

O PEWNYM ZAGADNIENIU ROZKŁADÓW TEMPERATURY
PRZY STOCHASTYCZNYCH ŹRÓDŁACH CIEPŁA W PRĘCIE

TADEUSZ CHMIELNIAK, ERNEST CZOGAŁA (GLIWICE)

Metoda korelacyjna, polegająca na określeniu momentów odpowiednich rzędów wielkości charakteryzowanych, znalazła dotąd szerokie zastosowanie przy analizie wielorakich układów automatycznych [3, 4 i 7], mechanicznych [1, 2, 5 i 6] itd. Celem niniejszej pracy jest zobrazowanie możliwości zastosowania tej metody do analizy zagadnień z zakresu ruchu ciepła.

Dla tej ilustracji wybrano analizę stosunkowo prostego procesu stochastycznego w układzie pręt-otoczenie, określonego przez założenie, że w pręcie są źródła ciepła, dające się opisać stacjonarnymi funkcjami losowymi. Założono przy tym stałość współczynników określających właściwości przyjętego układu (λ, ρ, c, α) oraz jednorodne warunki początkowe i brzegowe. Obliczeń szczegółowych niektórych przypadków dokonano na maszynie cyfrowej.

1. Zagadnienie brzegowe

Podstawą naszych rozważań będzie jednowymiarowe równanie różniczkowe przewodnictwa ciepła w pręcie przy założeniu nieskończonej prędkości rozchodzenia się ciepła [8]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f^*(x, t)$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$(1.2) \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

gdzie $u(x, t)$ oznacza temperaturę pręta w funkcji współrzędnej x i czasu t , $a^2 = \lambda/c\rho$ współczynnik dyfuzji termicznej oraz $f^*(x, t)$ gęstość źródeł ciepła, będącą sumą gęstości źródeł wewnętrznych $f(x, t)$ i zewnętrznych, tj.

$$(1.3) \quad f^*(x, t) = f(x, t) - \frac{\alpha}{c\rho} (u - \Theta),$$

przy czym α oznacza współczynnik wnikania ciepła, a Θ temperaturę otoczenia.

Po podstawieniu (1.3) do (1.1) i uporządkowaniu otrzymujemy

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{c\varrho} u = \frac{a}{c\varrho} \Theta + f.$$

Rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (1.2) i (1.4) dla naszego modelu jest funkcja

$$(1.5) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

gdzie funkcja $u_k(t)$ jest określona przez równania różniczkowe

$$(1.6) \quad \dot{u}_k(t) + \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] u_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{a}{c\varrho} \Theta + f \right) dx.$$

Równania (1.6) mają rozwiązania określone przez formułę Duhamela:

$$(1.7) \quad u_k(t) = \int_{-\infty}^t h_k(t-\tau) Q_k(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$Q_k(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{a}{c\varrho} \Theta + f \right) dx$$

oraz

$$(1.8) \quad h_k(\tau) = \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] e^{-\tau \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right]} H(\tau).$$

2. Analiza korelacyjna

W rozpatrywanym zagadnieniu założono, że intensywność źródeł jest stacjonarną przypadkową, ergodyczną funkcją czasu o postaci

$$(2.1) \quad f^*(x, t) = \varphi_1(x) \varphi_1(t) + \varphi_2(x) \varphi_2(t),$$

gdzie $\varphi_i(x)$ są danymi deterministycznymi funkcjami współrzędnej x , a $\varphi_i(t)$ są losowymi funkcjami czasu t .

Dla funkcji φ_i o normalnym lub zbliżonym do normalnego rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa (do których będziemy się ograniczać) pełną charakterystykę procesów stochastycznych stanowi określenie wartości oczekiwanych oraz funkcji korelacyjnych i wzajemnych funkcji korelacyjnych.

Nie naruszając ogólności rozważań ze względu na liniowość zagadnienia będziemy przyjmować, że wartości średnie φ_i są równe zeru ($m_{\varphi_i}^* = 0$), czyli także

$$(2.2) \quad m_{u_k}(t) = \int_0^t h(t-\tau) m_{\varphi_i}^*(\tau) d\tau = 0.$$

Funkcje korelacyjne dla temperatury są następujące [2]:

$$(2.3) \quad K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_j(t_1 - \tau_1) h_k(t_2 - \tau_2) k_{Q_j Q_k}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Po wprowadzeniu gęstości spektralnych $S(\omega)$ z równania (2.3) otrzymamy

$$(2.4) \quad S_{u_j u_k}(\omega) = F_j(-i\omega) F_k(i\omega) S_{Q_j Q_k},$$

gdzie

$$(2.5) \quad F_j(i\omega) = \frac{1}{\left[\omega_i + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right]}.$$

Biorąc pod uwagę (2.4) i (2.5) funkcje korelacji napiszemy w postaci związku

$$(2.6) \quad K_{u_j u_k}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{Q_j Q_k} e^{i\omega\tau} d\omega}{\left[\omega_i + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \left[-i\omega + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]}.$$

Gęstość spektralną źródeł $S_{Q_j Q_k}$ przy uwzględnieniu równości (2.1) określimy formułą

$$(2.7) \quad S_{Q_j Q_k}(\omega) = b_{j_1} b_{k_1} S_1(\omega) + b_{j_2} b_{k_2} S_2(\omega),$$

gdzie $S_i(\omega)$ jest gęstością spektralną losowych funkcji czasu $\varphi_i(t)$, a

$$(2.8) \quad b_{k_i} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_i(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Podstawiając (2.7) i (2.8) do (2.6) otrzymujemy funkcję korelacji

$$(2.9) \quad K_{u_j u_k}(\tau) = \frac{2}{l^2} \sum_{r=1}^l \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \times \\ \times \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_r(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\left[\omega_i + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \left[-\omega_i + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]}.$$

W analizie korelacyjnej bardzo ważną rolę odgrywają funkcje korelacji dla $t_1 = t_2$ ($\tau = t_2 - t_1 = 0$), za pomocą tych wielkości bowiem określamy średnie kwadratowe odchylenia rozpatrywanych przebiegów. W naszym szczególnym przypadku otrzymujemy

$$(2.10) \quad \overline{u^2(x, t)} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{u_j u_k}(0) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ = \frac{2}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^l \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_r(\omega) d\omega}{\left[\omega_i + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \left[-\omega_i + \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l}.$$

3. Wyznaczanie funkcji korelacyjnych i wariancji dla szczególnych postaci funkcji $f^*(x, t)$

1. Intensywność obu źródeł jest scharakteryzowana przez stałą gęstość widmową («biały szum») $S_i(\omega) = C_i$. W tym przypadku funkcje korelacyjne i funkcje wzajemnej korelacji przyjmą postać

$$(3.1) \quad K_{u_j u_k}(\tau) = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{r=1}^2 \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\ C_r e^{-\tau \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right]} \times \frac{1}{\left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] + \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]}.$$

Zgodnie z (2.10) i (3.1) dla wariancji $u(x, t)$ mamy

$$(3.2) \quad \overline{u^2(x, t)} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^2 \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \times \\ \times \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \frac{C_r}{\left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] + \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]} \sin \frac{j\pi x}{l}.$$

Funkcje $\psi_r(x)$ we wzorach (3.1) i (3.2) zgodnie z założeniem (2.1) mogą przyjmować dowolne wartości współrzędnej x . Jeżeli dla przykładu przyjmiemy funkcję $\psi_r(x)$ w postaci

$$\sum_{p=1}^n \psi_{rp} \delta(x - \eta_p),$$

to wyrażenia (3.1) i (3.2) przyjmą postać

$$(3.3) \quad K_{u_j u_k}(\tau) = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{r=1}^2 \sum_{p=1}^n \psi_{rp}^2 \sin \frac{k\pi \eta_p}{l} \sin \frac{j\pi \eta_p}{l} \times \\ C_r e^{-\tau \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right]} \times \frac{1}{\left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] + \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]}.$$

$$\overline{u^2(x, t)} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^2 \sum_{p=1}^n \psi_{rp}^2 \sin \frac{k\pi \eta_p}{l} \sin \frac{j\pi \eta_p}{l} \times \\ \times \frac{C_r}{\left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] + \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

2. Cała moc źródeł jest skupiona wokół dyskretnej wielkości v_q . Gęstość widmową $S(\omega)$ przy tym założeniu możemy napisać w postaci

$$(3.4) \quad S_r(\omega) = \sum_{q=1}^m C_q \delta(\omega - v_q).$$

Przypadek ten jest pewnym przeciwieństwem procesu scharakteryzowanego przez «biały szum». Biorąc pod uwagę (2.9), (2.10) i (3.4), funkcje korelacji oraz wariancję u określimy za pomocą wzoru

$$\begin{aligned}
 K_{u_j, u_k}(\tau) &= \frac{2}{l^2} \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^2 \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\
 &\quad \times \frac{C_q e^{i v_q \tau}}{\left[v_q i + \frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \left[-v_q i + \frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]}, \\
 \overline{u^2(x, t)} &= \frac{2}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^2 \sum_{q=1}^m \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\
 &\quad \times \frac{C_q}{\left[v_q i + \frac{\alpha}{c\varrho} + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \left[-v_q i + \frac{\alpha}{c\varrho} + \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Wyrażenie (3.5) przybiera wartości rzeczywiste tylko dla $k = j$ (brak korelacji wzajemnych). Jest to oczywiste, jeżeli przyjrzymy się formie przyjętej przez nas funkcji gęstości widmowej $S(\omega)$.

3. Gęstość widmowa intensywności źródeł jest podana w postaci sumy

$$S_r(\omega) = \sum_{s=1}^{\mu} \frac{a_{rs}}{\omega^2 + \lambda_s^2}.$$

Dla funkcji korelacji i wariancji u mamy teraz

$$\begin{aligned}
 K_{u_j, u_k}(\tau) &= \frac{2}{l^2} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^{\mu} \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\
 &\quad \times \frac{\pi a_{sr} e^{-\lambda_s \tau}}{\left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 - \lambda_s \right] \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 + \lambda_s \right] \lambda_s} \\
 &\quad \times \frac{2\pi a_{rs} e^{-\left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \tau}}{\left[2 \frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + \lambda_s \right] \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 - \lambda_s \right]}, \\
 \overline{u^2(x, t)} &= \frac{2}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^{\mu} \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\
 &\quad \times \frac{\pi a_{sr}}{\left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 - \lambda_s \right] \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 + \lambda_s \right] \lambda_s}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

$$(3.6) \quad \text{c. d.} \quad \frac{2\pi a_{sr}}{\left[2 \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right] \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + \lambda_s \right] \left[\frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 - \lambda_s \right]} \times \\ \times \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l}.$$

4. Funkcję spektralną można aproksymować w sposób następujący:

$$S_r(\omega) = \frac{2}{\pi} C_r \frac{\gamma(\gamma^2 + \beta^2)}{[(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}.$$

Postępując podobnie jak poprzednio otrzymujemy dla funkcji korelacyjnych oraz dla wariancji u wyrażenia:

$$(3.7) \quad K_{u_j u_k}(\tau) = \frac{8}{l^2} \sum_{r=1}^2 C_r \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\ \times \{ \gamma(\gamma^2 + \beta^2) [e^{-\gamma\tau} (\cos 2\beta\tau [4\beta(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j) - 8\gamma^2\beta - 8\gamma\beta(A_j - A_k)] + \\ + \sin 2\beta\tau [16\beta^2\gamma + 2\gamma(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j) + 2(A_j - A_k)(4\beta^2 - \gamma^2)]) + e^{-A_k\tau} : \\ : 16\gamma\beta ([4\beta^2 + \gamma^2] [(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j)^2 + 16\gamma^2\beta^2] + (A_j - A_k)^2 [(4\beta^2 - \gamma^2) + \\ + 16\gamma^2\beta^2] + 2\gamma(A_j - A_k) [8\beta^2 A_k A_j + (4\beta^2 - \gamma^2)(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j) + \\ + 16\gamma^2\beta^2]) + (A_j + A_k) [(A_k^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 A_k^2]] \},$$

$$(3.8) \quad \overline{u^2(x, t)} = \frac{8}{l^2} \sum_{r=1}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_r \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \int_0^l \psi_r(x) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \times \\ \times \{ \gamma(\gamma^2 + \beta^2) [4\beta(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j) + 8\gamma^2\beta - 8\gamma\beta(A_j - A_k) + 1 : 16\gamma\beta \times \\ \times ([4\beta^2 + \gamma^2] [(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j)^2 + 16\gamma^2\beta^2] + (A_j - A_k)^2 [(4\beta^2 - \gamma^2)^2 + \\ + 16\gamma^2\beta^2] - 2\gamma(A_j - A_k) [8\beta^2 A_k A_j + (4\beta^2 - \gamma^2)(4\beta^2 - \gamma^2 + A_k A_j) + \\ + 16\gamma^2\beta^2]) + (A_j + A_k) [(A_k^2 + \gamma^2 + \beta^2)^2 - 4\gamma^2 A_k^2]] \} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l},$$

$$A_k = \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2$$

$$A_j = \frac{a}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2.$$

Przedstawione w punktach 1-4 zależności dla funkcji korelacyjnych i wariancji otrzymano przy założeniu, że zarówno źródło zewnętrzne jak i wewnętrzne są scharakteryzowane gęstościami spektralnymi jednakowego typu. Niemniej jednak na podstawie przedstawionych wyżej rozważań można otrzymać formuły funkcji korelacyjnych, wariancji dla dowolnych liniowych kombinacji gęstości widmowych intensywności źródeł.

4. Wyznaczanie funkcji korelacyjnych i wariancji dla strumieni ciepła przewodzonego oraz przyjmowanego przez otoczenie

Opierając się na założeniu, że źródła zewnętrzne są nieskorelowane ze źródłami wewnętrznymi oraz na znanych własnościach funkcji korelacyjnych, otrzymamy w prosty sposób wyrażenie dla funkcji korelacyjnej strumienia przyjmowanego przez otoczenie:

$$(4.1) \quad K_{q_j, q_k}(\tau) = \alpha^2 [K_{u_j, u_k} + K_{\Theta_j, \Theta_k}].$$

Analogiczną metodą otrzymujemy formułę dla wariancji strumienia ciepła przyjmowanego:

$$(4.2) \quad \overline{q^2(x, t)} = \alpha^2 [\overline{u^2(x, t)} + \overline{\Theta^2(x, t)}].$$

Następnie wykorzystując równanie przewodzenia ciepła $q = -\lambda(\partial u/\partial x)$ możemy, o czym łatwo się przekonać, dla funkcji korelacyjnej i wariancji strumienia q napisać związki:

$$(4.3) \quad \overline{K_{q_j, q_k}(\tau)} = K_{u_j, u_k}(\tau),$$

$$\overline{q^2(x, t)} = \frac{\lambda^2 \pi^2}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{u_j, u_k}(0) \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{j\pi x}{l}.$$

Występujące w wyrażeniach (4.1), (4.2) i (4.3) wartości funkcji korelacyjnych przybierają odpowiednie wartości określone w punktach 1–4 lub wartości dowolnych ich kombinacji liniowych w zależności od tego, jaką formułą dla $S(\omega)$ aproksymować będziemy badany rzeczywisty proces stochastyczny.

5. Przykład

Drogę szczegółowego postępowania przy wyznaczaniu wariancji temperatury zilustrujemy na przykładzie, w którym założymy stałą gęstość widmową obu źródeł dla różnych położań. Ustalmy, że: 1) wartości oczekiwane wszystkich procesów równe są zeru, 2) znane są wielkości charakteryzujące układ ($l = \pi$, $a^2 = \lambda/c\varrho \approx a/c\varrho$).

Rozpatrzmy kilka postaci funkcji $\psi(x)$. Niechaj

$$(5.1) \quad \text{a) } \psi_1(x) = \sum_{p=1}^3 \psi_p \delta(x - \eta_p), \quad \psi_2(x) = 0.$$

Przy powyższych założeniach równanie (3.3) przyjmie postać

$$(5.2) \quad \overline{u^2(x, t)} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^3 C_1 \psi_{1p} \sin \frac{k\pi \eta_p}{l} \sin \frac{j\pi \eta_p}{l} \times$$

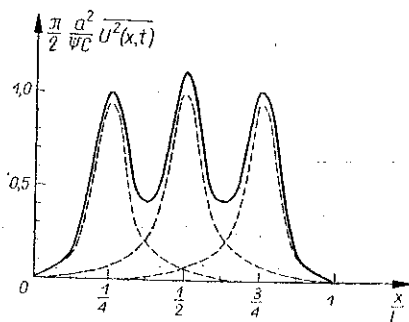
$$\times \frac{1}{\left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] + \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Wartości numeryczne (5.2) obliczone przy pomocy maszyny cyfrowej dla $\eta_p/l = 1/4, 1/2, 3/4$ ujęto w tablicy 1 i przedstawiono na rys. 1.

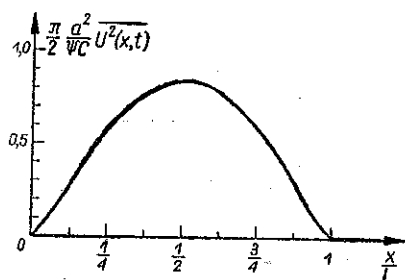
$$(5.3) \quad \text{b) } \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \psi = \text{const.}$$

Uwzględniając te założenia, $\overline{u^2(x, t)}$ uprościmy do postaci

$$(5.4) \quad \overline{u^2(x, t)} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \psi C \frac{1}{kj} \frac{[1 - (-1)^k][1 - (-1)^j] \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}}{\left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] + \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{j\pi}{l} \right)^2 \right]}$$



Rys. 1



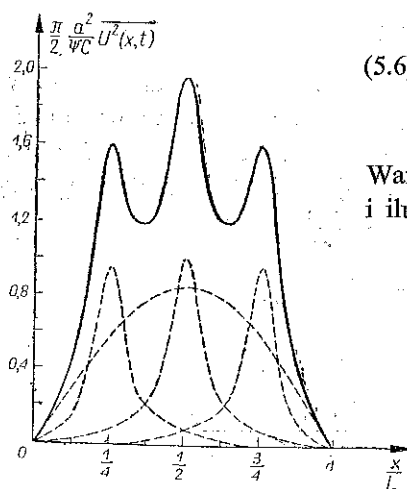
Rys. 2

Wartości liczbowe (5.3) przedstawia dla kilku wartości x/l tablica 2. Przebieg wariancji ilustruje rys. 2.

Dla funkcji

$$(5.5) \quad \text{c) } \psi_1(x) = \psi \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2(x) = 0$$

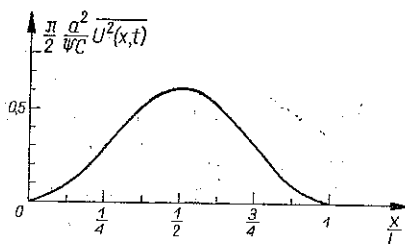
wyrażenie (3.2) przedstawia się po pewnych przekształceniach następująco:



Rys. 3

$$(5.6) \quad \overline{u^2(x, t)} = \frac{\pi}{2} C \psi \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{l}}{2 \left[\frac{\alpha}{c\varrho} + a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}$$

Wartości wyrażenia (5.6) przedstawia tablica 3 i ilustruje rys. 3.



Rys. 4

Dysponując szczegółowymi rozwiązaniami dla ustalonych a, β, γ można oczywiście podać wiele innych postaci rozwiązania dla $\overline{u^2(x, t)}$ ($S(\omega) = \text{const}$), utworzonych przez różne kombinacje liniowe rozwiązań (5.2), (5.4) i (5.6). Jedną z takich kombinacji przedstawiono na rys. 4.

Tablica 1

Wartości $\frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\psi_1 c_1} u^2(x, t)$

x/l	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$\eta_1 = 1/4$	0,000	0,1349822	0,9413157	0,1983011	0,0627365	0,0218689	0,0071290	0,0015052	0,000
$\eta_1 = 1/2$	0,000	0,029192	0,0627365	0,2164280	0,9883263	0,2164428	0,0627362	0,0129142	0,000
$\eta_3 = 3/4$	0,000	0,0015051	0,0071290	0,0218693	0,0627362	0,1983010	0,9413166	0,1349829	0,000

Tablica 2

x/l	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$\frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\psi c} u^2(x, t)$	0,000	0,2750223	0,5812687	0,7700691	0,8322290	0,7700692	0,5812685	0,2750225	0,000

Tablica 3

x/l	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1,0
$\frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\psi c} u^2(x, t)$	0,00	0,0903	0,3080	0,5260	0,6160	0,5260	0,3080	0,0903	0,00

Literatura cytowana w tekście

1. S. H. CRANDALL, *Random Vibration*, Vol. 2, Chapt. 1, Technology Press and John Wiley and Sons, N.Y. 1959.
2. В. В. БОЛОТИН, *Статистические методы в строительной механике*, I. L. S., Москва 1965.
3. W. S. PUGACZEW, *Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego*, MON, Warszawa 1960.
4. A. A. SWIECZNIKOW, *Podstawowe metody funkcji losowych*, PWN, Warszawa 1965.
5. R. H. LYON, *Response of a nonlinear string to random excitation*, J. Acoust. Soc. Amer., 8, 32 (1960).
6. A. C. ERINGEN, A. LAFAYETTE, *Response of beams and plates to random loads*, ASME 1957.
7. T. KACZOREK, *Metoda korelacyjna analizy obwodów o parametrach losowych przy wymuszonych stochastycznych*, Arch. Elektr., 1, 15 (1966).
8. А. В. ЛЫКОВ, *Теория теплопроводности*, W. S., Москва 1967.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР,
ПРИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКАХ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

Проводится анализ стационарного случайного температурного поля, одномерной задачи, при предположении внешних и внутренних стохастических источников тепла. Используется корреляционный метод, определяя моменты первого и второго порядка искомой величины (температура в стержне) при заданных стохастических вынуждениях (внутренние источники тепла, температура окружающей среды).

При предположенных спектральных плотностях вынуждений даются функции корреляции и дисперсии распределения температуры в стержне.

Дается числовой пример иллюстрирующий метод действия при предположении постоянной спектральной плотности (белый шум) и внешнего и внутреннего вынуждений.

Исчисления проводились на счетной машине UMC—1 в Центре Математических Машин Силезского политехнического института.

Summary

ON A PROBLEM OF TEMPERATURE DISTRIBUTIONS
WITH STOCHASTIC HEAT SOURCES IN A ROD

The subject of analysis is the random stationary temperature field of one-dimensional problem under the assumption of external and internal stochastic sources of heat. The correlation method has been employed to determine the moments of the first and the second order of the sought quantity. (temperature in the rod) with given stochastic excitations (internal heat sources, ambient temperature)

Correlation functions and temperature distribution dispersions in the rod have been determined for the given spectrum densities of excitations. The presented numerical example illustrates the method of proceeding under the assumption of a constant spectrum density (white noise) of external and internal excitation.

The computations have been performed on a UMC-1 computer in Computer Centre of Silesia Polytechnics.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1968r.