

SPRĘŻYSTA PŁYTA SPOCZYWAJĄCA NA SZTYWNYM PODŁOŻU
POD DZIAŁANIEM IMPULSU MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO*

S. CH. GHOSH (KALKUTA)

Wstęp

Ścisłe rozwiązanie dla sprężystej półprzestrzeni obciążonej siłą na powierzchni podane zostało przez CAGNIARDA [1]. DIX [2] wyprowadził wyrażenie na przemieszczenia wywołane siłą skupioną, działającą na dowolny punkt wewnątrz półprzestrzeni. Ścisłe rozwiązanie problemu dynamicznego dla liniowego źródła obciążeń otrzymane zostało przez GARVINA [3].

Przemieszczenie powierzchni pod działaniem obciążenia punktowego typu SH wewnątrz sprężystej półprzestrzeni obliczone zostało w pracy MITRA [4]. KNOPOFF [5] otrzymał wyrażenie na przemieszczenia półprzestrzeni sprężystej wzdłuż osi symetrii, wywołane siłą punktową daną na powierzchni w formie funkcji Heaviside'a.

W niniejszej pracy rozwiązany został problem propagacji fal w grubej płycie sprężystej, spoczywającej na sztywnym podłożu. Płyta obciążona została momentem skręcającym $P\delta(t)/r$, przyłożonym za pośrednictwem sztywnej tarczy kołowej o skończonym promieniu. W celu rozwiązania tak sformułowanego problemu brzegowego rozważono kolejno następujące przypadki:

1. Obliczone zostało przemieszczenie dowolnego punktu sprężystej półprzestrzeni, obciążonej danym momentem skręcającym $P\delta(t)/r$. Wykazano, że powierzchnia «zniszczenia» propaguje się w głąb materiału ściśle poniżej miejsca przyłożenia impulsu.

2. Dla tych samych warunków obciążenia obliczone zostało przemieszczenie powierzchni sprężystej płyty spoczywającej na sztywnym podłożu, wywołane działaniem półnieskończonego ośrodka oraz kolejnymi odbiciami fali obciążenia od dolnej powierzchni płyty, $z = h$.

Przypadek 1. Do powierzchni izotopowej sprężystej półprzestrzeni przymocowana jest tarcza o promieniu a . Za pośrednictwem tej tarczy przyłożony jest do półprzestrzeni moment skręcający $P\delta(t)/r$. Wybieramy układ współrzędnych cylindrycznych r, θ, z , gdzie oś z skierowana jest do wnętrza ośrodka, początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem tarczy, a swobodną powierzchnią półprzestrzeni jest $z = 0$.

Tensor naprężenia ma dwie niezerujące się składowe:

$$\tau_{\theta z} = \mu \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}; \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right),$$

* Z angielskiego tłumaczył J. BEJDA

gdzie przemieszczenie u_θ spełnia równanie ruchu

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},$$

μ jest stałą Lamègo, a ρ oznacza gęstość materiału ośrodka, $\beta^2 = \mu/\rho$.

Zgodnie z założeniami warunki brzegowe przyjęte są w formie

$$(2) \quad \tau_{\theta z} = \frac{P\delta(t)}{r} \quad r < a; \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad r > a.$$

Wykonując na równaniu (1) transformację Laplace'a

$$\bar{u}(r, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u_\theta(r, z, t) dt$$

oraz transformację Hankela

$$U(\zeta, z, p) = \int_0^\infty \bar{u}(r, z, p) r J_1(\zeta, r) dr$$

otrzymamy

$$(3) \quad \frac{d^2 U}{dz^2} = \eta^2 U,$$

gdzie

$$\eta = \sqrt{\zeta^2 + (p/\beta)^2}.$$

Rozwiązanie równania (3) przyjąć można w postaci

$$(4) \quad U = A(\zeta, p) e^{-\eta z}.$$

Ponieważ

$$\bar{\tau}_{\theta z} = \begin{cases} P/r & \text{jeśli } r < a, \\ 0 & \text{jeśli } r > a \end{cases}$$

oraz

$$[\bar{\tau}_{\theta z}]_{B_1} = \frac{P}{\zeta} [s - J_0(\zeta a)],$$

gdzie

$$[\bar{\tau}_{\theta z}]_{B_1} = \int_0^\infty \bar{\tau}_{\theta z} r J_1(\zeta r) dr,$$

to z warunku

$$\left[\mu \frac{\partial U}{\partial z} \right]_{z=0} = [\bar{\tau}_{z\theta}]_{B_1} = \frac{P}{\zeta} [1 - J_0(\zeta a)]^2$$

otrzymujemy

$$A = - \frac{P [1 - J_0(\zeta a)]}{\zeta \mu \eta}.$$

Po podstawieniu stałej rozwiązanie (4) przybiera postać

$$U = \frac{P [J_0(\zeta a) - 1]}{\mu \zeta \eta} e^{-z\eta}.$$

Biorąc określoną transformację Hankela

$$(5) \quad \bar{u}_0 = \frac{P}{\mu} \int_0^\infty \frac{[J_0(\zeta a) - 1] J_1(\zeta r)}{\eta} e^{-z\eta} d\zeta$$

przemieszczenie dowolnego punktu półprzestrzeni otrzymać można za pomocą metody Cagniarda.

Wykorzystując wzór Grafia

$$J_0(\zeta a) J_1(\zeta r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_1(\zeta R) \cos \Psi d\Phi,$$

gdzie

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \Phi, \quad \cos \Psi = \frac{r - a \cos \Phi}{R},$$

otrzymujemy

$$(6) \quad \bar{u}_0 = \frac{P}{\mu \pi} \int_0^\pi \cos \Psi d\Phi \int_0^\infty \frac{J_1(\zeta R)}{\eta} e^{-z\eta} d\zeta - \frac{P}{\mu} \int_0^\infty \frac{J_1(\zeta r)}{\eta} e^{-z\eta} d\zeta.$$

Ponieważ wiadomo, że

$$(7) \quad J_1(\zeta R) = \frac{i}{\pi} \int_0^\pi e^{-i\zeta R \cos \omega} \cos \omega d\omega = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\pi/2} e^{i\zeta R \cos \omega} \cos \omega d\omega \right],$$

to podstawiając (7) do wzoru (6) i $\zeta = pu$ otrzymuje się

$$(8) \quad \bar{u}_0 = -\frac{2P}{\mu \pi^2} \int_0^\pi \cos \Psi d\Phi \left[\operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega \int_0^\infty \frac{e^{-p(tur \cos \omega + z\sqrt{u^2 + v_\beta^2})}}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} du \right\} \right] + \\ + \frac{2P}{\mu \pi} \left[\operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega \int_0^\infty \frac{e^{-p(tur \cos \omega + z\sqrt{u^2 + v_\beta^2})}}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} du \right\} \right],$$

gdzie

$$v_\beta = \frac{1}{\beta}.$$

Wyrażenie w trzecim nawiasie pierwszego wyrazu po wylczeniu i zamianie R na r daje wartość drugiego wyrazu.

W celu wylczenia pierwszego wyrazu wyrażenia (8), mianowicie

$$I_m = \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega \int_0^\infty \frac{e^{-p(tu R \cos \omega + z\sqrt{u^2 + v_\beta^2})}}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} du \right\},$$

dokonyjemy podstawienia

$$(9) \quad iuR \cos \omega + z\sqrt{u^2 + v_\beta^2} = t.$$

Otrzymamy wówczas

$$I_m = \text{Im} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega \int_{H\omega} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right\},$$

gdzie $H\omega$ jest konturem hiperbolicznym. Całkowanie wzdłuż konturu hiperbolicznego może być zastąpione całkowaniem wzdłuż osi rzeczywistej od zv_β do nieskończoności (Por. CAGNIARD). Zmieniając kolejność całkowania otrzymuje się

$$(10) \quad I_m = \int_{zv_\beta}^{\infty} e^{-pt} dt \left\{ \text{Im} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \omega}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega \right\}.$$

W celu obliczenia całki $A(R, z, t)$ w drugim nawiasie wyrażenia (10) zamieniamy zmienne całkowania $z\omega$ na u przy stałym t .

$$(11) \quad A(R, z, t) = \text{Im} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \omega}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega = \text{Im} \int_{C_t} \frac{\cos \omega}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial u} du.$$

Ponieważ na podstawie definicji (9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{1}{iuR \sin \omega} = \frac{1}{i \{u^2 R^2 + (t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2})^2\}^{1/2}},$$

całka (11) przyjmie postać

$$(12) \quad A(R, z, t) = -\text{Im} \int_{C_t} \frac{(t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2}) du}{uR \{u^2 R^2 + (t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2})^2\}^{1/2} \sqrt{u^2 + v_\beta^2}}.$$

Drogą całkowania C_t jest taka krzywa na płaszczyźnie u , którą otrzymuje się ustalając w równaniu (9) t i zmieniając ω od 0 do $\pi/2$.

Droga C_t przedstawiona jest na rys. 1 przez krzywą AO . DIX [2] wykazał, że punkt A , odpowiadający takiej wartości, dla której $\omega = 0$, jest biegunem dla wyrażenia całkowego (12) i ma wartość zespoloną, jeśli

$$t > v_\beta \sqrt{R^2 + z^2}.$$

Z drugiej strony punkt A leży na osi urojonej pomiędzy początkiem układu oraz punktem Q' , jeśli

$$zv_\beta < t < v_\beta \sqrt{R^2 + z^2}.$$

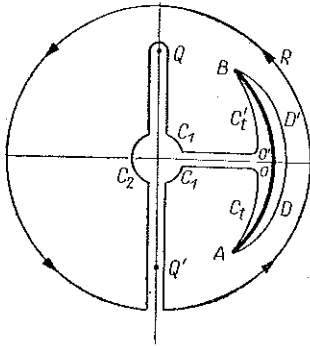
Można wykazać, że w przypadku $t > v_\beta \sqrt{R^2 + z^2}$ całka (12) wylicza się z następującego wzoru:

$$\begin{aligned} A(R, z, t) &= -\frac{1}{2iR} \int_{C_t + C_t'} \frac{(t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2}) du}{u \sqrt{u^2 + v_\beta^2} \{u^2 R^2 + (t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2})^2\}^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{4iR} \int_{C_t + C_t' + D + D'} \frac{(t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2}) dt}{u \sqrt{u^2 + v_\beta^2} \{u^2 R^2 + (t - z \sqrt{u^2 + v_\beta^2})^2\}^{1/2}}, \end{aligned}$$

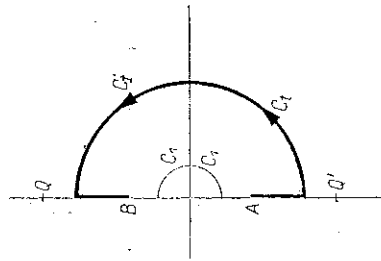
gdzie C'_t jest symetryczną krzywą do C_t względem osi rzeczywistej, natomiast droga całkowania $D'+D$ jest krzywą łączącą BA po drugiej stronie wycięcia AB (rys. 1). Droga całkowania jest następnie przedłużona o odcinek QQ' odpowiadający $\sqrt{u^2+v_\beta^2} = 0$.

Droga całkowania omija początek układu, ponieważ $u = 0$ jest biegunem dla wyrażenia podcałkowego. Całka druga całkowania, obejmująca osobliwość, pokazana została na rys. 1. Całka (12) może być teraz napisana jako

$$A(R, z, t) = \frac{1}{4iR} \int_{(R)(C_1)(C_2)} \frac{(t - z\sqrt{u^2+v_\beta^2}) du}{u\sqrt{u^2+v_\beta^2}\{u^2 R^2 + (t - z\sqrt{u^2+v_\beta^2})^2\}^{1/2}}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Całka po dużym okręgu R wynosi oczywiście zero, ponieważ całka po C_1 znosi się z całką po C_2 . Stąd

$$(13) \quad A(R, z, t) = 0 \quad \text{dla} \quad t > v_\beta \sqrt{R^2+z^2}.$$

Aby znaleźć $A(R, z, t)$ dla $zv_\beta < t < v_\beta \sqrt{R^2+z^2}$, przeprowadzić należy osobną analizę, ponieważ punkty A i B leżą obecnie na osi urojonej (rys. 2). W tym przypadku całka wzdłuż $C_t+C'_t$ równa się całce wzdłuż osi urojonej od A do B plus całka po półokręgu C_1 oznaczającym początek układu. Ponieważ całka wzdłuż osi urojonej od A do B znosi się, otrzymujemy w wyniku

$$\begin{aligned} (14) \quad A(R, z, t) &= -\frac{1}{2iR} \int_{C_t+C'_t} \frac{(t - z\sqrt{u^2+v_\beta^2}) du}{u\sqrt{u^2+v_\beta^2}\{u^2 R^2 + (t - z\sqrt{u^2+v_\beta^2})^2\}^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{2iR} \int_{C_1} \frac{(t - z\sqrt{u^2+v_\beta^2}) du}{u\sqrt{u^2+v_\beta^2}\{u^2 R^2 + (t - z\sqrt{u^2+v_\beta^2})^2\}^{1/2}} = \\ &= -\frac{\pi}{2Rv_\beta} \quad \text{dla} \quad zv_\beta < t < v_\beta \sqrt{R^2+z^2}. \end{aligned}$$

Jeśli

$$A(R, z, t) = 0 \quad \text{dla} \quad t < zv_\beta,$$

to w drugim przypadku otrzymamy ostatecznie

$$(15) \quad A(R, z, t) = -\frac{\pi}{2Rv_\beta} [H(t - zv_\beta) - H(t - v_\beta \sqrt{R^2 + z^2})],$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Podstawiając (15) i (10) do równania (8) dostajemy

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta = & \frac{P}{\mu\pi v_\beta} \int_{zv_\beta}^{\infty} e^{-pt} dt \left[\int_0^{\pi/2} \cos \Psi d\Phi \frac{1}{R} \{H(t - zv_\beta) - H(t - v_\beta \sqrt{R^2 + z^2})\} \right] - \\ & - \frac{P}{\mu v_\beta} \int_{zv_\beta}^{\infty} e^{-pt} dt \frac{1}{r} \{H(t - zv_\beta) - H(t - v_\beta \sqrt{r^2 + z^2})\}. \end{aligned}$$

Obliczamy następnie odwrotną transformację do \bar{u}_θ :

$$\begin{aligned} (16) \quad u_\theta = & \frac{PH(t - zv_\beta)}{\mu\pi v_\beta} \int_0^{\pi} \frac{\cos \Psi}{R} d\Phi - \frac{P}{\mu\pi v_\beta} \int_0^{\pi} \frac{\cos \Psi}{R} H(t - v_\beta \sqrt{R^2 + z^2}) d\Phi - \\ & - \frac{P}{\mu v_\beta r} [H(t - zv_\beta) - H(t - v_\beta \sqrt{r^2 + z^2})] = \frac{PH(t - zv_\beta)}{\mu\pi v_\beta} I_1 - \\ & - \frac{P}{\mu\pi v_\beta} I_2 - \frac{P}{\mu v_\beta r} [H(t - zv_\beta) - H(t - v_\beta \sqrt{r^2 + z^2})]. \end{aligned}$$

Całki I_1 i I_2 oblicza się łatwo i ostateczny wynik otrzymujemy w postaci

$$I_1 = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad r < a, \\ \frac{\pi}{r} & \text{jeśli} \quad r > a, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \left[\frac{1}{r} \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{t^2 - v_\beta^2 [z^2 + (r-a)^2]}{v_\beta^2 [z^2 + (r+a)^2] - t^2}} + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r+a}{a-r} \sqrt{\frac{t^2 - v_\beta^2 [z^2 + (r-a)^2]}{v_\beta^2 [z^2 + (r+a)^2] - t^2}} \right) \right\} \right] \times \\ & \times [H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r-a)^2}) - H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r+a)^2})] \quad (r < a); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{\pi}{r} H[t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r+a)^2}] + \\ & + \left[\frac{1}{r} \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{t^2 - v_\beta^2 [z^2 + (r-a)^2]}{v_\beta^2 [z^2 + (r+a)^2] - t^2}} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r+a}{r-a} \sqrt{\frac{t^2 - v_\beta^2 [z^2 + (r-a)^2]}{v_\beta^2 [z^2 + (r+a)^2] - t^2}} \right) \right\} \right] \times \\ & \times [H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r-a)^2}) - H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r+a)^2})] \quad (r > a). \end{aligned}$$

Zauważmy obecnie, że

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{t^2 - v_\beta^2 [z^2 + (r-a)^2]}{v_\beta^2 [z^2 + (r+a)^2] - t^2}} - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{r+a}{r-a} \sqrt{\frac{t^2 - v_\beta^2 [z^2 + (r-a)^2]}{v_\beta^2 [z^2 + (r+a)^2] - t^2}} \right) = \\ = \cos^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r^2 - a^2}{2r r_1} \right) = \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$t = v_\beta \sqrt{z^2 + r_1^2}.$$

Przemieszczenie dowolnego punktu ośrodka określone jest wzorami

$$(17) \quad u_e = -\frac{P\alpha}{\mu\pi v_\beta r} [H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r-a)^2}) - H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r+a)^2})] - \\ - \frac{P}{\mu v_\beta r} [H(t - z v_\beta) - H(t - v_\beta \sqrt{r^2 + z^2})] \quad (r < a),$$

$$(18) \quad u_\theta = -\frac{P\alpha}{\mu\pi v_\beta r} [H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r-a)^2}) - H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r+a)^2})] + \\ + \frac{P}{\mu v_\beta r} [H(t - v_\beta \sqrt{r^2 + z^2}) - H(t - v_\beta \sqrt{z^2 + (r+a)^2})] \quad (r > a).$$

Badając wzory na przemieszczenia dla $r > a$ i $r < a$ okazuje się, że występuje nieciągłość w przemieszczeniach. Można to interpretować jako propagującą się falę zniszczenia bezpośrednio pod miejsce przyłożenia impulsu. Przemieszczenie swobodnej powierzchni dla $r > a$ otrzymuje się ze wzoru (18) przyjmując $z = 0$:

$$(19) \quad u_\theta^{(1)} = -\frac{P\alpha}{\pi\mu v_\beta r} [H(t - v_\beta (r-a)) - H(t - v_\beta (r+a))] + \\ + \frac{P}{\mu v_\beta r} [H(t - v_\beta r) - H(t - v_\beta (r+a))].$$

Przykład 2. Niech sprężysta płyta o grubości h spoczywa na sztywnym podłożu. Płyta poddana jest impulsowi momentu skracającego danego jako $P\delta(t)/r$ na okręgu o promieniu a .

Rozwiązanie równania różniczkowego (1) przyjmuje się w postaci

$$(20) \quad U = A(\zeta, p) e^{-z\eta} + B(\zeta, p) e^{z\eta}.$$

Rozwiązanie to spełnić musi następujące warunki brzegowe:

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{\theta z}|_{B_1} &= \frac{P}{\zeta} [1 - J_0(\zeta a)] & \text{na } z = 0, \\ U &= 0 & \text{na } z = h. \end{aligned}$$

Stałe całkowania po obliczeniu wynoszą

$$A = -\frac{P}{\mu\eta\zeta} \frac{[1 - J_0(\zeta a)]}{1 + e^{-2\eta h}},$$

$$B = \frac{P}{\mu\eta\zeta} \frac{[1 - J_0(\zeta a)]}{1 + e^{2\eta h}}.$$

Po podstawieniu stałych A i B wzór (20) przybiera postać

$$(22) \quad U = \frac{P}{\mu} \left[\frac{e^{\eta z}}{1 + e^{2\eta h}} - \frac{e^{-\eta z}}{1 - e^{-2\eta h}} \right] \frac{[1 - J_0(\zeta a)]}{\zeta \eta}.$$

Biorąc odwrotną transformację Hankela z równania (22) otrzymujemy

$$\bar{u}_\theta = \frac{P}{\mu} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[\frac{e^{\eta z}}{1 + e^{2\eta h}} - \frac{e^{-\eta z}}{1 + e^{-2\eta h}} \right] [1 - J_0(\zeta a)] J_1(\zeta r) d\zeta.$$

Ponieważ interesuje nas jedynie przemieszczenie na powierzchni, przyjmując $z = 0$ w ostatnim wzorze mamy

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta(r, 0, p) &= \frac{P}{\mu} \int_0^\infty \left[-1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n 2e^{-2n\eta h} \right] \frac{[1 - J_0(\zeta a)] J_1(\zeta r)}{\eta} d\zeta = \\ &= \frac{P}{\mu} \int_0^\infty \frac{[J_0(\zeta a) - 1] J_1(\zeta r)}{\eta} d\zeta + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \bar{I}_n(rp). \end{aligned}$$

Pierwsza całka odpowiada przemieszczeniu ośrodka półnieskończonego i została obliczona poprzednio. Obecnie zajmiemy się obliczeniem pozostałej całki

$$\bar{I}_n(r, p) = \frac{2P}{\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-2n\eta h} [1 - J_0(\zeta a)] J_1(\zeta r)}{\eta} d\zeta.$$

Postępując tak jak w przypadku 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{I}_n(r, p) &= \frac{4P}{\mu\pi^2} \int_0^\pi \cos \Psi d\Phi \left[\operatorname{Im} \int_0^{1/2} \cos \omega d\omega \int_0^\infty \frac{e^{-p(iuR \cos \omega + z_n \sqrt{u^2 + v_\beta^2})}}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} du \right] - \\ &\quad - \frac{4P}{\mu\pi} \left[\operatorname{Im} \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega \int_0^\infty \frac{e^{-p(iur \cos \omega + z_n \sqrt{u^2 + v_\beta^2})}}{\sqrt{u^2 + v_\beta^2}} du \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$z_p = 2nh.$$

Wzorując się na schemacie przedstawionym w punkcie pierwszym pracy (metoda Cagniarda) obliczamy odwrotną transformację Laplace'a wykorzystując te same rysunki 1 i 2. Omijając szczegóły obliczeń końcowy wynik dla $r > a$ znajdziemy w postaci

$$(23) \quad u_{\theta}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{P}{\mu v_{\beta} r} [H(t - v_{\beta} \sqrt{r^2 + 4n^2 h^2}) - H(t - v_{\beta} \sqrt{(r+a)^2 + 4n^2 h^2})] - \frac{Pa}{\pi \mu v_{\beta} r} [H(t - v_{\beta} \sqrt{(r-a)^2 + 4n^2 h^2}) - H(t - v_{\beta} \sqrt{(r+a)^2 + 4n^2 h^2})] \right\}.$$

Stosując zasadę superpozycji można wykazać, że całkowite przemieszczenie w dowolnym punkcie $r > a$ na powierzchni grubej płyty o grubości h dane jest jako następująca suma:

$$u_{\theta} = u_{\theta}^{(1)} + u_{\theta}^{(2)},$$

gdzie $u_{\theta}^{(1)}$ jest przemieszczeniem dowolnego punktu na powierzchni dla półnieskończonego ośrodka, natomiast wyrazy szeregu na $u_{\theta}^{(2)}$ powstają na skutek kolejnych odbić fali o dolnej powierzchni płyty $z = h$.

Literatura cytowana w tekście

1. L. CAGNIARD, *Reflection et Refraction des Ondes Seismiques Progressives*, Chapter V, Paris 1939.
2. C. H. DIX, *Geophysics*, Vol. 19 (1954), 722.
3. W. GARVIN, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A 234 (1956), 528.
4. M. MITRA, *Bull. Seism. Soc. of America*, 5, 53 (1963), 1031.
5. L. KNOPOFF, *J. App. Phys.*, 29 (1958), 661.

Резюме

УПРУГАЯ ПЛАСТИНКА, ПОКОЯЩАЯСЯ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ИМПУЛЬСА КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Жесткий круговой диск прикреплен к поверхности толстой упругой пластинки, покоящейся на жестком основании. К диску приложен крутящий момент $P\delta(t)/r$, где P постоянная, а $\delta(t)$ обозначает функцию Дирака. Применяя метод Каньяра и Дикса, определено перемещения произвольной точки пластинки, вызванное последовательными отражениями возникающей волны от полубесконечной среде и нижней поверхности поверхности, $z = h$.

Summary

ACTION OF A TWISTING MOMENT IMPULSE ON AN ELASTIC PLATE
RESTING ON A RIGID FOUNDATION

A stiff circular disk is attached to the surface of a thick elastic plate resting on a rigid foundation. A twisting moment is $P\delta(t)/r$ applied to the disk, where P is a constant and $\delta(t)$ denotes the Dirac function. Employing the Cagniard and Dix method, the displacement of a disk arbitrary point has been determined which is produced by successive reflections of the arised waves against the semiinfinite medium and the plate bottom surface, $z = h$.

DEPARTMENT OF MAGNETICS
MAULANA AZAD COLLEGE
CALCUTTA, INDIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 marca 1968 r.
