ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 17 (1969)

PLASTYCZNE WYPUKLANIE CIENKIEJ PŁYTY KOŁOWEJ IMPULSEM CIŚNIENIA

TADEUSZ BEDNARSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problem plastycznego wypuklania cienkich płyt kołowych pod obciążeniem dynamicznym ciśnienia pochodzącego od detonacji ładunków wybuchowych w wodzie stanowi szczególny przypadek «tłoczenia wybuchowego» elementów z blach, które znajduje coraz szersze zastosowanie w przemyśle. Problem ten jest przedmiotem badań w wielu ośrodkach naukowych [3, 4, 9, 20, 22 i 23] mających na celu wyjaśnienie przebiegu samego procesu i zjawisk towarzyszących. Spośród licznych prac, jakie ukazały się na ten temat, należy wspomnieć o dwóch, które zawierają bardziej szczegółową analizę tego problemu: o pracy G. E. HUDSONA [12], w której przeprowadzona została analiza tego problemu w warunkach obciążenia impulsem prędkości, oraz o pracy B. A. SZCZEGŁOWA [21], gdzie przeprowadzono analizę przy obciążeniu impulsowym ciśnieniem zmiennym w czasie. W obydwu pracach zakładano, że kinematyka procesu odkształcania polega na przyjęciu założenia o rozprzestrzenianiu się pierścieniowych przegubów plastycznych od brzegów przepony w kierunku jej środka. Przeprowadzone przez autora pomiary nie potwierdzają jednak istnienia tych przegubów, co podważa słuszność przyjmowania takiego założenia.

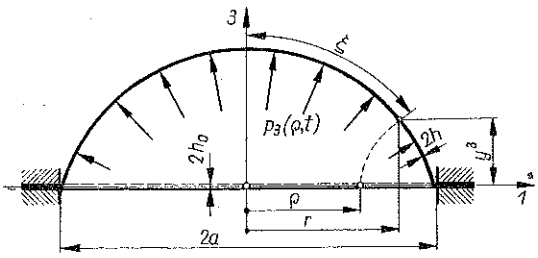
W pracy podjęto próbę opisania tego zjawiska w sposób ogólny w oparciu o bezmomentową teorię powłok z uwzględnieniem deformacji skończonych w ujęciu J. E. EDKINSA i R. S. RIVLINA [1] i w ramach teorii plastycznego płynięcia. Odtworzono również przebieg procesu i przeprowadzono pomiary niektórych wielkości fizycznych w czasie przebiegu procesu.

2. Postawienie problemu

Przedmiotem pracy jest problem plastycznego wypuklania cienkiej płyty kołowej (rys. 1) o grubości $2h_0$ i promieniu a utwierdzonej na obwodzie i obciążonej impulsowo ciśnieniem zmiennym w czasie $p_3(\varrho, t)$.

Do opisu teoretycznego tego problemu przyjęto następujące założenia: proces wypuklania plastycznego jest procesem kształtowania powłoki, która znajduje się w stanie błonowym; utwierdzenie powłoki na obwodzie jest przegubowe; obciążenie powłoki jest zmienne w czasie i rozłożone osiowo symetrycznie; powierzchnia

środkowa powłoki jest powierzchnią obrotową w trakcie procesu deformacji i po jego zakończeniu — ze stałą i wspólną osią symetrii; grubość powłoki przed odkształceniem jest stała; składowa naprężeń głównych w kierunku normalnym do powierzchni środkowej $\sigma_{33} \approx 0$; materiał powłoki jest jednorodny i izotropowy zarówno przed, jak i w trakcie procesu deformacji oraz nieściśliwy w zakresie odkształceń plastycznych; wreszcie materiał powłoki jest sztywno-lepkoplastyczny.



Rys. 1

3. Związki geometryczne

Opis kształtowanej powłoki dokonany został we współrzędnych przestrzennych walcowych r, ϑ, y_3 i w układzie współrzędnych krzywoliniowych $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ związanych z powierzchnią środkową powłoki i tak dobranych, aby uzyskać ortogonalność siatki parametrycznej i zgodność jej kierunków z kierunkami głównymi naprężeń i odkształceń. Warunek ten jest spełniony dla naturalnej parametryzacji powierzchni obrotowej

$$\theta^1 = \xi, \quad \theta^2 = \vartheta, \theta^3, \tag{3.1}$$

gdzie ξ jest długością łuku mierzoną wzdłuż południka od osi symetrii do danego punktu powierzchni środkowej, określonego współrzędnymi materialnymi $\varrho, \vartheta, 0$ dla chwili początkowej procesu. Wtedy są spełnione następujące związki geometryczne dla powierzchni środkowej powłoki [1]:

dla krzywizny głównej w kierunku południkowym

$$k_1 = -r_{,1}\, y^3_{,11} + r_{,11}\, y^3_{,1}, \tag{3.2}$$

równoleżnikowym

$$k_2 = -r^{-1}\, y^3_{,1} \tag{3.3}$$

oraz warunek zgodności geometrycznej

$$(rk_2)_{,1} - r_{,1}\, k_1 = 0 \tag{3.4}$$

i tożsamości

$$(r_{,1})^2 + (y^3_{,1}) \equiv 1, \quad r_{,1}\, r_{,11} + y_{,1}\, y_{,11} \equiv 0, \tag{3.5}$$

gdzie $r_{,1}$, $r_{,11}$ oraz $y^3_{,1}$ i $y^3_{,11}$ są pochodnymi cząstkowymi współrzędnych walcowych r i y^3 odpowiednio pierwszego i drugiego rzędu względem współrzędnej $\theta^1 = \xi$.

Oczywiście zarówno współrzędne walcowe r, ϑ, y_3 jak i współrzędne krzywoliniowe $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ są funkcjami współrzędnej materialnej ϱ i czasu t [5], a więc $(r(\varrho, t), \vartheta, y^3(\varrho, t))$ i $(\theta^1(\varrho, t)\, \theta^2, \theta^3(\varrho, t))$ (rys. 1).

4. Kinematyka i dynamika powłoki

Wektory przemieszczenia, prędkości przemieszczenia i przyspieszenia dowolnego punktu materialnego powłoki $(\varrho, \vartheta, 0)$ w przyjętym układzie przestrzennym współrzędnych walcowych mają postać [5]

$$\mathbf{u} = (r - \varrho, 0, y^3), \quad \mathbf{v} = (\dot{r}, 0, \dot{y}^3), \quad \mathbf{w} = (\ddot{r}, 0, \ddot{y}^3), \tag{4.1}$$

gdzie przez $\dot{r}$ i $\dot{y}^3$ oraz $\ddot{r}$ i $\ddot{y}^3$ oznaczono odpowiednio pierwszą i drugą pochodną czasową współrzędnych r i y^3. We współrzędnych krzywoliniowych θ^i wektor przyśpieszenia ma postać

$$\mathbf{w} = (r_{,1}\,\ddot{r} + y^3_{,1}\,\ddot{y}^3, 0, -y^3_{,1}\,\ddot{r} + r_{,1}\,\ddot{y}^3). \tag{4.2}$$

Rozpatrując równowagę elementu powłoki ograniczonego liniami parametrycznymi θ^1 i $\theta^1 + d\theta^1$ oraz θ^2 i $\theta^2 + d\theta^2$ w dowolnie ustalonym momencie t procesu wypuklania dla założonego stanu bezmomentowego i obciążenia $p_3(\varrho, t)$ otrzymujemy dwa równania ruchu:

$$\begin{aligned} &r\sigma_{11,1} + r\sigma_{11}\frac{h_{,1}}{h} + (\sigma_{11} - \sigma_{22})\,r_{,1} - \delta r(r_{,1}\,\ddot{r} + y^3_{,1}\,\ddot{y}^3) = 0, \\ &k_1\,\sigma_{11} + k_2\,\sigma_{22} - \frac{1}{2h}p_3 + \delta(-y^3_{,1}\,\ddot{r} + r_{,1}\,\ddot{y}^3) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie przez σ_{ii} dla $i = 1, 2$ oznaczono naprężenie główne, a przez h i δ odpowiednio grubość i gęstość elementu powłoki.

5. Deformacje i związki fizykalne

Dla określenia składowych tensora odkształcenia i tensora prędkości odkształcenia definiujemy najpierw współczynniki wydłużenia w kierunkach głównych $\lambda_i(\varrho, t)$ następująco:

$$\lambda_1 = \frac{d\xi}{d\varrho}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{\varrho}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{h_0}, \tag{5.1}$$

gdzie $2h_0$ i $2h$ oznaczają grubości powłoki odpowiednio przed i w trakcie deformacji. Wykorzystując współczynniki wydłużenia λ_i przedstawimy składowe tensora odkształcenia w postaci

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2}), \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.2}$$

albo przy użyciu miary logarytmicznej w postaci

$$\varepsilon_{Hi} = \ln \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.3}$$

Składowe zaś tensora prędkości odkształcenia przyjmą postać [5]

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{5.4}$$

gdzie przez $\dot{\lambda}_i$ oznaczono pochodną względem czasu λ_i.

Dla przyjętego modelu materiału sztywno-lepkoplastycznego ze związku [15, 16, 17, 18 i 19]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma_0 \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad \dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \quad \text{dla} \quad F = 0 \tag{5.5}$$

i dla warunku plastyczności Hubera-Misesa $F = \sqrt{I_2} - k_0$, gdzie I_2 jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, a k_0 statyczną granicą plastyczności na ścinanie, oraz dla $\Phi(F) = F$, uwzględniając (5.4), otrzymamy równania konstytutywne w postaci

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \gamma_1 \lambda_1 \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_2^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}}\right)(2\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ \dot{\lambda}_2 &= \gamma_1 \lambda_2 \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_2^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}}\right)(2\sigma_{22} - \sigma_{11}), \\ \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} &+ \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

gdzie $\sigma_0 = \sqrt{3}k_0$ jest statyczną granicą plastyczności oraz γ_0 jest stałą materiałową, przy czym $\gamma_1 = \gamma_0/2\sqrt{3}k_0 = \gamma_0/2\sigma_0$. Warunek nieściśliwości $(5.6)_3$ można wyrazić na podstawie (5.1) w postaci

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \tag{5.7}$$

6. Układ równań opisujących proces

Pełny układ równań opisujących proces plastycznego wypuklania cienkiej płyty kołowej zawiera dwa równania ruchu (4.5), trzy definicje współczynników wydłużenia (5.1), trzy związki geometryczne (3.4), (3.3) i $(3.5)_1$, warunek nieściśliwości (5.7) oraz dwa równania konstytutywne $(5.6)_1$ i $(5.6)_2$, które zestawione razem tworzą układ jedenastu równań różniczkowo algebraicznych:

$$\begin{aligned} &rn_{1,1} + rn_1 \frac{h_{,1}}{h} + (n_1 - n_2) r_1 - \frac{\delta}{\sigma_0} r (r_{,1} \ddot{r} + y^3_{,1} \ddot{y}^3) = 0, \\ &k_1 n_1 + k_2 n_2 - \frac{1}{2h} p + \frac{\delta}{\sigma_0} (-y^3_{,1} \ddot{r} + r_{,1} \ddot{y}^3) = 0, \\ &\lambda_1 = \frac{d\xi}{d\varrho}, \qquad \lambda_2 = \frac{r}{\varrho}, \\ &\lambda_3 = \frac{h}{h_0}, \qquad (rk_2)_{,1} - r_{,1} k_1 = 0, \\ &k_2 = -\frac{1}{r} y^3_{,1}, \qquad (r_{,1})^2 + (y^3_{,1})^3 = 1, \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \\ &\dot{\lambda}_1 = \gamma_2 \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2}}\right)(2n_1 - n_2), \\ &\dot{\lambda}_2 = \gamma_2 \lambda_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2}}\right)(2n_2 - n_1), \end{aligned} \tag{6.1}$$

z jedenastoma funkcjami niewiadomymi: n_1, n_2, k_1, k_2, λ_1, λ_2, λ_3, r, y^3, ξ, h, dwu zmiennych ϱ i t. W układzie (6.1) oznaczono: $n_i = \sigma_{ii}/\sigma_0$ i $p = p_3/\sigma_0$ oraz $\gamma_2 = \gamma_1 \sigma_0$. W tym układzie związki fizykalne występują rozdzielnie w stosunku do powstałych równań układu i mogą być zastąpione innymi związkami opisującymi inny model materiału i w ramach dowolnej teorii plastyczności.

Dla założonego modelu materiału i na gruncie teorii plastycznego płynięcia, mając na uwadze, iż

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial \varrho}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \tag{6.2}$$

oraz

$$(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad (\ddot{}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{6.3}$$

układ sprowadzić możemy do układu trzech równań różniczkowych cząstkowych quasi-liniowych postaci

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t^2} + a_{12}\frac{\partial^2 y^3}{\partial t^2} + b_{11}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \varrho\, \partial t} + b_{13}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \varrho\, \partial t} + c_{11}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \varrho^2} + c_{12}\frac{\partial^2 y^3}{\partial \varrho^2} + f_1 = 0, \\ a_{21}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t^2} + a_{22}\frac{\partial^2 y^3}{\partial t^2} + c_{22}\frac{\partial^2 y^3}{\partial \varrho^2} + f_2 = 0, \\ b_{31}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t\, \partial \varrho} + b_{32}\frac{\partial^2 y^3}{\partial t\, \partial \varrho} + f_3 = 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

z trzema funkcjami niewiadomymi λ_1, λ_2, y^3 zmiennych ϱ i t. Współczynniki występujące w układzie (6.4) mają postać:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\delta}{\sigma_0}\lambda_2 \varrho^2 \left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right), \\ a_{12} &= \frac{\delta}{\sigma_0}\lambda_2 \varrho \frac{\partial y^3}{\partial \varrho}, \\ a_{21} &= \frac{\delta}{\sigma_0}\lambda_2 \varrho^2 \frac{\partial y^3}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right), \\ a_{22} &= -\frac{\delta}{\sigma_0}\lambda_2 \varrho \left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right); \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \lambda_1 \lambda_2 \varrho\, c_1 H - \frac{\varrho}{\gamma_2 (2c-1)}, \\ b_{13} &= -\lambda_2^2 \varrho\, c_2 H, \\ b_{31} &= \varrho \left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right), \\ b_{32} &= \frac{\partial y^3}{\partial \varrho}; \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$c_{11} = \lambda_2 \varrho^2 n_1 \left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right),$$

(6.7)
$$c_{12} = \lambda_2 \varrho n_1 \frac{\partial y^3}{\partial \varrho},$$

$$c_{22} = \lambda_2 \varrho n_1;$$

$$f_1 = n_1 \left(2\lambda_2 \varrho \frac{\partial \lambda_2}{\theta \varrho} + c - 1\right)\left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right) + \left(\varrho n_1 \lambda_1^2 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \frac{\varrho}{\gamma_2 \lambda_2 (2c-1)}\right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} +$$
$$+ \lambda_2 \varrho H \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \frac{\partial \lambda_2}{\partial t}\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varrho} \lambda_2 - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} \lambda_1\right),$$

(6.8)
$$f_2 = \left(n_1 c \frac{\partial y^3}{\partial \varrho} + \frac{1}{2h_0} \lambda_1^2 \lambda_2^2 p\right)\left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right),$$

$$f_3 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial t}\left(\varrho \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} + \lambda_2\right) - \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial t},$$

gdzie

(6.9)
$$n_1 = \frac{1}{\gamma_2 \lambda_2 (2-c)} \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - c + 1}};$$

(6.10)
$$c = \frac{2c_2 + c_1}{2c_1 + c_2}, \qquad c_1 = \frac{\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t}}{\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t}}, \qquad c_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

oraz

(6.11)
$$H = \frac{3}{(2c_1 + c_2)^2}\left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \frac{2}{\gamma_2 \lambda_2 (2c-1)^2} + \frac{1}{2}(c^2 - c + 1)^{-2/3}(2c-1)\right].$$

Przy $\delta \to 0$ otrzymujemy układ opisujący proces quasi-statycznie z pominięciem sił bezwładności, lecz z uwzględnieniem prędkości odkształcenia.

Warunki brzegowe i początkowe dla układu równań (6.4) formułujemy następująco:

(6.12)
$$\varrho = 0, \qquad t \geqslant 0: \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial y^3}{\partial \varrho} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2,$$

$$\varrho = a, \qquad t \geqslant 0: \qquad \lambda_1 = 1, \quad y^3 = 0;$$

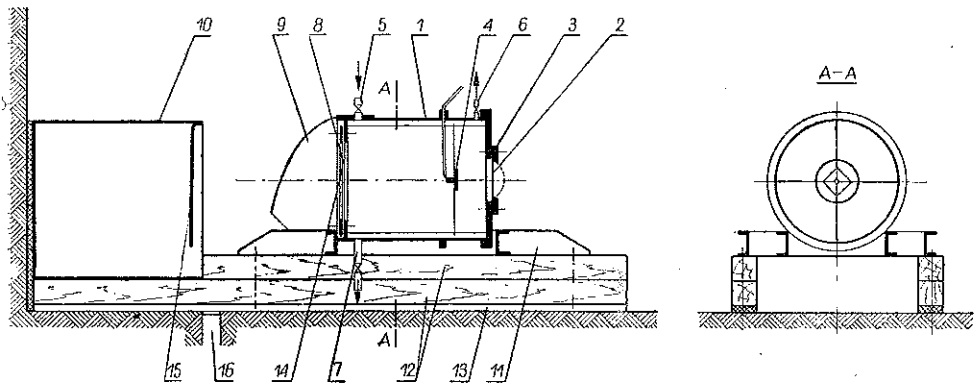
(6.13)
$$0 \leqslant \varrho \leqslant a, \qquad t = 0: \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad y^3 = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial y^3}{\partial t} = 0.$$

Dla stali o zawartości węgla 0,17% w stanie wyżarzonym stałe materiałowe występujące we współczynnikach układu równań (6.4) wynoszą: $\delta = 8 \cdot 10^{-3}\,s^2\,kGcm^{-4}$, $\sigma_0 = 200\ kGcm^{-2}$, $\gamma_2 = 68{,}7\ s^{-1}$, przy czym σ_0 wyznaczono z próby jdenoosiowego rozciągania [5], a γ_2 określono przy założeniu, że materiał badany zachowuje się podobnie, jak materiał badany przez D. S. CLARKA i P. E. DUWEZA [8].

7. Doświadczalne odtworzenie procesu

Proces dynamicznego wypuklania cienkiej płyty kołowej został odtworzony na stanowisku badawczym przedstawionym na rys. 2. W zbiorniku poziomym *1*, ułożonym na ramie *11* spoczywającej na drewnianych belkach *12*, leżących na podkładce gumowej *13* w przednim dnie wykonany jest otwór zamknięty próbką badaną 2 dociśniętą do dna za pomocą stalowego pierścienia *3*. Drugie, tylne dno zbiornika tworzy przepona gumowa *8* lekko dociśnięta pierścieniem *14* tak, aby tylko uniemożliwić wyciekanie wody ze zbiornika. Wewnątrz zbiornika zawieszony



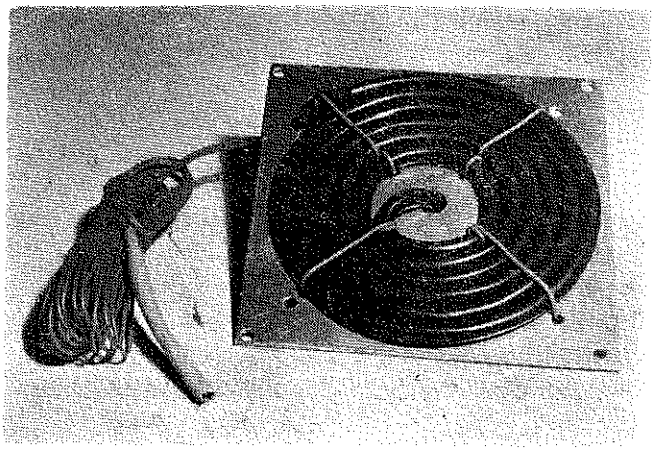
Rys. 2

jest ładunek wybuchowy *4* w sposób umożliwiający łatwe ustalanie jego położenia. Napełnianie zbiornika wodą odbywa się przez zawór *5*. Sprawdzianem stanu napełnienia zbiornika jest zawór przelewowy *6*, który spełnia zarazem rolę zaworu odpowietrzającego. Ewentualne opróżnianie zbiornika odbywa się przez króciec z zaworem *7*. W celu zapobieżenia rozpryskiwania się wody po strzale dodatkowo wyposażono zbiornik *1* w osłonę gumową *9* zwisającą swobodnie z tyłu zbiornika oraz dodatkowy zbiornik *10* wraz z fartuchem gumowym *15*. Po strzale woda spływa ściekiem *16* do kanałów ściekowych.

Dla lepszego zamocowania próbki *2* pierścień *3* posiada współśrodkowe dwa zęby odpowiadające dwóm wrębom w dnie zbiornika *1*, między którymi zaciśnięta jest próbka badana za pomocą dwunastu śrub *M18*. Zbiornik wewnątrz został wyklejony styrogumem.

Ładunek wybuchowy stosowany przy badaniach miał postać lontu sznurowego o długości 1 m, zawierającego 11 ± 1 G/m pentrytu, zwiniętego spiralnie i umoco-

wanego na płytce duralowej (rys. 3). Środkowy koniec lontu połączony był z zapalnikiem elektrycznym, którego energia ładunku równoważna jest energii 1 G pentrytu. Tak przygotowany ładunek zawieszany był na czterech drutach umocowanych do



Rys. 3

listew umieszczonych wewnątrz zbiornika, co schematycznie pokazane jest na rys. 2. Przewody od zapalnika odprowadzane były przez otwór w zbiorniku na zewnątrz i podłączane do aparatu zapłonowego.

8. Pomiary ciśnienia wywieranego na powierzchnię próbki

Ciśnienie $p_3(\varrho, t)$ wywierane na powierzchnię próbki w trakcie procesu jej deformacji jest wynikiem oddziaływania na nią głównej fali uderzeniowej i fal odbitych, powstałych w wyniku detonacji ładunku wybuchowego umieszczonego w zbiorniku wypełnionym wodą w pobliżu próbki, która stanowi przeponę oddzielającą dwa ośrodki: wodę i powietrze, przy czym gęstość tej przepony jest znacznie większa od gęstości ośrodków rozdzielanych. Dla prostego przypadku, normalnego do powierzchni próbki ruchu fali uderzeniowej (z pominięciem fal odbitych od ścian zbiornika) w przybliżeniu akustycznym ciśnienie na próbkę wynosiłoby [13, 19 i 20]

$$p_3(\varrho, t) = 2p_1(\varrho, t) - (\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2)\, v(\varrho, t), \tag{8.1}$$

gdzie przez $p_1(\varrho, t)$ oznaczono ciśnienie fali padającej, δ_1, δ_2 gęstość wody i powietrza oraz a_1 i a_2 prędkości dźwięku w wodzie i w powietrzu, a przez $v(\varrho, t)$ prędkość przemieszczania się przepony. Po obliczeniach z wyrażenia (8.1) otrzymamy

$$p_3(\varrho, t) = 2p_1(\varrho, t) - 15{,}304 v(\varrho, t). \tag{8.2}$$

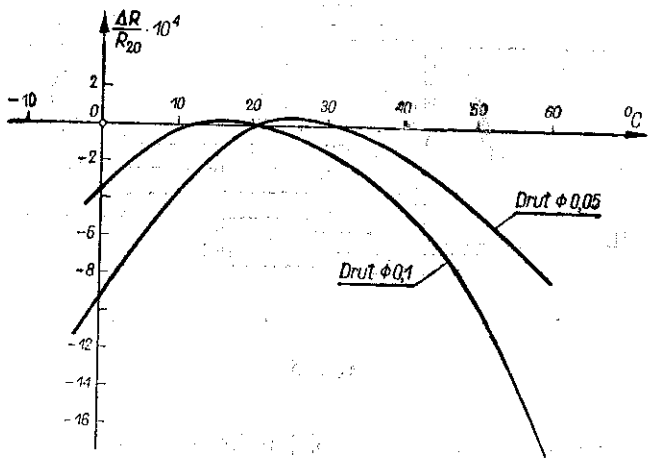
Ponieważ nawet w tak wyidealizowanym przypadku, który może zachodzić co najwyżej dla punktu środkowego powłoki, ani ciśnienie $p_1(\varrho, t)$, ani efektywne

metody jego obliczania nie są autorowi znane, dlatego też określono rozkład $p_3(\varrho, t)$ doświadczalnie.

Pomiary rozkładu ciśnienia $p_3(\varrho, t)$ na powierzchni deformowanej próbki wykonano metodą piezooporności (stosowaną do pomiarów wysokich ciśnień hydrostatycznych) modyfikując ją i dostosowując do pomiarów ciśnień o charakterze dynamicznym. Podstawą fizyczną tej metody jest związek przewodnictwa elektrycznego metali z wywołanym stanem naprężenia w tym metalu. Doświadczenia [6, 7, 24 i 25] wykazały, że najbardziej przydatnym do tego celu jest manganin dający liniową zależność oporności od ciśnienia hydrostatycznego w zakresie od 0 do 30000 kG/cm^2 w postaci

$$R_{PT_0} = R_0 (1 + \alpha (T_0) p_3), \tag{8.3}$$

gdzie R_0 jest opornością manganinu przy ciśnieniu 1 kG/cm^2 i temperaturze T_0, R_{PT_0} przy ciśnieniu p_3 i temperaturze T_0, $\alpha(T_0)$ jest ciśnieniowym współczynnikiem oporu, zależnym dla manganinu tylko od temperatury. Przy obciążeniu dynamicznym czujnika stan fizyczny manganinu będzie różnił się od stanu wywołanego ciśnieniem hydrostatycznym. Różnica ta wynika z istnienia gradientu ciśnienia, co przy skończonej grubości nawoju drutu manganinowego spowoduje samoczynne uśrednianie mierzonych wartości ciśnienia w warstwie równej grubości nawoju czujnika. Otrzymany błąd pomiaru obliczony dla ciśnień za czołem fali uderzeniowej dla badanego procesu [5] przy grubości nawoju 0,5 mm nie przekracza 1%.



Rys. 4

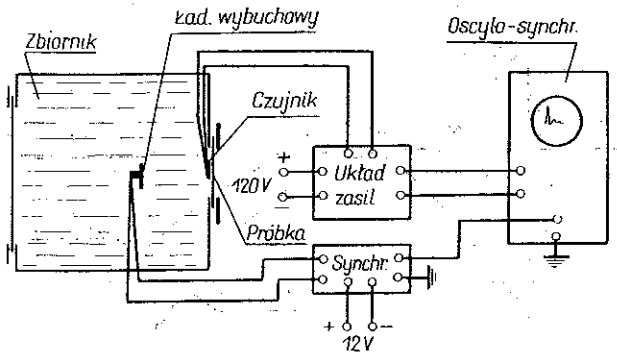
Krótkotrwały, a więc adiabatyczny przebieg procesu powoduje wzrost temperatury, a tym samym zmianę oporności manganinu, co może być przyczyną błędów pomiarów. W granicach do 5000 kG/cm^2 obciążenia hydrostatycznego w procesie adiabatycznym przyrost temperatury manganinu jest rzędu 3°C [5]. Wyniki pomiarów przyrostów oporności względnej $\Delta R/R_{20}$ jako funkcji temperatury [5] przedstawione na rys. 4 wykazują, iż w zakresie temperatur 13°–16°C przyrost ten w zależności od rodzaju drutu jest rzędu $(0{,}2–1{,}2)\cdot 10^{-4}$. Ponieważ ciśnieniu 5000 kG/cm^2

odpowiada przyrost oporności względnej $1{,}25 \cdot 10^{-2}$, więc błąd wynikający z pominięcia wpływu temperatury wyniesie odpowiednio od 0,24 do 0,96%.

Należy podkreślić, że przy czasie trwania impulsu ciśnienia rzędu 10^{-3} s oraz czasie narastania tego impulsu rzędu 10^{-6} s czasy relaksacji nośników ładunków elektrycznych są na ogół dla metali jeszcze o kilka rzędów krótsze, więc należy uważać, iż stan równowagi elektrycznej jest w dostatecznym stopniu osiągany nawet w czasie narastania tego impulsu, co pozwala na stosowanie tej metody do pomiaru ciśnień o charakterze dynamicznym. Pomijając wpływ gradientu ciśnienia i przyrostu temperatury otrzymujemy z zależności (8.3)

$$p_3 = \frac{1}{a} \frac{\Delta R}{R}, \tag{8.4}$$

gdzie $a = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm/kG wyznacza się doświadczalnie [2 i 7], R jest opornością czujnika, którą dobierano w granicach 80–300 Ω w zależności od średnicy drutu i wielkości nawoju, a ΔR jest przyrostem oporności czujnika zależnym od ciśnienia, a mierzonym pośrednio przez rejestrację spadku napięcia za pomocą oscylosynchroskopu przy stałym natężeniu prądu zasilającego. Schemat blokowy takiego układu pomiarowego przedstawiony jest na rys. 5.



Rys. 5

Zastosowany czujnik pomiarowy w swojej budowie wzorowany był na czujnikach do pomiaru ciśnień hydrostatycznych [7, 24 i 25]. Zwojnica z drutu oporowego manganinowego o średnicy 0,05 lub 0,1 mm nawinięta jest bifilarnie z wyprowadzonymi końcami dla połączenia z przewodami łączącymi z aparaturą rejestrującą. Całość została zalana tworzywem dokładnie wypełniającym przestrzeń między zwojami. Tworzywo to nie powinno odkształcać się trwale w trakcie pomiaru, gdyż powoduje to dodatkowe błędy pomiaru, które trudno jest oszacować.

Ze względu na liniową zależność przyrostu oporności od ciśnienia z odchyleniem nie przekraczającym $\pm 1\%$ [7 i 24] skalowanie układu sprowadza się do wyskalowania wzmocnienia oscylosynchroskopu.

Wyniki pomiarów pola ciśnień $p_3(\varrho, t)$ na powierzchni próbki opracowane zostały na podstawie pomiarów oscylogramów i przedstawiono je w postaci następującej zależności, otrzymanej metodą wybranych punktów:

$$p_3 = \cos(a_1 \varrho) \begin{cases} p_1 \dfrac{t}{t_1}, & \text{jeśli} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ (p_1 - p_2)\left(\dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\right)^6 + p_2, & \text{jeśli} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ p_2, & \text{jeśli} \quad t_2 < t \leqslant t_3, \\ p_2\left(1 - \dfrac{t - t_3}{t_4 - t_3}\right), & \text{jeśli} \quad t_3 < t \leqslant t_4, \\ 0, & \text{jeśli} \quad t > t_4, \end{cases} \tag{8.5}$$

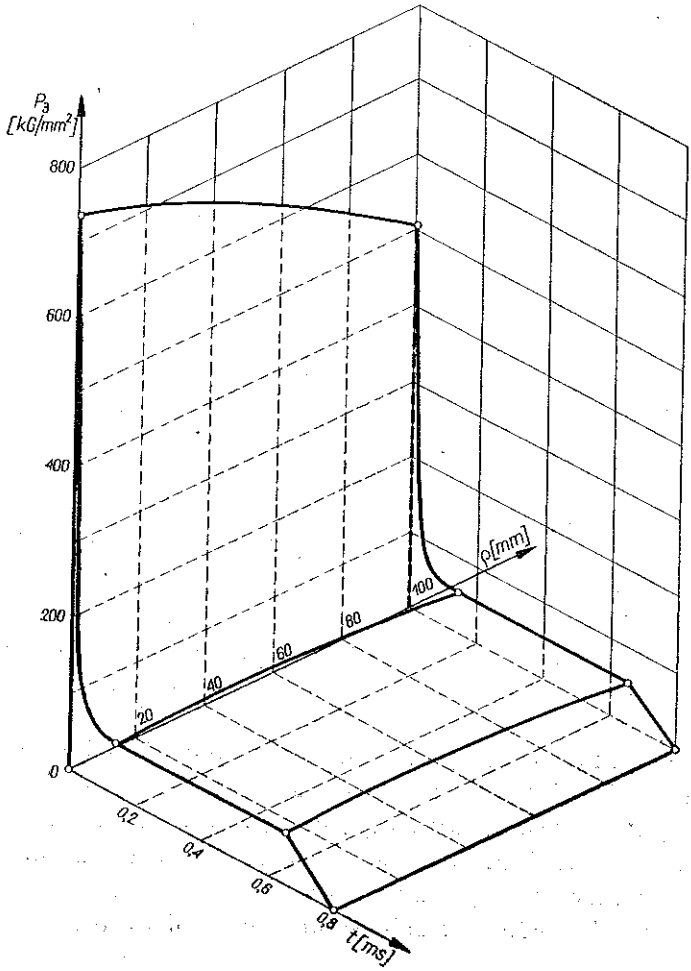
gdzie p_1, p_2, t_1, t_2, t_3 i t_4 są odpowiednio wartościami współrzędnych wybranych punktów na oscylogramie w układzie p_3, t. Wartości tych współrzędnych dla $\varrho = 0$ wynoszą: $p_1 = 735$ kG/cm^2, $p_2 = 70$ kG/cm^2, $t_1 = 5$ μs, $t_2 = 150$ μs, $t_3 = 650$ μs, $t_4 = 800$ μs. Stała $a_1 = 0{,}007$ cm^{-1} charakteryzująca rozkład ciśnienia określona została z oscylogramów. Wyniki tych pomiarów przedstawione są graficznie na rys. 6.

Dokładność otrzymanych wyników, zależna od dokładności wskazań czujnika, dokładności układu rejestrującego oraz dokładności odczytu oscylogramu, określa się [5] na ±8%. Do tego dochodzą błędy powstające w wyniku zginania się czujnika, którego konstrukcja czujnika całkowicie nie eliminowała, a szacowane na ±10%. Zatem łącznie należy się liczyć, iż wyniki pomiarów są obarczone błędami rzędu ±18%, które w miarę udoskonalania konstrukcji czujników będzie można zmniejszyć.

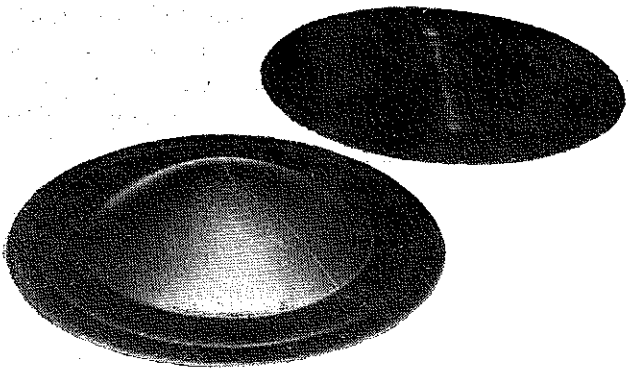
9. Pomiary przemieszczeń końcowych

Pomiary próbek po odkształceniu metodami metrologicznymi pozwalają na określenie współrzędnych powłoki $r(\varrho)$ i $y^3(\varrho)$ oraz grubości $h(\varrho)$, a na podstawie tych wielkości określić wydłużenia końcowe $\lambda_i(\varrho)$ i odkształcenia końcowe $\varepsilon_{ii}(\varrho)$ i $\varepsilon_{Hi}(\varrho)$ oraz ich niezmienniki. Pomiary współrzędnych ϱ przed odkształceniem oraz $r(\varrho)$ i $y^3(\varrho)$ po odkształceniu dokonano na uniwersalnym mikroskopie pomiarowym УИМ-21, a pomiar grubości h_0 przed i $h(\varrho)$ po odkształceniu za pomocą mikromierza.

Na serię próbek (10 sztuk) przeznaczonych do pomiarów naniesiono siatkę parametryczną w postaci współrzędnych biegunowych, tzn. okręgów współśrodkowych w odstępach około 5 mm i 6 promieni, za pomocą rys wykonanych ostrzem cyrkla i rysika. Otrzymano w ten sposób 181 punktów pomiarowych na próbce, których współrzędne ϱ mierzono przed deformacją. Pomiar współrzędnych $r(\varrho)$ i $y^3(\varrho)$ po deformacji dokonano na trzech próbkach o zbliżonych wysokościach punktu środkowego. Próbka taka przed i po odkształceniu pokazana jest na rys. 7



Rys. 6

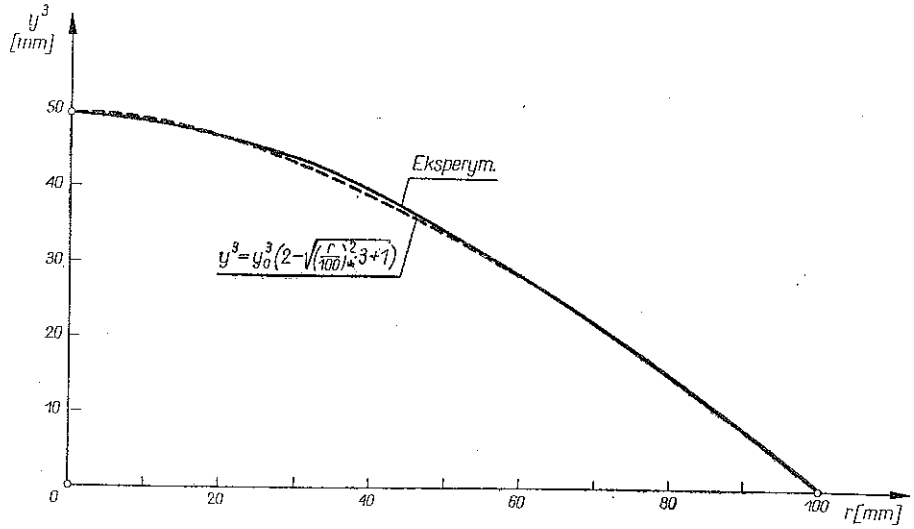


Rys. 7

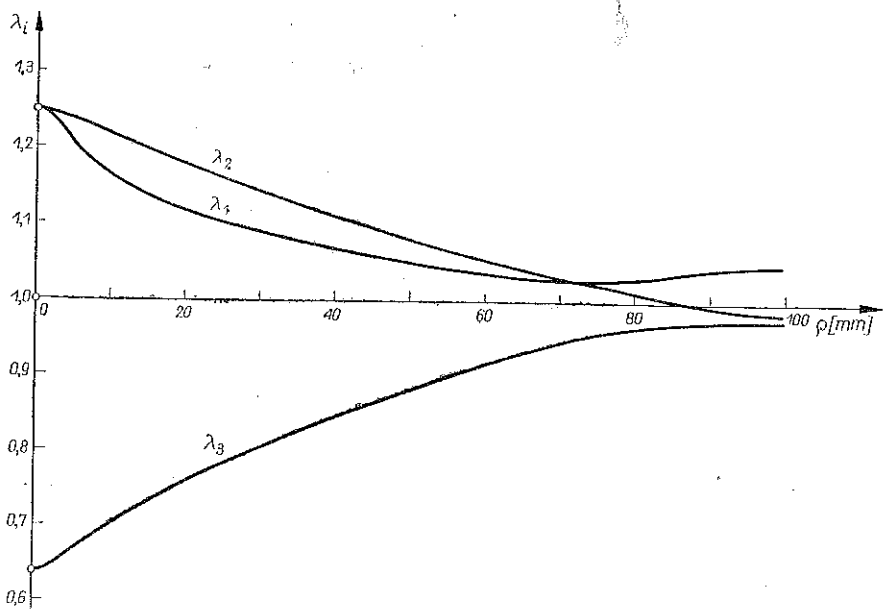
Otrzymana zależność $y^3(r)$, jako wynik uśrednionych pomiarów $r(\varrho)$ i $y^3(\varrho)$, opisująca kształt próbki, przedstawiona jest graficznie na rys. 8. Kształt ten w naszym przypadku jest zbliżony do hiperboloidy obrotowej o równaniu

$$y^3 = y_0^3\left(2 - \sqrt{3\left(\frac{r}{100}\right)^2 + 1}\right), \tag{9.1}$$

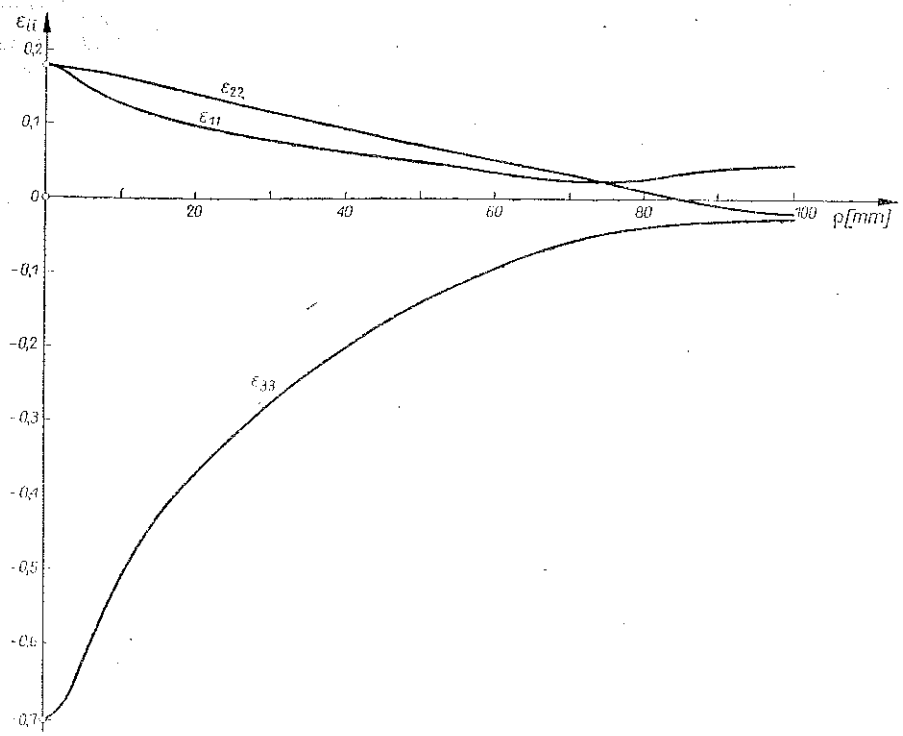
gdzie współczynniki stałe występujące w tym równaniu wyznaczone zostały metodą wybranych punktów, a $y_0^3 = y^3(0)$.



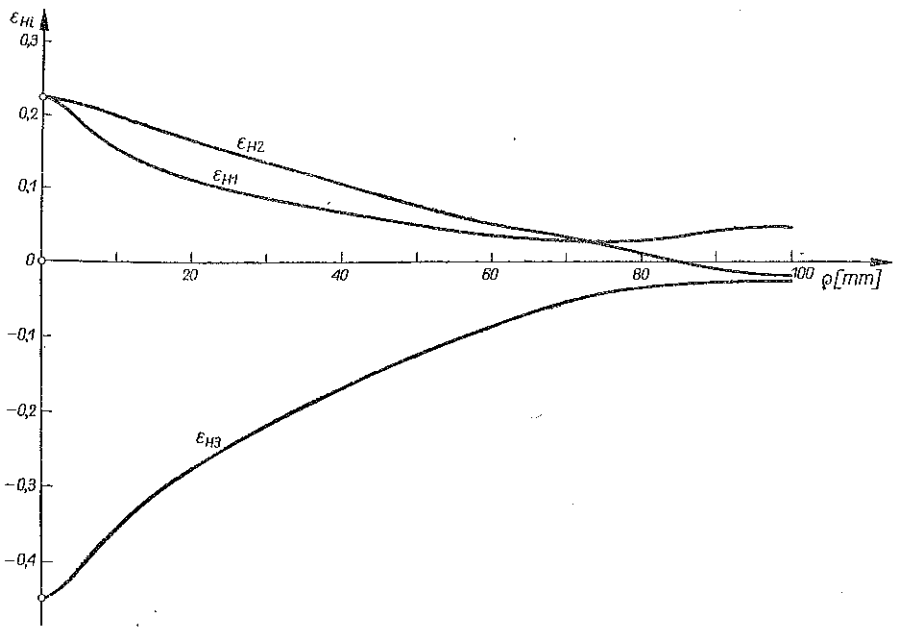
Rys. 8



Rys. 9


ε_{ii}
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
-0,7
ε_{22}
ε_{11}
ε_{33}
20
40
60
80
100
ρ[mm]

Rys. 10


ε_{Hi}
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
ε_{H2}
ε_{H1}
ε_{H3}
20
40
60
80
100
ρ[mm]

Rys. 11

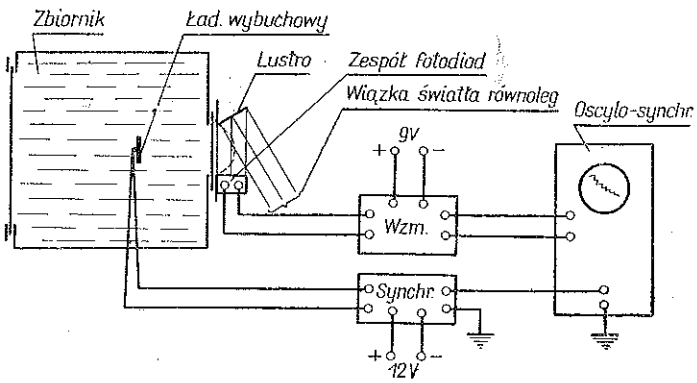
Uśrednione wyniki pomiarów $r(\varrho)$ i $h(\varrho)$ pozwoliły na obliczenie współczynników wydłużeń końcowych $\lambda_2(\varrho)$ i $\lambda_3(\varrho)$ według definicji (5.1) oraz $\lambda_1(\varrho)$ z warunku nieściśliwości (5.7). Wyniki tych obliczeń przedstawia rys. 9. Wykorzystując znajomość współczynników wydłużeń $\lambda_i(\varrho)$ dla $i = 1, 2, 3$ obliczono rozkład odkształceń końcowych $\varepsilon_{ti}(\varrho)$ i $\varepsilon_{Hi}(\varrho)$ określonych zależnościami (5.2) i (5.3), a wyniki tych obliczeń przedstawione są na rys. 10 i 11.

Pomiary wykazały (rys. 9, 10 i 11) pewną nieprawidłowość rozkładu odkształceń w pobliżu krawędzi zamocowania powłoki. Nieprawidłowości te wystąpiły na skutek wyciągania obrzeża próbki z zacisku mocującego w trakcie procesu deformacji.

Dokładność pomiaru wydłużeń jest szacowana na $\pm 1{,}25\%$, która wynika z dokładności pomiaru za pomocą mikromierza.

10. Pomiary przemieszczeń punktu środkowego powłoki w czasie jej deformacji

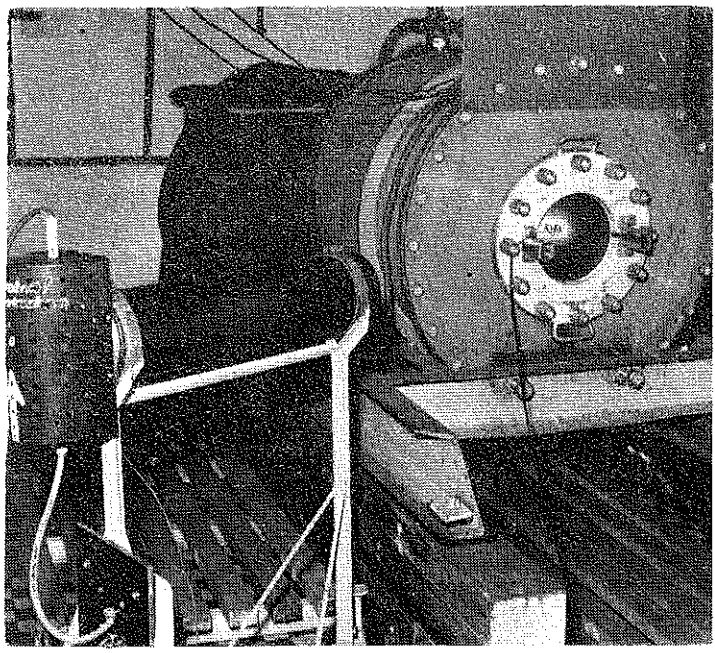
Pomiary przemieszczeń punktu środkowego powłoki w trakcie procesu jej deformacji wykonano metodą fotoelektryczną. Schemat blokowy tej metody przedstawiony jest na rys. 12. Istota tej metody polega na rzucaniu równoległej wiązki światła od reflektora na lustro, które skierowuje tę wiązkę równolegle do płaszczyzny próbki przed deformacją na baterię fotodiod. W czasie deformacji próbki fotodiody są kolejno przysłaniane, w wyniku czego oporność ich rośnie. Ten proces przysłaniania fotodiod, wywołujący spadek napięcia w układzie czujnika, jest rejestrowany na oscylosynchroskopie.



Rys. 12

Sam czujnik tworzy obudowa, wewnątrz której umieszczone są fotodiody w odstępach 6 mm. Każda z fotodiod umieszczona jest w gnieździe z otworem o średnicy 3 mm dla umożliwienia jej oświetlenia. Tak skonstruowany czujnik pozwalał na rejestrację położenia punktu środkowego powłoki w odstępach 3 mm. Czujnik i lustro zmontowane były na pierścieniu dociskającym, reflektor zaś specjalnie do tego celu zbudowany umieszczony był obok na statywie. Ogólny widok stanowiska po wykonanym pomiarze przedstawiony jest na rys. 13.

Ze względów wytrzymałościowych samego pierścienia dociskającego fotodiody umieszczone zostały w odległości 10 mm od powierzchni próbki przed odkształceniem, przez co pierwszy punkt pomiarowy, otrzymywany tą metodą, jest odległy od położenia początkowego o 8,5 mm. Początek procesu przemieszczania został również zarejestrowany dzięki czułości fotodiod na uderzenie, które rejestrowały moment uderzenia fali uderzeniowej o próbkę. Wynik ten pokrywał się z wynikiem otrzymanym przy pomiarze momentu początku ruchu próbki za pomocą tensometru oporowego, naklejanego bezpośrednio na powierzchnię próbki badanej.



Rys. 13

Wyniki pomiarów opracowane zostały na podstawie oscylogramów wykonanych w trakcie procesu wypuklania trzech próbek i przedstawione są w postaci tabeli i wykresu na rys. 14.

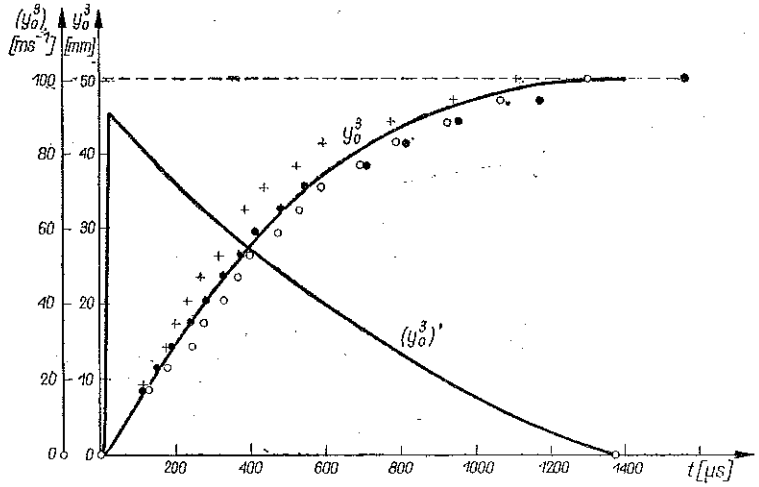
Ruch punktu środkowego powłoki można opisać za pomocą wzoru empirycznego w postaci:

$$(10.1)\qquad y_0^3 = \begin{cases} 1\,453\,250\,t^4, & \text{jeśli } 0 \leqslant t \leqslant 0{,}025 \text{ [ms]}, \\ \dfrac{1}{2}b\left((1-\cos\pi\sqrt{\dfrac{t-0{,}019}{1{,}361}}\right), & \text{jeśli } 0{,}025 < t \leqslant 1{,}38 \text{ [ms]}, \end{cases}$$

w którym stałe określone zostały metodą średnich, b zaś jest wysokością próbki po zakończeniu procesu. Prędkość przemieszczania środkowego punktu powłoki określona z równania (10.1) wyrazi się zależnością

$$(10.2)\quad (y_0^3)' = \begin{cases} 5\,813\,000\,t^3, & \text{jeśli } 0 \leqslant t \leqslant 0{,}025 \text{ [ms]}, \\ b\dfrac{\pi}{5{,}444}\sqrt{\dfrac{1{,}361}{t-0{,}019}}\sin\pi\sqrt{\dfrac{t-0{,}019}{1{,}361}}, & \text{jeśli } 0{,}025 < t \leqslant 1{,}38 \text{ [ms]}, \end{cases}$$

przedstawioną również w postaci wykresu na rys. 14.



Rys. 14

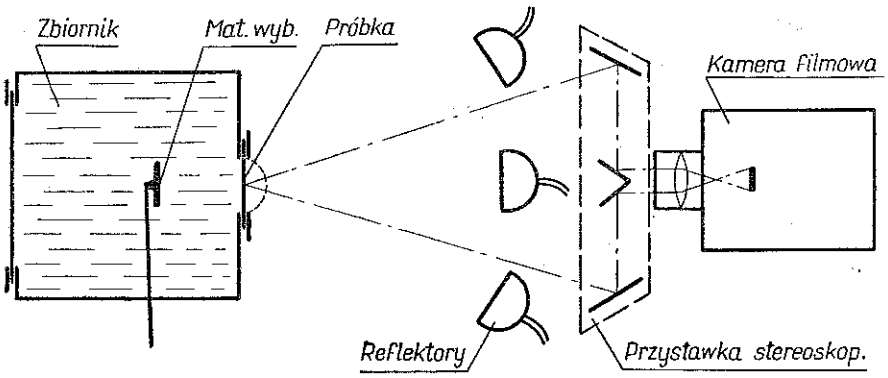
Dokładność pomiarów przemieszczeń dokonanych przedstawioną metodą fotoelektryczną zależy głównie od stałej czasowej fotodiod wynoszącej 10 μs, wrażliwości fotodiod na impulsy uderzeniowe, rozmazania linii przebiegu na oscylogramie, dokładności rozmieszczenia fotodiod i nieliniowości podstawy czasu oscylosynchroskopu. Ogólny błąd kwadratowy zastosowanego układu pomiarowego nie przekracza ± 20 μs.

11. Pomiary przemieszczeń metodą stereofotogrametryczną

Metoda stereofotogrametryczna pomiaru przemieszczeń poszczególnych punktów powłoki [10 i 20] polega na zastosowaniu szybkobieżnej kamery filmowej wyposażonej w przystawkę stereoskopową do filmowania przebiegu procesu deformacji powłoki. Otrzymane zdjęcia stereoskopowe wykonywane ze znaną stałą częstotliwością pozwalają na określenie współrzędnych $r(\varrho, t)$ i $y^3(\varrho, t)$ poszczególnych punktów ϱ dla całej powłoki w pewnych momentach czasowych, a tym samym na określenie zmiany kształtu powłoki w trakcie procesu jej deformacji.

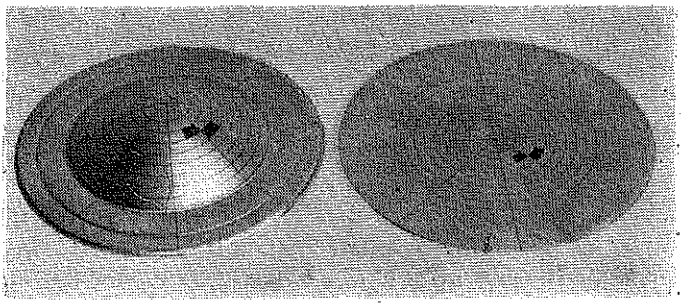
Pomiary dokonane były według schematu przedstawionego na rys. 15. Na przeciwko próbki badanej, oświetlonej reflektorami, ustawiona jest kamera filmowa ZL-1 wyposażona w specjalnie do tego celu skonstruowaną przystawkę stereoskopową. Synchronizacja czasu opóźnienia zapłonu zapalnika z czasem rozbiegu taśmy filmowej odbywała się za pomocą przekaźnika czasowego, włączanego równocześnie ze sprzęgłem kamery filmowej. Wielkość tego opóźnienia określano doświadczalnie.

Dla oznaczenia mierzonych punktów powłoki nanoszono na próbkę badaną siatkę parametryczną w postaci okręgów współśrodkowych w odstępach około 10 mm, przeciętych ośmioma promieniami, metodą chemigraficzną. Dla umożliwienia odczytu bezpośrednio z filmu na stecometrze linie siatki parametrycznej wykonano o grubości 0,6 mm. Próbka taka przed i po deformacji przedstawiona jest na rys. 16.



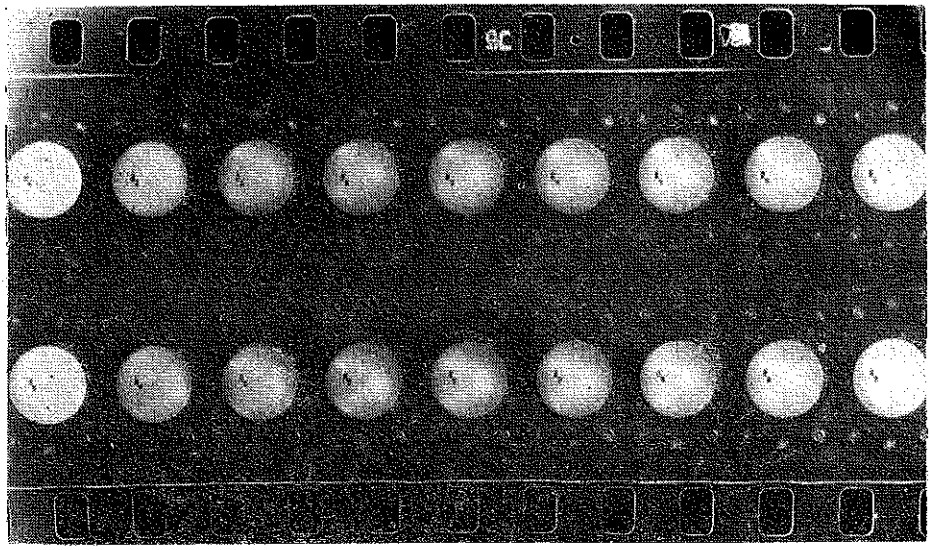
Rys. 15

Prędkość filmowania wynosiła 6000 klatek na sekundę przy wymiarze klatki 7·22 mm, co pozwalało na uzyskanie podwojonego obrazu próbki na filmie o średnicy 5 mm. Znacznik czasowy kamery naświetlał znaczki na filmie z częstotliwością 1000 Hz, co pozwalało na korektę częstotliwości filmowania. Całość procesu mieściła się na 10 klatkach filmu, którego fragment jest przedstawiony na rys. 17. Zdjęcia te były podstawą do opracowania wyników pomiarowych, przy czym obserwację i pomiary negatywu przeprowadzono na przyrządzie fotogrametrycznym, stecometrze.



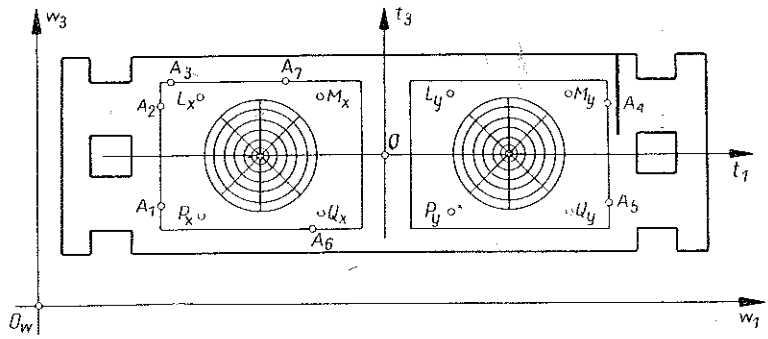
Rys. 16

Wyznaczenie parametrów wewnętrznych kamery, czyli współrzędnych środka optycznego kadru O (rys. 18), sprowadzono do wyznaczenia środka geometrycznego kadru na podstawie pomiaru współrzędnych w_i punktów brzegowych A_i dla $i = 1, 2, ..., 7$ kadru nierozciętego. Punkt O jest początkiem układu współrzędnych



Rys. 17

tłowych t_i (rys. 18). Jednocześnie wyznaczono współrzędne tłowe t_i dwóch punktów bazowych M_x i Q_x zdjęcia lewego i dwóch punktów bazowych L_y i P_y zdjęcia prawego dla umożliwienia odtworzenia położenia fikcyjnego środka optycznego O_x i O_y na rozciętych połówkach negatywu (rys. 19) obserwowanych i mierzonych w następnym etapie.

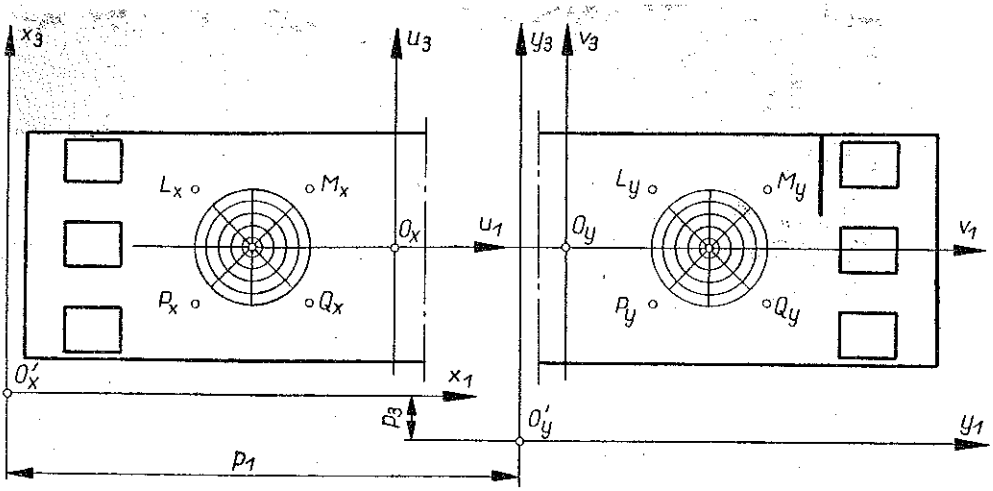


Rys. 18

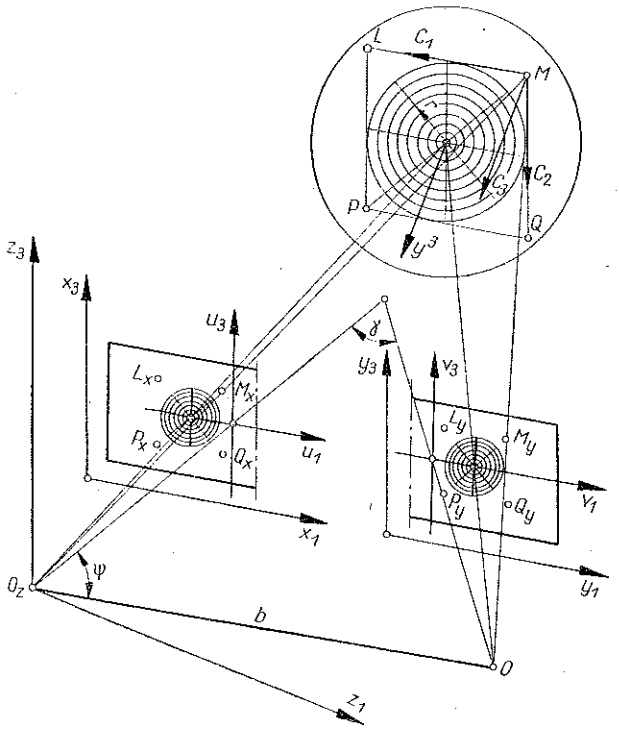
Obserwacja na stecometrze negatywu rozciętego pozwoliła na pomiar we współrzędnych stecometru x_i i y_i zdjęcia lewego i prawego (rys. 19), mianowicie współrzędnych x_1, y_3 oraz «paralaksę» p_1 w kierunku y_1 i «paralaksę» p_3 w kierunku x_3. Pozostałe współrzędne określa się z zależności:

$$x_3 = y_3 - p_3\,, \qquad y_1 = x_1 - p_1\,. \tag{11.1}$$

Pomiary te wykonano dla 10 klatek filmu obrazujących przebieg procesu deformacji powłoki i dla 37 punktów powłoki wyznaczonych siatką parametryczną na każdej klatce.



Rys. 19



Rys. 20

Znajomość otrzymanych wyników pomiarowych oraz elementów orientacji zewnętrznej układu optycznego, tj. bazy $b = 755{,}6$ mm; odległości obrazu $f = 45{,}8$ mm; kąta paralaktycznego $\gamma = 37°03'$ (rys. 20), jak również różnic współrzędnych stecometru Δx_i i Δy_i punktów bazowych M_x, Q_x oraz L_y, P_y i fikcyjnych punktów O_x i O_y, odpowiadającym początkom układów współrzędnych tłowych u_i

zdjęcia lewego i v_i zdjęcia prawego (rys. 19 i rys. 20), które obliczono z pomiarów zdjęcia nierozciętego — pozwala na obliczenie współrzędnych fotogrametrycznych z_i punktów powłoki.

Współrzędne fikcyjnych punktów w układzie współrzędnych stecometru x_i i y_i (rys. 19) mają postać

$$
\begin{aligned}
x_{i0_x} &= \frac{1}{2}(x_{iM}+x_{iQ}+\Delta x_{iM}+\Delta x_{iQ}), \qquad i = 1, 3, \\
y_{i0_y} &= \frac{1}{2}(y_{iL}+y_{iP}+\Delta y_{iL}+\Delta y_{iP}), \qquad i = 1, 3.
\end{aligned} \tag{11.2}
$$

Współrzędne tłowe u_i, v_i wybranych punktów powłoki określa translacja układu współrzędnych stecometru do układu współrzędnych tłowych, czyli

$$
\begin{aligned}
u_1 &= x_1 - x_{10_x}, \\
u_3 &= y_3 - p_3 - x_{30_x}, \\
v_1 &= x_1 - p_1 - y_{10_y}.
\end{aligned} \tag{11.3}
$$

Wtedy współrzędne przestrzenne fotogrametryczne z_i tych punktów (rys. 20) dla konwergentnego układu stereoskopowego określają zależności [10]

$$z_1 = Nu_1, \qquad z_2 = Nf, \qquad z_3 = Nu_3, \tag{11.4}$$

gdzie

$$N = \frac{b\left(f\cos\frac{\gamma}{2} + v_1 \sin\frac{\gamma}{2}\right)}{(f^2+u_1 v_1)\sin\gamma + f(u_1 - v_1)\cos\gamma}, \tag{11.5}$$

a stałe b, f i γ są parametrami orientacji zewnętrznej układu optycznego.

Współrzędne fotogrametryczne z_i punktów powłoki transformujemy do układu kartezjańskiego c_i związanego bezpośrednio z deformowaną powłoką tak dobranego, aby płaszczyzna $c_3 = 0$ była równoległa do płaskiej próbki przed deformacją. Warunek ten spełnia przyjęcie za płaszczyznę $c_3 = 0$ płaszczyzny wyznaczonej przez punkty bazowe M, L i Q (rys. 20) na pierścieniu dociskającym oraz początku układu w punkcie M. Przekształcenie to przyjmie postać

$$c_i = q_i + H_{ij} z_j, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{11.6}$$

gdzie q_i jest wektorem translacji początku układu M względem O_z, a H_{ij} macierzą przekształcenia. W postaci przyrostowej natomiast mamy

$$\Delta c_i = H_{ij}\,\Delta z_j, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{11.7}$$

przy czym dla dowolnego punktu

$$
\begin{aligned}
\Delta c_i &= c_i - c_{iM}, \qquad i = 1, 2, 3, \\
\Delta z_j &= z_j - z_{jM}, \qquad j = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{11.8}
$$

Oczywiście z założenia $c_{iM} = 0$, a współrzędne z_{jM} punktu M są obliczane z pomiaru filmu.

Pisząc w postaci rozwiniętej zależność (11.7) dla punktów bazowych L i Q oraz dla punktu środkowego powłoki S przed odkształceniem (rys. 20), otrzymujemy układ 9 równań liniowych z 9 niewiadomymi h_i dla $i = 1, 2, ..., 9$ w postaci

$$S_{ij} h_i - b_j = 0, \quad i, j = 1, 2, ..., 9, \tag{11.9}$$

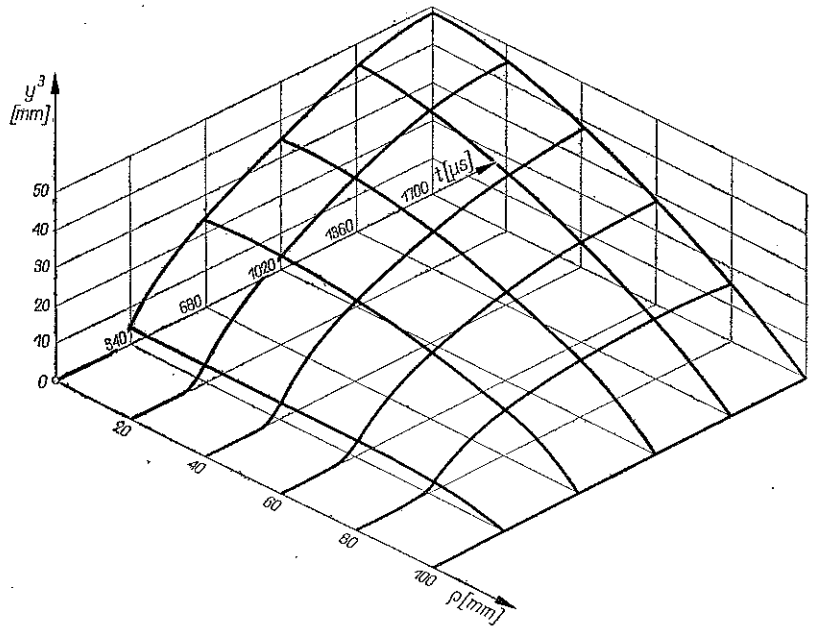
gdzie macierz S_{ij} i wektor b_j są dane z pomiarów filmu i z pomiarów punktów bazowych. Wtedy współczynniki macierzy H_{ij} obliczamy z zależności

$$H_{ij} = h_{i+3(j-1)} \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{11.10}$$

Współrzędne walcowe (r, ϑ, y^3) dla j-tego punktu powłoki wyrażają się zależnościami

$$r_j = \sqrt{(\Delta c_{10} - c_{1j})^2 + (\Delta c_{20} - c_{2j})^2}, \qquad y_j^3 = \Delta c_{3j} + 30, \tag{11.11}$$

gdzie przez c_{i0} oznaczono współrzędne punktu środkowego S powłoki, a przez c_{ij} współrzędne i-te punktu j powłoki na tym samym kadrze.



Rys. 21

W wyniku obliczeń przeprowadzonych dla 10 klatek filmu przy pomocy maszyny cyfrowej GIER otrzymano stablicowane funkcje $r(\varrho, t)$ i $y^3(\varrho, t)$. Na podstawie tych wyników opracowano graficznie zmianę kształtu powłoki w czasie procesu jej deformacji, co przedstawione jest na rys. 21.

Dla określenia rozkładu odkształceń obliczono rozkład współczynników wydłużeń w kierunkach głównych $\lambda_i(\varrho, t)$ dla $i = 1, 2, 3$ z definicji (5.1) w postaci przyrostowej, przy czym dla poszczególnych kadrów mamy

$$\Delta r_i = \begin{cases} r_{i+1} - r_i, & \text{jeśli} \quad i = 0, 1, \ldots, 8, \\ 100 - r_i, & \text{jeśli} \quad i = 9; \end{cases}$$

(11.12)

$$\Delta y_i^3 = \begin{cases} y_i^3 - y_{i+1}^3, & \text{jeśli} \quad i = 0, 1, \ldots, 8, \\ y_i^3 & \text{jeśli} \quad i = 9, \end{cases}$$

gdzie przez wskaźnik i oznaczono numer kolejny okręgu siatki parametrycznej na próbce. Oczywiście na podstawie $(3.5)_1$ mamy

$$\Delta \xi_i = \sqrt{\Delta r_i^2 + (\Delta y_i^3)^2}, \quad i = 0, 1, \ldots, 9. \tag{11.13}$$

Wtedy współczynniki wydłużenia przyjmują postać

$$\lambda_{1i} = \begin{cases} \dfrac{\Delta \xi}{\Delta \varrho_i}, & \text{jeśli} \quad i = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta \xi_i}{\Delta \varrho_i} + \dfrac{\Delta \xi_{i-1}}{\Delta \varrho_{i-1}}\right), & \text{jeśli} \quad i = 1, 2, \ldots, 9, \\ \dfrac{\Delta \xi_{i-1}}{\Delta \varrho_{i-1}}, & \text{jeśli} \quad i = 10; \end{cases}$$

(11.14)

$$\lambda_{2i} = \begin{cases} \lambda_{1i}, & \text{jeśli} \quad i = 0, \\ \dfrac{r_i}{\varrho_i}, & \text{jeśli} \quad i = 1, 2, \ldots, 10; \end{cases}$$

$$\lambda_{3i} = \frac{1}{\lambda_{1i}\lambda_{2i}}, \quad \text{jeśli} \quad i = 0, 1, \ldots, 10,$$

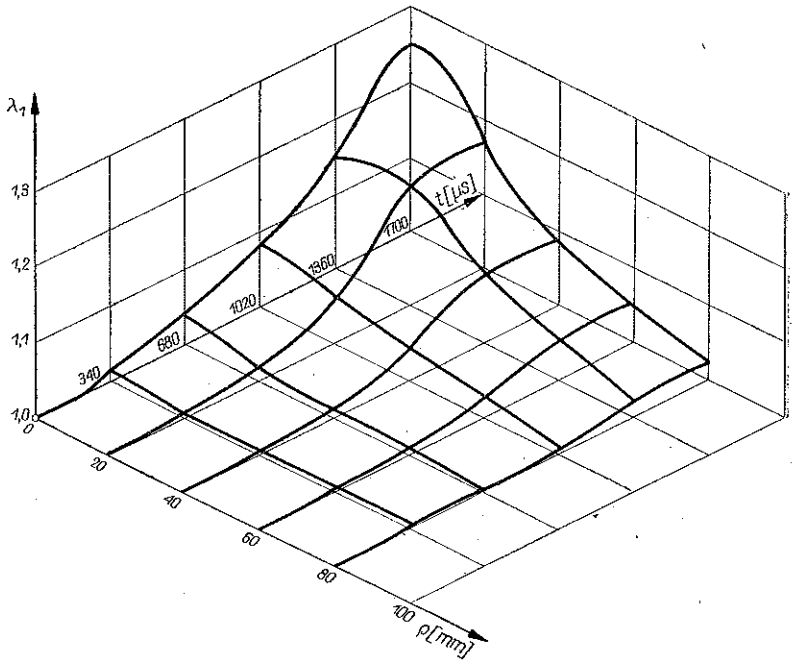
gdzie $\Delta \varrho_i = \varrho_i - \varrho_{i-1}$ otrzymano z pomiarów siatki parametrycznej przed odkształcaniem próbki. Wyniki obliczeń $\lambda_1(\varrho, t)$ i $\lambda_2(\varrho, t)$ przedstawione są graficznie na rys. 22 i 23.

Rozkłady składowych głównych tensora odkształcenia $\varepsilon_{ii}(\varrho, t)$ dla $i = 1, 2, 3$ określone zależnością (5.2), a obliczone z wyników pomiarowych przedstawione są na rys. 24, 25 i 26.

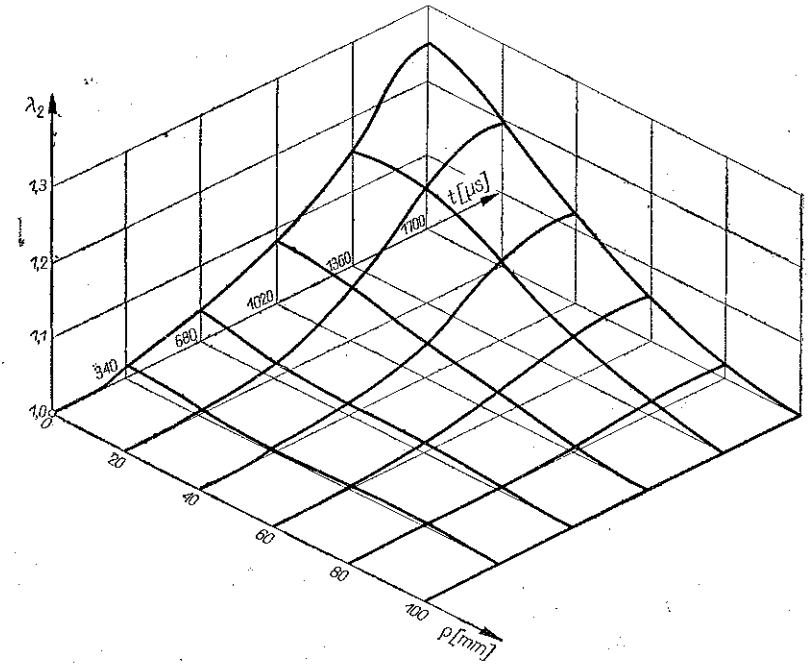
Różniczkując względem czasu (wzdłuż kolumn) funkcje λ_1 i λ_2 za pomocą pierwszego przybliżenia metody Stirlinga otrzymujemy dla $i = 1, 2$

$$\dot{\lambda}_{il} = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0}(\lambda_{i\,l+1} - 1), & \text{jeśli} \quad l = 2, \\ \dfrac{1}{2t_0}(\lambda_{i\,l+1} - \lambda_{i\,l-1}), & \text{jeśli} \quad l = 3, 4, \ldots, 9, \\ \dfrac{1}{t_0}(\lambda_{il} - \lambda_{i\,l-1}), & \text{jeśli} \quad l = 10, \end{cases} \tag{11.15}$$

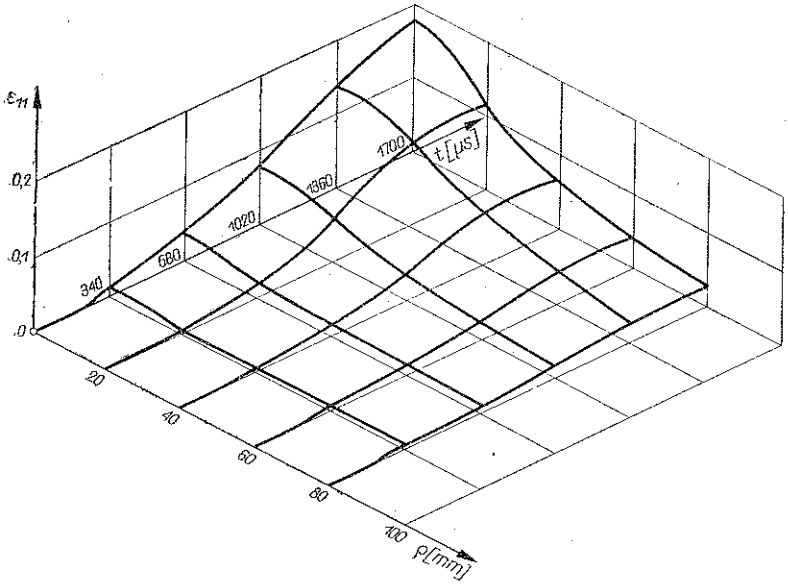
gdzie $t_0 = 1{,}70455 \cdot 10^{-4}$ s jest przyrostem czasowym obliczonym z częstotliwości fotografowania. Wtedy rozkład składowych tensora prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}_{ii}(\varrho, t)$ dla $i = 1, 2$ obliczono na podstawie zależności (5.4) oraz dla $i = 3$ na podstawie zależności $(5.6)_3$. Wyniki tych obliczeń przedstawione są na rys. 27, 28 i 29.


λ1
1,3
1,2
1,1
1,0
0
20
40
60
80
100
ρ[mm]
t[μs]
340
680
1020
1360
1700

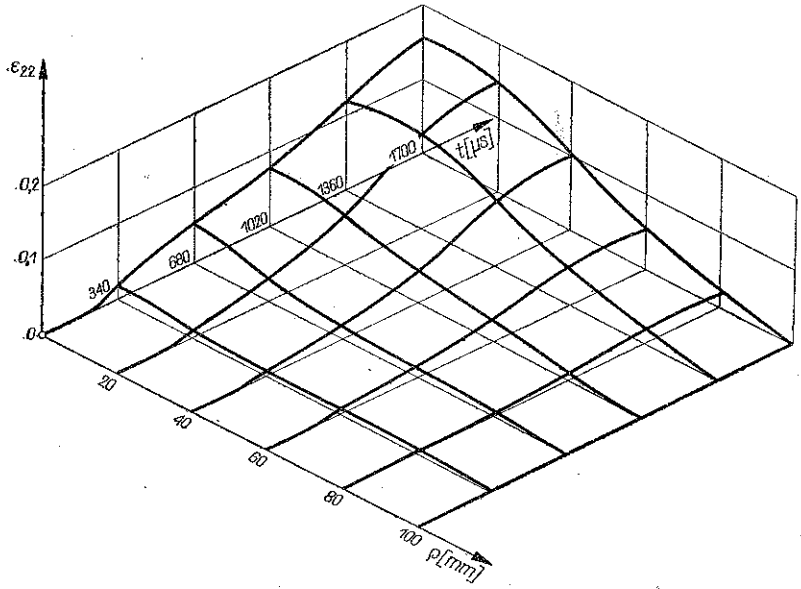
Rys. 22


λ2
1,3
1,2
1,1
1,0
0
20
40
60
80
100
ρ[mm]
t[μs]
340
680
1020
1360
1700

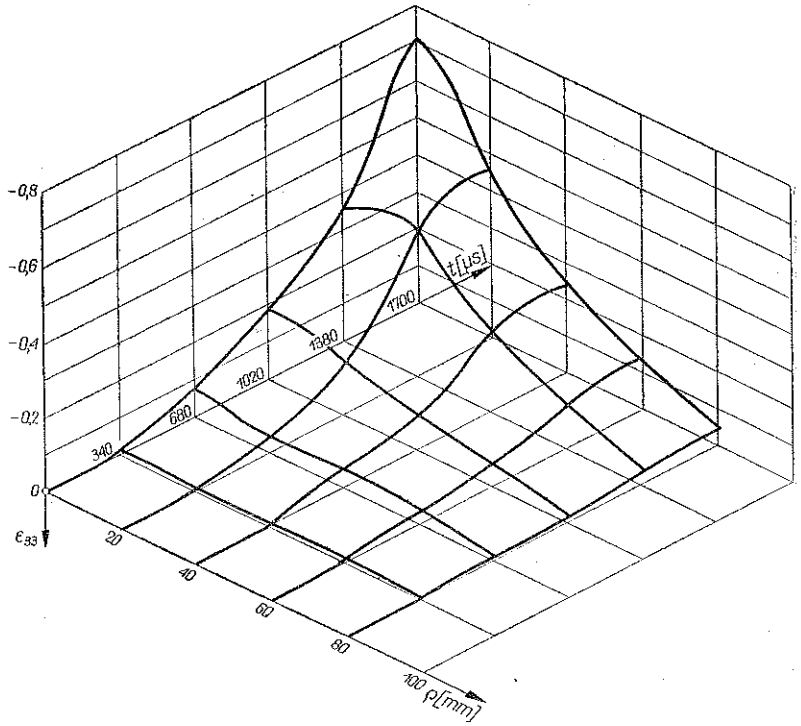
Rys. 23


ε_{11}
0,2
0,1
0
340
680
1020
1360
1700
t [μs]
20
40
60
80
100
p [mm]

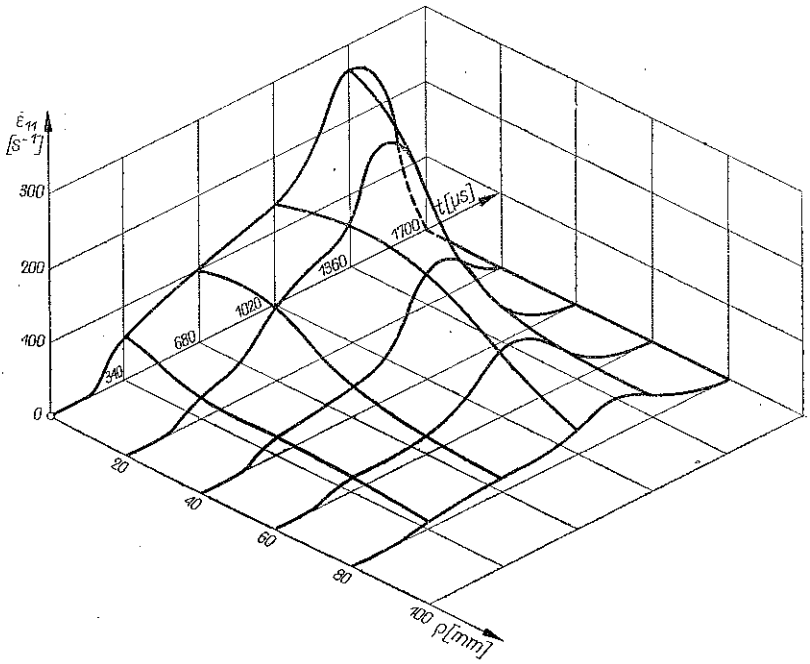
Rys. 24


ε_{22}
0,2
0,1
0
340
680
1020
1360
1700
t [μs]
20
40
60
80
100
p [mm]

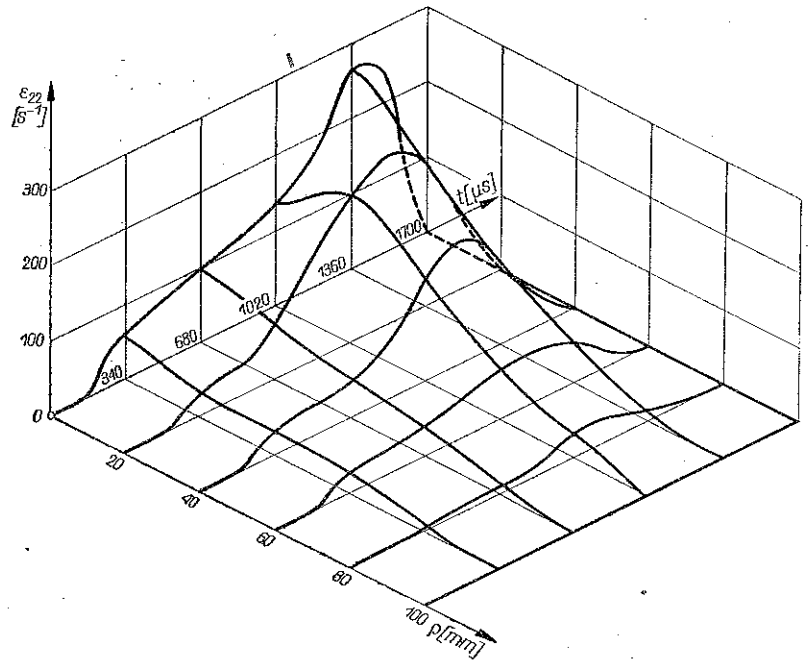
Rys. 25


-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
ε_{33}
340
680
1020
1360
1700
t[μs]
20
40
60
80
100 ρ[mm]

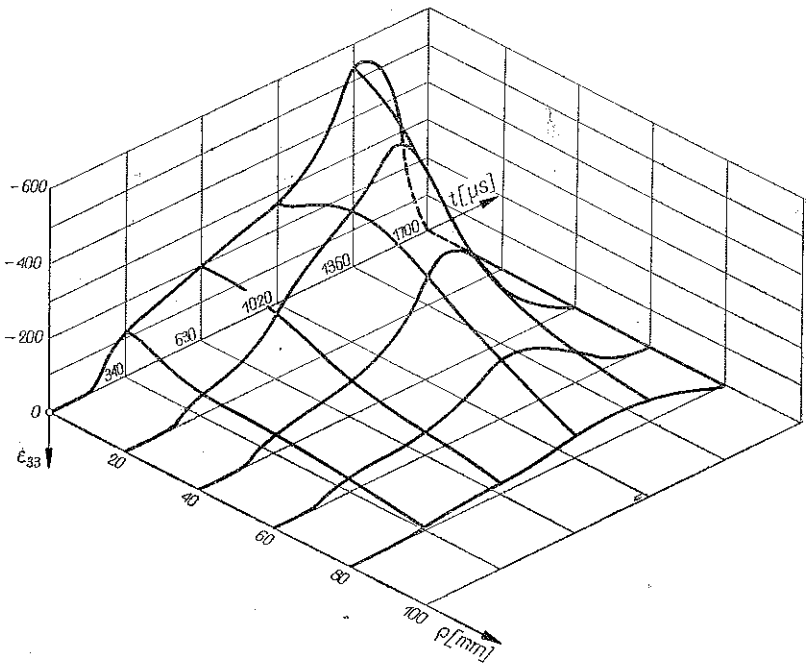
Rys. 26


$\dot{\varepsilon}_{11}$ [s⁻¹]
300
200
100
0
340
680
1020
1360
1700
t[μs]
20
40
60
80
100 ρ[mm]

Rys. 27


ε_{22} [s^{-1}]
300
200
100
0
340
680
1020
1360
1700
t[μs]
20
40
60
80
100 ρ[mm]

Rys. 28

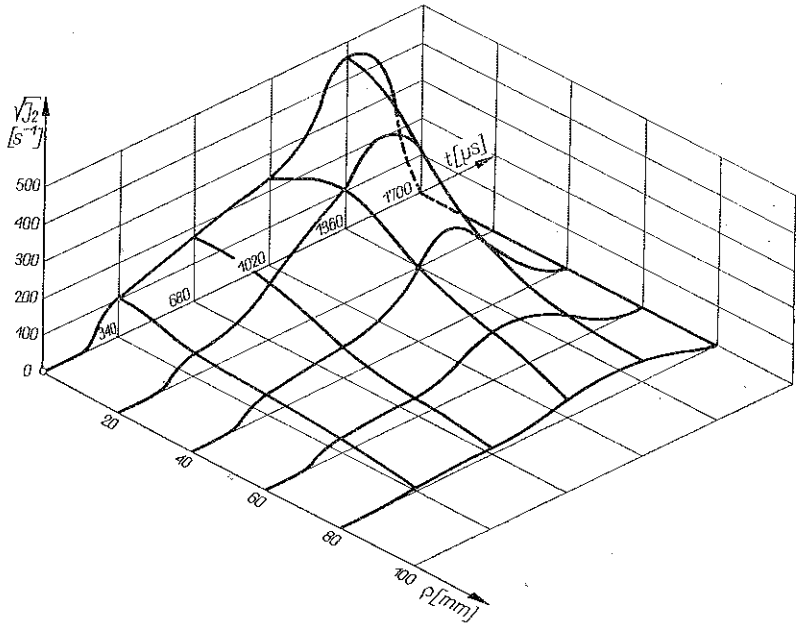

-600
-400
-200
0
$\dot{\varepsilon}_{33}$
340
680
1020
1360
1700
t[μs]
20
40
60
80
100 ρ[mm]

Rys. 29

Rozkład pierwiastka drugiego niezmiennika dewiatora prędkości odkształcenia określony za pomocą wzoru

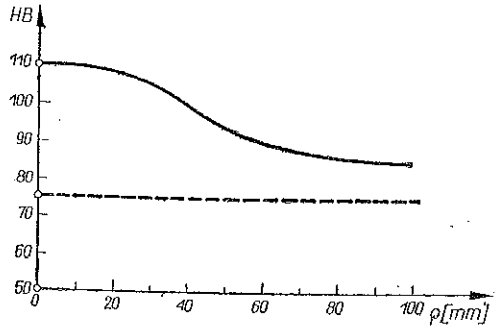
$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}_{22}} \tag{11.16}$$

jest przedstawiony na rys. 30.



Rys. 30

Pomiary fotogrametryczne obarczone są błędami wynikającymi z błędów zdjęcia fotograficznego, jego pomiaru i błędu określenia odległości punktów bazowych. W wyniku analizy [5] zależności (11.4) i (11.5) otrzymujemy błędy bezwzględne współrzędnych fotogrametrycznych z_i popełniane przy tego rodzaju pomiarach $\delta z_1 = \pm 0{,}51$ mm, $\delta z_2 = \pm 0{,}67$ mm, $\delta z_3 = 0{,}50$ mm, jako błędy określania kształtu próbki w trakcie procesu jej deformacji.



Rys. 31

12. Pomiary twardości

Pomiary twardości materiału próbki przed i po odkształceniu mierzone w skali RF i przeliczone na skalę HB przedstawione są na rys. 31, z którego widać wyraźny wzrost twardości, szczególnie w środkowym obszarze próbki.

13. Uwagi i wnioski końcowe

W procesach dynamicznego kształtowania elementów z blach istotną rolę odgrywa obciążenie pochodzące od impulsu ciśnieniowego wywołanego falą uderzeniową, której źródłem może być detonacja ładunku wybuchowego lub elektryczne wyładowania iskrowe w wodzie lub też od impulsu pola magnetycznego. Pomiar tego obciążenia bezpośrednio na powierzchni kształtowanego elementu sprawia wiele trudności natury technicznej. Trudności te wynikają z faktu, iż powłoka, a więc i czujnik pomiarowy na jej powierzchni, w trakcie pomiaru znajdują się w ruchu doznając bardzo dużych przyspieszeń rzędu $10^7\ ms^{-2}$, przy czym sam czujnik wraz z przewodami doprowadzającymi jest całkowicie zanurzony w wodzie, sama zaś powłoka nie tylko się odkształca, ale również zmienia swój kształt w czasie rzędu 10^{-3} s. Towarzyszące temu procesowi prędkości przemieszczenia rzędu 100 ms^{-1} i duże prędkości odkształcenia rzędu $500\ s^{-1}$ wpływają istotnie na sam proces i utrudniają ich pomiar.

Opracowane i wykorzystane metody pomiarów wykazały pełną przydatność w przeprowadzonych badaniach i mogą być wykorzystane do badań innych podobnie krótkotrwałych procesów.

Otrzymane wyniki pomiarów obciążenia i przemieszczenia zestawione razem pozwalają na prześledzenie całego procesu wybuchowego tłoczenia na przykładzie wypuklania cienkiej płyty kołowej. Przebieg ten, podzielony na kilka faz, jest następujący:

1) fala uderzeniowa dochodząca do płyty odbija się od niej, ciśnienie na czole fali spiętrza się na skutek większej gęstości płyty; na skutek działania tego ciśnienia płyta doznaje dużych przyspieszeń, co przejawia się osiągnięciem maksymalnej prędkości w bardzo krótkim czasie rzędu 20 μs;

2) na skutek ruchu płyty ciśnienie wywierane na nią gwałtownie spada do wartości mniejszej niż to wynika z oporów plastycznego płynięcia, na co wskazuje znaczne, ujemne przyspieszenie, jakiego w tej fazie procesu doznaje odkształcona powłoka; płyta przyjmuje kształt powłoki obrotowej;

3) spadek ciśnienia do ciśnienia atmosferycznego i związane z tym lekkie zahamowanie procesu płynięcia można zauważyć zarówno przy pomiarach metodą fotoelektryczną (rys. 14), jak i stereofotogrametryczną (rys. 21);

4) następuje dalsze odkształcanie powłoki pod wpływem sił bezwładności;

5) proces kończy się tłumionymi drganiami powłoki, których nie badano.

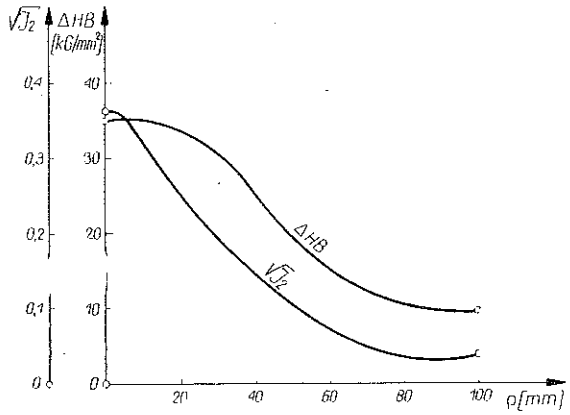
Z zestawienia obciążenia rys. 6 i przemieszczenia na rys. 14 i 21 wynika, iż wpływ sił bezwładności na początku procesu i przy jego zakończeniu ma istotne znaczenie i przy analizie teoretycznej tego rodzaju procesów nie można ich pomijać.

Wyniki pomiarów odkształceń (rys. 32) i prędkości odkształceń (rys. 30) w porównaniu z wynikami J. D. CAMPBELLA i jego współpracowników [11 i 13] wskazują, iż odkształcenia sprężyste w stosunku do odkształceń plastycznych są małe i można je pominąć, duży zaś wpływ na przebieg procesu mają efekty lepkie. Wynika stąd, że dla miękkiej stali w tego rodzaju procesach przyjęcie modelu sztywno/lepko-idealnie plastycznego jest w dostatecznym stopniu uzasadnione.

Wzrost twardości próbki po odkształceniu (rys. 31) świadczy o występowaniu wzmocnienia materiału. Wyraźnie to widać na rys. 32 w porównaniu z rozkładem odkształceń końcowych, reprezentowanym przez drugi niezmiennik odkształcenia,

$$\sqrt{I_2} = \sqrt{\varepsilon_{H1}^2 + \varepsilon_{H2}^2 + \varepsilon_{H1}\varepsilon_{H2}}\,, \tag{13.1}$$

gdzie ε_{Hi} dla $i = 1, 2$ jest określone przez wzór (5.3). Przy ściślejszej analizie należałoby uwzględnić to wzmocnienie w związkach fizykalnych.



Rys. 32

W ramach proponowanej teorii i dla odkształceń skończonych problem daje się opisać układem równań różniczkowych cząstkowych, który przy postawionych warunkach brzegowych i początkowych nadaje się do rozwiązania numerycznego przy użyciu maszyny cyfrowej.

Literatura cytowana w tekście

1. J. E. Adkins, R. S. Rivlin, *Large elastic deformations of isotropic materials*, IX. *The deformations of thin shells*, Phil. Trans., A, **244** (1952), 505–531.
2. Д. И. Агейкин, Е. Н. Костина, Н. Н. Кузнецова, *Датчики контроля и регулирования*, Изд. «Машиностроение», Москва 1965.
3. М. А. Анучин, О. Д. Антоненков, Г. И. Попков, В. В. Дубинин, С. М. Носиков, *К вопросу о движении заготовки при свободной штамповке взрывом*, Изв. Высших Учеб. Зав. «Машиностроение», 6, 1963, 155–161.
4. М. А. Анучин, Л. П. Орленко, В. В. Дубинин, А. Ф. Кулагин, С. М. Носиков, *Моделирование процесса взрывной штамповки*, Изв. Высших Учеб. Зав. «Машиностроение», 5, 1963, 218–226.
5. T. Bednarski, *Plastyczne wypuklanie cienkiej płyty kołowej obciążonej impulsem ciśnienia*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1967.
6. P. W. Bridgman, *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*, New York-Toronto-London 1952.
7. P. W. Bridgman, *The Physics of high Pressure*, London 1952.
8. D. S. Clark, P. E. Duwez, *The influence of strain rate on some tensile properties of steel*, Proc. Amer. Soc. Test. Mat., **50** (1950), 560–575.

9. S. E. Corbett, A. W. Bicker, *Some small-scale experiments in explosive forming*, Sheet Metal Industries, 424, **39** (1962).

10. А. С. Дубовик, *Фотографическая регистрация быстропротекающих процессов*, «Издательство Наука», Москва 1964.

11. J. Harding, E. O. Wood, J. D. Campbell, *Tensile testing of materials at impact rates of strain*, J. Mech. Engin. Sci., **2** (1960), 88–96.

12. G. E. Hudson, *A theory of the dynamic plastic deformation of a thin diaphragm*, J. Appl. Phys., 1, **22** (1951), 1–11.

13. Ю. С. Яковлев, *Гидродинамика взрыва*, Судпромгиз, Ленинград 1961.

14. K. J. Marsh, J. D. Campbell, *The effect of strain rate of the post-yield flow mild steel*, J. Mech. Phys. Sol., 11, **11** (1963), 49–63.

15. P. Perzyna, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., 4, **20** (1963), 331.

16. P. Perzyna, *The constitutive equations for work-hardenong and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Probl., 3, **4** (1963), 281–290.

17. P. Perzyna, *The study of the dynamic behaviour of rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., 1, **15** (1963), 113–129.

18. P. Perzyna, W. Wojno, *On the constitutive equations of elastic/viscoplastic materials at finite strain*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 85–100.

19. Р. В. Пихтовников, В. И. Завьялова, *Штамповка листового металла взрывом*, Изд. «Машиностроение», Москва 1964.

20. J. S. Rienehart, J. Pearson, *Explosive working of metals*, Pergamon Press, London 1963.

21. Б. А. Щеглов, *Формообразование осесимметрических деталей из листового металла в условиях импульсного нагружения*, Пластическое формоизменение металлов, Изд. «Наука», Москва 1967.

22. F. W. Travis, W. Johnson, *Experiments in the dynamic deformation of clamped circular sheets of various metals subject to an underwater explosive charge*, Sheet Metal Industries, 423, **39** (1962), 456–474.

23. D. W. Woo, *The analysis of axisymmetric forming of sheet metal and the hydrostatic building process*, Int. J. Mech. Sci., 4, **6** (1964), 303–317.

24. М. К. Жоховский, В. Н. Разумихин, *Кривая плавления рути до* 20 000 кг/см² *как шкала высоких давлений*, Измерит. техн., 4, 1957, 43–47.

25. М. К. Жоховский, В. Н. Разумихин, Е. В. Золовых, Л. Л. Бурова, *Термодинамическая шкала высоких давлений до* 25 000 кг/см², Измерит. техн., 11, 1959, 26–29.

Резюме

ВЗРЫВНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ

В статье, дается теоретическая экспериментальная разработка процесса взрывного формирования тонкой круговой пластинки, закрепленной по окружности. Пластинка загружена импульсом давления, приложенного на поверхности образца, вследствие детонации взрывчатого вещества в воде. Теоретическое описание вопроса проводилось в рамках безмоментной теории оболочек для конечных деформаций и для жестко-взяко пластического материала. В результате получена система дифференциальных уравнений с частными производными и граничными условиями. В экспериментальной части работы дается описание отображения процесса и описание измерительных методов, полученных при использовании этих методов измерительных результатов, а именно распределения нагрузки, распределения перемещений и скорости деформации во время процесса деформации оболочки.

Summary

PLASTIC CURVATURE CREATION OF A THIN CIRCULAR PLATE BY APPLYING A PRESSURE IMPULSE

This paper is devoted to a theoretical and experimental analysis of the plastic curvature creation process of a thin circular plate clamped along its edge and loaded by a pressure impulse applied to the surface of the sample and produced by firing an explosive charge in water. The theoretical description of the problem is founded on the membrane theory of shells in the case of finite strain and a rigid-viscoplastic material. As a result a set of partial differential equations are obtained with the relevent boundary conditions. The experimental part of the work contains a description of the reproduction of the process, the measurement method and the results obtained. The latter concern the distribution of the load displacement strain and strain rate in the course of the straining process of the shell.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
KATEDRA TECHNOLOGII MECHANICZNEJ OGÓLNEJ I LOTNICZEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 czerwca 1968 r.