

NIESTACJONALNE PRZYPADKOWE POLE TEMPERATURY I NAPRĘŻEN  
W NIESKOŃCZONYM PRĘCIE

A. TYLIKOWSKI, T. CHMIELNIAK (GLIWICE)

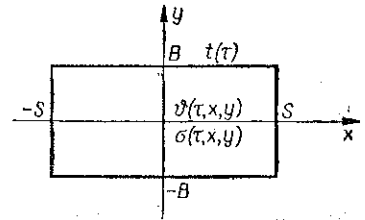
Na potrzebę zastosowania aparatu procesów stochastycznych do analizy pola temperatur i naprężeń wskazano w pracach [1 i 2]. Problemowi temu w zastosowaniu do płyt i powłok poświęcone są między innymi prace [4 i 5]. Praca niniejsza poświęcona jest wyznaczeniu w ramach teorii korelacyjnej [8] charakterystyk pola temperatury i naprężeń w nieskończonym pręcie umieszczonym w ośrodku, którego temperatura jest czasowym stacjonarnym procesem przypadkowym. Zakłada się, że wymiana ciepła między ośrodkiem a prętem scharakteryzowana jest prawem Newtona przy stałym współczynniku wnikania ciepła. Na skutek skończonego czasu trwania wymiany ciepła pole temperatur w pręcie, a więc również pole naprężeń, jest niestacjonarnym czasowo-przestrzennym procesem losowym. Pole to scharakteryzowane jest funkcją autokorelacyjną  $k_{tt}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ . W dalszej części pracy zajęto się wyznaczaniem funkcji korelacyjnej naprężeń w oparciu o uproszczone zagadnienie deterministyczne [7]. Rozwiązanie wyspecyfikowano dla uproszczonego modelu łopatkii turbiny gazowej umiejscowionej w jednorodnym ośrodku o temperaturze zmieniającej się w sposób przypadkowy.

1. Rozwiązanie zagadnienia deterministycznego

Rozpatrzmy nieskończony pręt jednorodny o przekroju prostokątnym  $2B \times 2S$  (rys. 1), współczynnikiem przewodnictwa cieplnego  $\lambda$ , ciepłem właściwym  $c_p$  i gęstością  $\rho$ . Temperatura otaczającego ośrodka jest z góry daną funkcją czasu  $\tau$  i stałą w przestrzeni. Wymiana ciepła między ośrodkiem i powierzchnią pręta określona jest prawem Newtona przy stałym współczynniku wnikania ciepła. W chwili początkowej zakłada się, że pręt znajduje się w równowadze termicznej z ośrodkiem.

Rozkład temperatury w pręcie spełnia równanie przewodnictwa cieplnego

$$(1.1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$$



Rys. 1

gdzie  $a = \lambda/c_p \rho$  oznacza współczynnik przewodzenia temperatury, a równanie spełnia warunki brzegowe

$$(1.2) \quad \lambda \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]_{x=\pm S} = \pm a [t(\tau) - \vartheta],$$

$$\lambda \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right]_{y=\pm B} = \pm a [t(\tau) - \vartheta]$$

i warunek początkowy

$$(1.3) \quad \vartheta(0, x, y) = t(0).$$

Rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (1.1) i (1.2) jest funkcja [6]

$$(1.4) \quad \vartheta(\tau, x, y) = t(\tau) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n B_m \cos \nu_n \frac{x}{S} \times$$

$$\times \cos \mu_m \frac{y}{B} e^{k_{nm}\tau} \int_0^{\tau} e^{-k_{nm}\xi} t'(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$k_{nm} = a \left( \frac{\nu_n^2}{S^2} + \frac{\mu_m^2}{B^2} \right),$$

$$A_n = \frac{2 \sin \nu_n}{\nu_n + \sin \nu_n \cos \nu_n}, \quad B_m = \frac{2 \sin \mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m},$$

pri czym  $\nu_n$  i  $\mu_m$  są pierwiastkami następujących równań przestępnych:

$$\frac{\lambda}{aS} \nu_n = \operatorname{ctg} \nu_n, \quad \frac{\lambda}{aB} \mu_m = \operatorname{ctg} \mu_m.$$

Nierównomierność rozkładu temperatury w przekroju poprzecznym pręta, powstająca wskutek zmiany temperatury ośrodka, wywołuje naprężenia termiczne. W celu uproszczenia rozważań zakładamy za [7] jednoosiowy stan naprężeń. Normalne naprężenia wyrażają się wówczas prostą formułą

$$(1.5) \quad \sigma_{zz} = E \left( \frac{1}{A} \int_A E \beta \vartheta dA + \frac{y}{B_x} \int_A E \beta \vartheta_y dA + \frac{x}{B_y} \int_A E \beta \vartheta_x dA - \beta \vartheta \right),$$

gdzie

$$A = \int_A E dA, \quad B_x = \int_A E y^2 dA, \quad B_y = \int_A E x^2 dA.$$

W dalszym ciągu zakładając będziemy, że moduł  $E$  i współczynnik rozszerzalności cieplnej  $\beta$  są stałe, czyli, że

$$(1.6) \quad \sigma_{zz} = E\beta \left( \frac{1}{4BS} \int_{-B}^B \int_{-S}^S \vartheta dx dy + \frac{3y}{4SB^3} \int_{-B}^B \int_{-S}^S \vartheta y dx dy + \right. \\ \left. + \frac{3x}{4BS^3} \int_{-B}^B \int_{-S}^S \vartheta x dy dx - \vartheta \right).$$

## 2. Zastosowanie analizy korelacyjnej

Zakładamy, że temperatura ośrodka jest stacjonarnym przypadkowym procesem o znanej funkcji korelacyjnej:

$$(2.1) \quad k_{tt}(\tau_1, \tau_2) = k_{tt}(\tau_1 - \tau_2) = M [t^\circ(\tau_1) t^\circ(\tau_2)],$$

gdzie

$$t^\circ(\tau) = t(\tau) - Mt(\tau).$$

W powyższych zależnościach  $M$  oznacza uśrednienie po zbiorze realizacji funkcji losowych.

Zależności (1.4) i (1.5), wiążące ze sobą funkcje «wejściowe» i «wyjściowe», stanowiące podstawę dalszych rozważań, mają charakter liniowy, a współczynniki w nich występujące są deterministyczne. Z tego powodu formuły wiążące ze sobą wartości oczekiwane «wejściowych» i «wyjściowych» procesów otrzymuje się za pomocą uśrednienia odpowiednich równań po zbiorze realizacji. Otrzymane w ten sposób zależności mają taką samą postać, jak odpowiednie zależności w zagadnieniu deterministycznym. Dlatego też w dalszym ciągu nie zmniejszając ogólności rozważań będziemy zakładając, że wejściowa funkcja losowa ma wartość oczekiwaną równą zeru,  $Mt(\tau) = 0$ , a ze względu na liniowy charakter (1.4) i (1.5) mamy również  $M\vartheta = 0$  i  $M\sigma = 0$ .

Funkcję korelacyjną temperatury  $\vartheta$  wyznaczamy ze związku

$$k_{\vartheta\vartheta}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, y_1, y_2) = M [\vartheta(\tau_1, x_1, y_1) \vartheta(\tau_2, x_2, y_2)].$$

Podstawiając (1.4) do ostatniej zależności oraz korzystając z własności operatora  $M$  [8] otrzymujemy

$$(2.2) \quad k_{\vartheta\vartheta}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, y_1, y_2) = k_{tt}(\tau_1, \tau_2) - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_i B_m \cos \nu_i \frac{x_1}{S} \cos \mu_m \times \\ \times \frac{y_1}{B} e^{-k_{im}\tau_1} \int_0^{\tau_1} e^{k_{im}\xi_1} k_{tt'}(\tau_2, \xi_1) d\xi_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_i B_j \cos \nu_i \frac{x_2}{S} \cos \mu_j \frac{y_2}{B} \times \\ \times e^{-k_{ij}\tau_2} \int_0^{\tau_2} e^{k_{ij}\xi_2} k_{tt'}(\tau_1, \xi_2) d\xi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_l B_m A_i B_j \times \\ \times \cos \nu_l \frac{x_1}{S} \cos \mu_m \frac{y_1}{B} \cos \nu_i \frac{x_2}{S} \cos \mu_j \frac{y_2}{B} e^{-(k_{im}\tau_1 + k_{ij}\tau_2)} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} e^{k_{im}\xi_1 + k_{ij}\xi_2} k_{tt'} d\xi_1 d\xi_2,$$

gdzie

$$(2.3) \quad k_{tt}(\tau_1, \tau_2) = M [t(\tau_1, x_1, y_1) t'(\tau_2, x_2, y_2)] = \frac{\partial k_{tt}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2},$$

$$k_{t't'}(\tau_1, \tau_2) = M [t'(\tau_1, x_1, y_1) t'(\tau_2, x_2, y_2)] = \frac{\partial^2 k_{tt}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(2.4) \quad H_{ij}(\tau_1, \tau_2) = A_i B_j e^{-k_{ij}\tau_2} \int_0^{\tau_2} e^{k_{ij}\xi_2} k_{it'}(\tau_1, \xi_2) d\xi_2$$

oraz

$$(2.5) \quad G_{ijlm}(\tau_1, \tau_2) = A_i B_j A_l B_m e^{-(k_{ij}\tau_2 + k_{lm}\tau_1)} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} e^{k_{ij}\xi_2 + k_{lm}\xi_1} \times \\ \times k_{l't'}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

przedstawimy funkcję korelacyjną temperatury w sposób następujący:

$$(2.6) \quad k_{\theta\theta}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, y_1, y_2) = k_{tt}(\tau_1, \tau_2) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} H_{lm}(\tau_2, \tau_1) \times \\ \times \cos \nu_l \frac{x_1}{S} \cos \mu_m \frac{y_1}{B} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} H_{lj}(\tau_1, \tau_2) \cos \nu_l \frac{x_2}{S} \cos \mu_j \frac{y_2}{B} + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{ijlm}(\tau_1, \tau_2) \cos \nu_l \frac{x_1}{S} \cos \mu_m \frac{y_1}{B} \cos \nu_i \frac{x_2}{S} \cos \mu_j \frac{y_2}{B}.$$

Wzór (2.6) pokazuje, że rozkład temperatury w przekroju poprzecznym pręta jest czasowo-przestrzennym niestacjonarnym procesem losowym. Fakt niestacjonarności «wyjścia» mimo że «wejście» jest stacjonarne tłumaczymy skończonym czasem trwania wymiany ciepła (do chwili  $\tau = 0$  pręt znajdował się w równowadze termicznej z ośrodkiem).

Funkcję korelacyjną naprężeń definiujemy w podobny sposób:

$$(2.7) \quad k_{\sigma\sigma}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, y_1, y_2) = M [\sigma(\tau_1, x_1, y_1) \sigma(\tau_2, x_2, y_2)].$$

Korzystając z (1.6) i (2.6) i wykonując operację uśrednienia całkowania otrzymujemy

$$(2.8) \quad k_{\sigma\sigma}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, y_1, y_2) = \beta^2 E^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{ijlm}(\tau_1, \tau_2) \times \\ \times \left( \cos \nu_l \frac{x_2}{S} \cos \mu_j \frac{y_2}{B} + \frac{\sin \nu_l \sin \mu_j}{\nu_l \mu_j} \right) \left( \cos \nu_i \frac{x_1}{S} \cos \mu_m \frac{y_1}{B} + \frac{\sin \nu_i \sin \mu_m}{\nu_i \mu_m} \right).$$

Otrzymane wyniki (2.2) i (2.8) pozwalają wyznaczyć średnie kwadraty temperatury i naprężenia. W tym celu należy podstawić w tych związkach  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ,  $x_1 = x_2 = x$  oraz  $y_1 = y_2 = y$ :

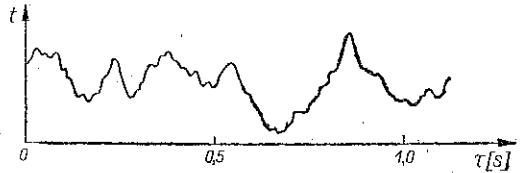
$$\begin{aligned}
 \sigma_{\vartheta\vartheta}^2(\tau, x, y) = & \sigma_{tt}^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} H_{lm}(\tau, \tau) \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_m \frac{y}{B} + \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} H_{lj}(\tau, \tau) \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_j \frac{y}{B} + \\
 (2.9) \quad & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{ijkl}(\tau, \tau) \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \nu_i \frac{x}{S} \cos \mu_j \frac{y}{B} \cos \mu_m \frac{y}{B}, \\
 \sigma_{\sigma\sigma}^2(\tau, x, y) = & \beta^2 E^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{ijkl}(\tau, \tau) \left( \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_j \frac{y}{B} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sin \nu_l \sin \mu_j}{\nu_l \mu_j} \right) \left( \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_m \frac{y}{B} + \frac{\sin \nu_l \sin \mu_m}{\nu_l \mu_m} \right).
 \end{aligned}$$

Wzory (2.9), określające dyspersję temperatury i naprężenia, stanowią punkt wyjściowy zastosowań. Posługiwanie się tymi zależnościami wymaga jedynie znajomości funkcji korelacyjnej temperatury ośrodka.

### 3. Przykład zastosowania

Eksperymentalne badania procesu spalania w komorze spalania turbiny gazowej na paliwo płynne [2] wykazały znaczne wahania temperatury strumienia gazu za komorą o maksymalnych odchyleniach od średniej dochodzących do 15% temperatury nominalnej.

Zarejestrowane przebiegi temperatury (rys. 2) wykazują nieregularny charakter. Nie ma potrzeby wykazywać, że wahania temperatury w strumieniu gazu w stanie ustalonym noszą przypadkowy charakter. Dlatego też zagadnienia związane z oceną rozkładu temperatury i naprężeń w elementach konstrukcji, umieszczonych w strumieniu czynnika gazowego, powinny być rozwiązywane na podstawie teorii procesów stochastycznych jako aparacie matematycznym najbardziej przydatnym do tego celu.



Rys. 2

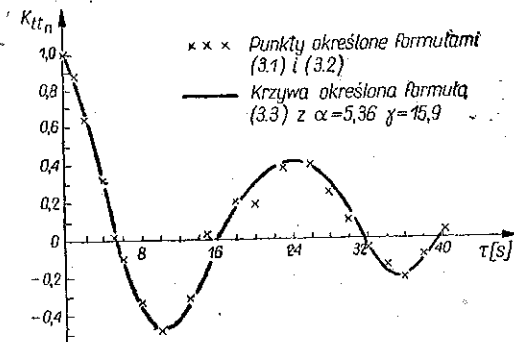
Zakładając, że temperatura jest stacjonarną ergodyczną funkcją losową, funkcję korelacyjną można wyznaczyć posługując się jedną dostatecznie długą realizacją procesu [8]. Można do tego wybrać następujące przybliżone formuły [9]:

$$(3.1) \quad k_{tt} \left( \frac{mT}{n} \right) = \frac{1}{n-m} \sum_{r=1}^{n-m} [t(\tau_{r+m}) - m_t] [t(\tau_r) - m_t],$$

gdzie  $T$  oznacza obserwowany czas trwania realizacji,  $n$  ilość przedziałów,  $m$  czas dyskretny przyjmujący wartości  $0, 1, \dots, n/4$  oraz

$$(3.2) \quad m_t = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n t(\tau_r).$$

Uzyskaną na tej drodze funkcję korelacyjną podzieloną przez jej wartość dla  $m = 0 (D)$ , czyli tzw. unormowaną funkcję korelacyjną temperatury, przedstawia rys. 3.



Rys. 3

Unormowane funkcje korelacyjne wielu rzeczywistych fizykalnych procesów losowych mogą być aproksymowane formułą

$$(3.3) \quad k_{tt}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \gamma\tau + \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma|\tau| \right),$$

przy czym stałe  $\alpha$  i  $\gamma$  dobiera się tak, aby krzywa eksperymentalna miała możliwie zbliżony przebieg do krzywej teoretycznej, uzyskanej z zależności (3.3). Np. dla krzywej z rys. 3  $\alpha$  i  $\gamma$  wynoszą odpowiednio 5,36 i 15,9.

Przyjmując, że aproksymowana przez nas funkcja korelacyjna ma postać (3.3), otrzymujemy dla wzorów (2.3) związki

$$(3.4) \quad \begin{aligned} k_{tt}(\tau_1, \tau_2) &= D \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\gamma} e^{-\alpha|\tau_2 - \tau_1|} \sin \gamma(\tau_2 - \tau_1), \\ k_{ij}(\tau_1, \tau_2) &= D(\alpha^2 + \gamma^2) e^{-\alpha|\tau_2 - \tau_1|} \left[ \cos \gamma(\tau_1 - \tau_2) - \frac{\alpha}{\gamma} \sin |\tau_1 - \tau_2| \right]. \end{aligned}$$

Funkcje (3.4), podstawione do (2.4) i (2.5), pozwalają na obliczenie pomocniczych funkcji  $H_{lm}(\tau, \tau)$  i  $G_{ijklm}(\tau, \tau)$ , koniecznych do określenia dyspersji temperatury  $(2.9)_1$  i naprężeń  $(2.9)_2$ :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} H_{lm}(\tau, \tau) &= A_l B_m \frac{1 - e^{-(\alpha + k_{lm})\tau} \left( \cos \gamma\tau + \frac{k_{lm} + \alpha}{\gamma} \sin \gamma\tau \right)}{(k_{lm} + \alpha)^2 + \gamma^2}, \\ G_{ijklm}(\tau, \tau) &= A_i A_l B_m B_j \left[ (1 - e^{-(k_{ij} + k_{lm})\tau}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{-4\alpha k_{ij}^2}{[k_{jt} + k_{lm}] [(\alpha + k_{ij})^2 + j^2] [(k_{ij} - \alpha)^2 + j^2]} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left[ \left( \gamma + \frac{a^2}{\gamma} \right) (k_{ij} - k_{lm}) - \frac{a}{\gamma} (k_{ij} k_{lm} - a^2 - \gamma^2) \right] \sin \gamma \tau + (k_{ij} k_{lm} + a^2 + \gamma^2) \cos \gamma \tau \right\} \times \\
 & \times \left\{ \frac{e^{-\tau(k_{lm} + a)}}{[(k_{lm} + a)^2 + \gamma^2] [(k_{ij} - a)^2 + \gamma^2]} - \frac{e^{-\tau(k_{ij} + a)}}{[(k_{ij} + a)^2 + \gamma^2] [(k_{lm} - a)^2 + \gamma^2]} \right\} - \\
 & - \frac{k_{lm} k_{ij} + a^2 + \gamma^2}{[(k_{lm} - a)^2 + \gamma^2] [(k_{ij} + a)^2 + \gamma^2]} e^{-(k_{ij} + k_{lm})\tau} - \frac{k_{lm} k_{ij} + a^2 + \gamma^2}{[(k_{lm} + a)^2 + \gamma^2] [(k_{ij} - a)^2 + \gamma^2]} \Big].
 \end{aligned}$$

Rozwiązania (3.5) posiadają dwie interesujące własności:

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & H_{lm} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0, \quad G_{ijklm} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0, \\
 & \sigma_{\theta\theta}^2(\tau, x, y) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0, \quad \sigma_{\sigma\sigma}^2(\tau, x, y, z) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

oraz

$$(3.7) \quad H_{lm} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} H_{lm\infty}, \quad G_{ijklm} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} G_{ijklm\infty},$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & \sigma_{\theta\theta}^2(\tau, x, y) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta\infty}^2 = \sigma_{tt}^2 - D(a^2 + \gamma^2) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_l B_m \frac{\cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_m \frac{y}{B}}{(k_{lm} + a)^2 + \gamma^2} + \right. \\
 & + \left. \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_i B_j \frac{\cos \nu_i \frac{x}{S} \cos \mu_j \frac{y}{B}}{(k_{ij} + a)^2 + \gamma^2} \right\} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_l A_i B_m B_j \times \\
 & \times \left\{ \frac{k_{lm} k_{ij} + a^2 + \gamma^2}{[(k_{lm} + a)^2 + \gamma^2] [(k_{ij} - a)^2 + \gamma^2]} - \frac{4ak_{ij}^2}{(k_{lm} + k_{ij}) [(k_{ij} + a)^2 + \gamma^2] [(k_{ij} - a)^2 + \gamma^2]} \right\} \times \\
 & \times \cos \nu_i \frac{x}{S} \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_j \frac{y}{B} \cos \mu_m \frac{y}{B}, \\
 & \sigma_{\sigma\sigma}^2(\tau, x, y) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \sigma_{\sigma\sigma\infty}^2 = \beta^2 E^2 D(a^2 + \gamma^2) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_l A_i B_m B_j \times \\
 & \times \left\{ \frac{k_{lm} k_{ij} + a^2 + \gamma^2}{[(k_{lm} + a)^2 + \gamma^2] [(k_{ij} - a)^2 + \gamma^2]} - \frac{4ak_{ij}^2}{(k_{lm} + k_{ij}) [(\alpha + k_{ij})^2 + \gamma^2] [(ak_{ij} - a)^2 + \gamma^2]} \right\} \times \\
 & \times \left( \cos \nu_i \frac{x}{S} \cos \mu_j \frac{y}{B} + \frac{\sin \nu_i \sin \mu_j}{\nu_i \mu_j} \right) \left( \cos \nu_l \frac{x}{S} \cos \mu_m \frac{y}{B} + \frac{\sin \nu_l \sin \mu_m}{\nu_l \mu_m} \right).
 \end{aligned}$$

Rozwiązania (3.8) są równoważne ze stacjonarnymi rozwiązaniami problemu.

Wzory (2.9) wraz z (3.5) lub wzory (3.8) dają całkowitą charakterystykę stochastycznych pól temperatury i naprężeń, jeśli założyć normalny rozkład prawdopodobieństwa (dla celów praktycznych wystarczającym jest znajomość wielkości dyspersji).

Postępując podobnie można uzyskać wzory na interesujące nas średnie odchylenia kwadratowe dla nieskończonych prętów o przekroju kołowym lub dla elementów skończonych o odpowiednich prostych przekrojach, dla których znane jest rozwiązanie zagadnienia deterministycznego. Rozwiązania dla elementów skończonych, prosto otrzymywane z rozwiązania zagadnienia dwuwymiarowego, będą oczywiście bardziej skomplikowane.

#### Literatura cytowana w tekście

1. R. E. D. BISHOP, *Vibration*, Cambridge at the University Press, 1965.
2. О. В. Дубровский, *Экспериментальное исследование пульсационного горения жидкого топлива в камерах сгорания стационарных газотрубных установок*, Теплоэнергетика, 6, 1959, 56-61.
3. О. В. Дубровский, *Исследование низкочастотных пульсаций в газотрубных камерах сгорания*, Теплоэнергетика, 8, 1961, 32-36.
4. В. В. Болотин, В. Н. Москаленко, *Случайные термоупругие напряжения в оболочках*, Труды VI всесоюзной конф. по теории оболочек и пластинок, Изд. Наука, Москва 1966, 168-176.
5. В. Н. Москаленко, *О случайных термоупругих напряжениях в пластинках*, Тепловые напряжения в элементах конструкции, Выпуск 7, Научная Думка, Киев 1967, 209-216.
6. Н. Ю. Таиц, *Технология нагрева стали*, Металлургиздат, Москва 1962, 51-59.
7. Н. Н. Малинин, *Изгиб турбинных лопаток*, Изв. АН СССР, ОТН, 4, 1954.
8. I. I. GICHMAN, A. W. SKOROSNÓB, *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968, 188-239.
9. В. С. Пугачев, *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления*, Гос. Издат. Физико-Мат. Литер., Москва 1965, гл. 16.

#### Резюме

#### НЕСТАЦИОНАРНОЕ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР И НАПРЯЖЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

В рамках теории корреляции рассматривается нестационарное температурное поле и поле деформаций в бесконечном стержне, расположенном в среде, температура которого является случайным процессом. Температурное поле характеризуется величинами автокорреляционной функции  $k_{ii}(x_1, x_2, y_1, y_2)$  и дисперсиями, определенными при предположении постоянного коэффициента проникновения излучения тепла. Корреляционная функция и дисперсия напряжений определяется на основе упрощенной детерминистической задачи [7].

В качестве примера, дается подробное решение для температурного поля и поля напряжений в стержне, расположенном в потоке газа за камерой горения, используя достаточно длинную реализацию процесса горения. Кроме того, решается задача для стационарного случая.



## Summary

NON-STATIONARY RANDOM TEMPERATURE AND STRESS FIELD  
IN AN INFINITE BAR

The non-stationary temperature and stress field in an infinite bar contained in a medium, the temperature of which is a random phenomenon are considered within the frames of the correlation theory. The temperature field is determined by the value of the autocorrelation function  $k_{tt}(x_1, x_2, y_1, y_2)$  and the dispersion which are determined assuming constant coefficient of heat absorption. The correlation function and the dispersion of stresses is determined on the basis of the simplified deterministic problem [7].

As an example of application a detailed solution is obtained for the temperature and stress field in a bar located in a gas stream leaving a combustion chamber assuming a sufficiently durable combustion process. In addition the problem of a stationary case is solved.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lipca 1968 r.*

---