2 e^{-2\eta^2} - \frac{4}{15\pi}\left[1+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}(5\eta+2\eta^3)\right]e^{-\eta^2}.$$

Dlatego z (3.1) i (3.11) wynika, że

$$G(x,\eta,t) = G_{w0}(x)\,\theta_1(\eta) + t^2\,G_{w0}(x)\frac{dG_{w0}}{dx}\theta_2(\eta). \tag{3.17}$$

Po podstawieniu (3.4), (3.9) i (3.11) do $(2.9)_2$ dostajemy równanie

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = t^2\,G_{w0}(x)\frac{dG_{w0}}{dx}(\zeta_1\,\zeta_2''' - \zeta_1'^2 + \theta_2),$$

które również może być sprowadzone do równania zwyczajnego. Mamy zatem

$$u_2(x,\eta,t) = t^3\,G_{w0}(x)\frac{dG_{w0}}{dx}\zeta_2'(\eta), \tag{3.18}$$

gdzie szukana funkcja $\zeta_2'(\eta)$ jest określona równaniem

$$\zeta_2''' + 2\eta\zeta_2'' - 12\zeta_2' = 4(\zeta_1'^2 - \zeta_1\,\zeta_1'' - \theta_2) \tag{3.19}$$

i warunkami brzegowymi

$$\zeta_2(0) = \zeta_2'(0) = \zeta_2'(\infty) = 0.$$

Rozwiązanie równania (3.19) uzyskamy w ten sam sposób jak rozwiązanie równania (3.12). Pomijając szczegóły żmudnych przekształceń ostateczny wynik dla $\zeta_2'(\eta)$ można napisać w postaci następującej:

$$\zeta_2'(\eta) = \left(\frac{1}{8}+\frac{8}{15\pi}\right)\left[\frac{8}{15\pi}\left(\frac{33}{4}\eta+7\eta^3+\eta^5\right)e^{-\eta^2} - \right.$$

$$\left. -\left(1+6\eta^2+4\eta^4+\frac{8}{15}\eta^6\right)\operatorname{erfc}\eta\right] + \left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\eta^2+\frac{1}{2}\eta^4+\frac{1}{3}\eta^6\right)\operatorname{erfc}^2\eta +$$

$$+\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{3}\eta^3+\frac{2}{5}\eta^5\right)e^{-\eta^2} + \frac{4}{15\pi}\left(1+4\eta^3+\frac{4}{5}\eta^5\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\eta\right]\operatorname{erfc}\eta + \frac{1}{3\pi}\left(\eta^4-\frac{1}{2}\eta^2\right)e^{-2\eta^2} + \frac{4}{15\pi}\left[1-\frac{4}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{8}{3}\eta+\eta^3\right)\right]e^{-\eta^2}.$$

Dlatego mamy

$$u(x,\eta,t) = tG_{w0}(x)\,\zeta_1'(\eta) + t^3\,G_{w0}(x)\frac{dG_{w0}}{dx}\zeta_2'(\eta). \tag{3.20}$$

4. Wyniki i dyskusja

Skoro funkcje u_1, u_2, G_1 i G_2 zostały już znalezione, określenie w niniejszym zagadnieniu odpowiednich wielkości charakterystycznych dla laminarnych warstw przyściennych jest już sprawą prostą. W każdym problemie dotyczącym swobodnej konwekcji określenie powierzchniowej prędkości przenoszenia wydatku cieplnego jest zagadnieniem pierwszorzędnej wagi. W naszym przypadku prędkość przenoszenia ciepła może być dla wygody wyrażona za pomocą zwykłej liczby Nusselta określonej za pomocą wzoru

$$(\mathrm{Nu}) = \frac{lq^+}{\lambda} = -\left[\frac{\partial G^+}{\partial y^+}\right]_{y^+=0},$$

który razem z równaniem (3.17) prowadzi do wzoru

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Nu})}{G_{w0}} = t^{-\frac{1}{2}} + 0{,}143\frac{dG_{w0}}{dx}. \tag{4.1}$$

Tarcie powierzchniowe płyty może być wyliczone z prawa Newtona

$$\tau_w^+ = \frac{l^2\,\tau_w}{\varrho\nu^2} = \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+}\right)_{y^+=0},$$

które w połączeniu z równaniem (3.20) daje

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\tau_w^+}{G_{w0}} = t^{\frac{1}{2}} + 0{,}014t^{\frac{5}{2}}\frac{dG_{w0}}{dx}. \tag{4.2}$$

Przypuśćmy teraz, że temperatura powierzchniowa jest wprost proporcjonalna do potęgi x [14], tzn.

$$G_{w0}(x) = Cx^n. \tag{4.3}$$

Przypadek $n = 0$ odpowiada równomiernemu rozkładowi temperatury powierzchniowej, podczas gdy $n = 1/5$ przedstawia przypadek równomiernego rozkładu powierzchniowego strumienia ciepła. Szczególnie interesującym jest przypadek $n = 1$, dla którego rozwiązanie samopodobieństwa równań warstwy przyściennej jest identyczne z równaniami ciągłości i energii Naviera-Stokesa [15].

Dla $n = 1$ i $C = 1$ związki (4.1) i (4.2) dają

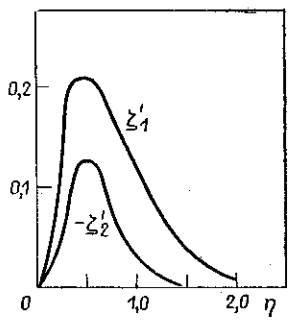
$$\begin{aligned}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}(\mathrm{Nu})}{x} &= t^{-\frac{1}{2}} + 0{,}143t^{3/2},\\ \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\tau_w^+}{x} &= t^{\frac{1}{2}} + 0{,}014t^{5/2}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Wyniki numeryczne formuł (4.4) dla różnych czasów są zamieszczone w tablicy 1.

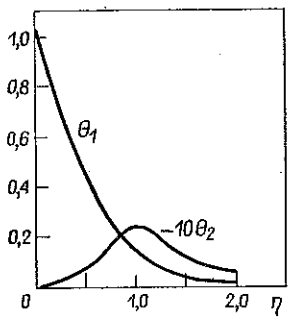
Tablica 1

t	0,1	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0
$\frac{\pi^{1/2}(\mathrm{Nu})}{x}$	3,166	2,018	1,464	1,143	1,078	1,111
$\frac{\pi^{1/2}\tau_w^+}{x}$	0,316	0,500	0,712	1,014	1,262	1,488

Na rysunkach 1 i 2 przedstawione zostały wykresy rozkładu prędkości i temperatury jako funkcja zmiennej samopodobieństwa η. Z rysunków można łatwo zauważyć, że funkcje aproksymacyjne drugiego rzędu gwałtownie maleją. Fakt ten wykazuje, że szeregi mogą wystarczająco dobrze opisać nieustalony przepływ swobodnej konwekcji aż do zakończenia całego procesu.



Rys. 1



Rys. 2

Należy jednakże zaznaczyć, że powyższe efekty powinny być interpretowane fizykalnie dopiero po zamianie wielkości bezwymiarowych na ich wielkości wymiarowe. Jako wniosek końcowy można stwierdzić, że taka sama analiza stosuje się równie dobrze w przypadku, gdy temperatura powierzchniowa zmienia się z czasem w sposób potęgowy. Bardziej złożone zagadnienia będą przedmiotem następnych prac.

5. Uwagi końcowe

W tym punkcie podany zostanie sposób rozwiązania powyższego problemu w ogólnym przypadku, gdy liczba Prandtla jest różna od jedności ($\sigma \neq 1$). Wprowadźmy nową zmienną samopodobieństwa, określoną za pomocą wzoru

$$\bar{\eta} = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{t}} = \eta\sqrt{\sigma}. \tag{5.1}$$

Biorąc pod uwagę równania (2.7)–(2.10) i związek (5.1) dostajemy

$$
\begin{aligned}
&\bar{\theta}_1'' + 2\bar{\eta}\,\bar{\theta}_1' = 0,\\
&\bar{\zeta}_1''' + 2\bar{\eta}\,\bar{\zeta}_1'' - 4\bar{\zeta}_1' = -4\theta_1(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma}),\\
&\bar{\theta}_2'' + 2\bar{\eta}\,\bar{\theta}_2' - 8\bar{\theta}_2 = 4\,[\bar{\zeta}_1'(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma})\,\theta_1(\eta/\sqrt{\sigma}) - \zeta_1(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma})\,\theta_1'(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma})],\\
&\bar{\zeta}_2''' + 2\bar{\eta}\,\bar{\zeta}_2'' - 12\bar{\zeta}_2' = 4\,[\zeta_1'^2(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma}) - \zeta_1(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma})\,\bar{\zeta}_1''(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma}) - \theta_1(\bar{\eta}/\sqrt{\sigma})]
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

z warunkami brzegowymi

$$
\begin{aligned}
&\bar{\eta} = 0: \quad \bar{\theta}_1 = 1, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta}_2 = \bar{\zeta}_1' = \bar{\zeta}_2' = \bar{\theta}_2 = 0,\\
&\bar{\eta} = \infty: \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\zeta}_1' = \bar{\zeta}_2' = \bar{\theta}_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Dla otrzymania numerycznego rozwiązania równań (5.2) jedynie rozsądną rzeczą jest posłużenie się elektronowymi maszynami liczącymi.

Autor wyraża głęboką wdzięczność doc. dr inż. Jackowi MĄCZYŃSKIEMU za jego cenne uwagi odnośnie tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. R. SIEGEL, *Transient free convection from a vertical flat plate*, Trans. ASME, Series E, **80** (1958), 347.
2. A. S. GUPTA, *Steady and transient free convection of an electrically conducting fluid from a vertical plate in the presence of a magnetic field*, Appl. Sci. Res., Section A, **9** (1960), 319.
3. E. R. MENOLD and K. T. YANG, *Asymptotic solutions for unsteady laminar free convection on a vertical plate*, Trans. ASME, Series E, **84** (1962), 124.
4. K. T. YANG, *Possible similarity solutions for laminar free convection on a vertical plates and cylinders*, Trans. ASME, Series E, **82** (1960), 230.
5. K. T. YANG, *Remark on transient laminar free convection along a vertical plate*, Int. J. Heat Mass Transfer, **9** (1966), 511.
6. R. S. NANDA and V. P. SHARMA, *Free convection laminar boundary layers in oscillatory flow*, J. Fluid Mech., **15** (1963), 419.
7. I. POP, *Effect of periodic suction on the unsteady free-convection flow past a vertical porous flat plate*, Rev. Roum. Sci. Tech., Méc. Appl., **13** (1968), 41.
8. J. MADEJSKI, *Non-stationary natural convection heat transfer. Special solutions for vertical flat plates*, Arch. Mech. Stos., **19** (1967), 421.
9. R. AŠKOVIČ, *Étude de la couche limite laminaire tridimensionnelle en régime instationnaire*, Rapport A-9 (1967), Univ. Laval, Québec (Canada).
10. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, New York 1962.
11. F. K. MOORE (Editor), *Theory of Laminar Flows*, Princeton (1964).
12. E. A. EICHELBRENNER et R. AŠKOVIĆ, *Sur une méthode approchée de traiter les couches limites laminaires en régime instationnaire d'un écoulement dans un fluide incompressible à trois dimensions*, J. Mécanique, **6** (1967), 453.
13. I. POP, *Sur la couche limite non stationnaire au voisinage d'un disque tournant*, Comptes rendus, Série A, **267** (1968), 397.
14. M. D. KELLEHER and K. T. YANG, *Heat transfer response of laminar free-convection boundary layer along a vertical heated plate to surface-temperature oscillations*, Z. angew. Math. Physik, **19** (1968), 31.
15. B. L. REEVES and C. J. KIPPENHAN, *On a particular class of similar solutions of the equations of motion and energy of a viscous fluid*, J. Aero Space Sci., **29** (1962), 38.

Резюме

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ЛАМИНАРНАЯ СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

В предложенной работе, обсуждаеся неустановившаяся свободная ламинарная конвекция, вызванная нагревом полубесконечной плоской вертикальной пластинки длиной l.

Аналитические решения, в замкнутом виде для распределения скорости и температуры получено, для скачкоотразных изменений поверхностной температуры и числа Прандтля равного единице. Эти решения были получены, путем разложения искомых функций в конечные ряды. Получены числовые решения для числа Нуссельта и поверхностного трения пластинки для разных значений времени. Результаты представлены также, в виде графиков.

Summary

UNSTEADY LAMINAR FREE-CONVECTION ON A VERTICAL FLAT PLATE

In the present work we shall consider the unsteady laminar free-convection caused by heating a semi-finite flat vertical plate of length l.

The analytical solution in closed form for the distribution of velocity and temperature has been obtained for abrupt changes of the surface temperature and the Prandtl number equal to unity. Those expressions have been obtained by expansion of the sought functions into finite series. Numerical results have been obtained for the Nusselt number and surface friction for various values of time. The results are also presented graphically.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lipca 1968 r.