

**PEWNE ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE
DLA WSTĘPNIE SPRĘŻONEJ POWŁOKI TEKSTYLNEJ**

MIECZYŚLAW WIZMUR (GDAŃSK)

Praca poświęcona jest pewnemu wybranemu zagadnieniu, które wyłoniło się w czasie eksploatacji przykryć wiszących, zaprojektowanych i wykonanych jako membrany dwukrzywiznowe, których tworzywem jest specjalnie wyprodukowana tkanina techniczna. Fakt ten oraz wymiary powłok stawiają omówione konstrukcje w rzędzie zupełnie oryginalnych rozwiązań.

Wielokrotnie prace teoretyczne, doświadczalne i projektowe, dotyczące wiszących powłok tekstylnych, w których autor pracy uczestniczył, sugerowały to zagadnienie, jednak jego znaczenie zostało dostrzeżone i docenione w całej doniosłości dopiero w czasie użytkowania wykonanych powłok: były to bowiem konstrukcje pierwsze w kraju. Zagadnienie to polega na określeniu wpływu pola odkształceń powłoki, wywołanego wilgocią lub wysychaniem tkaniny, na stan sprężenia wstępnej powłoki oraz oddziaływania powłoki na konstrukcję podtrzymującą.

Zaobserwowano na wykonanych obiektach, że pole odkształceń, pojawiające się w nawilgoconej powłoce (opady deszczu) lub w powłoce wysychającej, powoduje przemieszczenia o kierunku normalnym do powierzchni powłoki oraz zmianę stanu sprężenia w skali niespotykanej w konstrukcjach wykonanych z tworzyw klasycznych. Zjawiska te mają decydujący wpływ na pracę powłoki i konstrukcji podtrzymującej i muszą być wzięte pod uwagę przez projektanta. Zdaniem autora jest to poważny problem inżynierski, jeden z wielu jakich dostarczają powłoki tekstylne szczególnie z tego względu, że stosowalność takich powłok w wielu przypadkach jest całkowicie uzasadniona.

Jeśli wziąć ponadto pod uwagę, że zaprojektowane powłoki mają powierzchnie od kilkuset do kilku tysięcy metrów kwadratowych, ujęcie powyższych zjawisk pod względem ilościowym, czyli praktycznym i inżynierskim, wykracza zdecydowanie poza ramy powszechnie stosowanych metod projektowych i wymaga stosowania możliwie ścisłych rozważań teoretycznych, a następnie przystosowania ich do celów praktycznych.

1. Podstawy teoretyczne zagadnienia. Założenia

Ogólne założenia dla projektowania powłok tekstylnych podane są w książce [12], która jednak w znacznie szerszym stopniu poświęcona jest konstrukcjom pneumatycznym, aniżeli wiszącym. Szczególnych rozwiązań natomiast należy szukać

w ramach teoretycznych rozważań teorii sprężystości, a szczególnie nieliniowej teorii powłok. Autor oparł swe rozwiązania przede wszystkim na pracach [1, 2, 3 i 4].

W wyniku powstania pola odkształceń, wywołanego przyczynami określonymi we wstępie, składowe stanu przemieszczenia o kierunkach normalnych do powierzchni mogą być duże, tj. ich rząd przekraczać może wielokrotnie rząd grubości powłoki, a jednocześnie jest znacznie mniejszy od rzędu wymiarów powłoki lub jej promieni krzywizn. Natomiast odkształcenia, których kierunki leżą w płaszczyźnie stycznej do powierzchni, przyjęto jako infinitezymalnie małe.

Wobec powyższego zakłada się, że rozważania prowadzone będą w ramach teorii małych odkształceń, co prowadzi do przyjęcia określonej postaci tensora odkształceń i potencjału sprężystego. W stosunku do powłok tekstylnych, których grubość waha się w granicach jednego milimetra, idealnie niemal wydają się być spełnione założenia stanu membranowego i stanu odkształcenia, zgodnego z kinematyczną hipotezą Kirchhoffa-Love'a, a traktowanie problemu jako dwuwymiarowego jest niemal całkowicie pozbawione cech przybliżenia.

Przyjęto w dalszym ciągu, że materiał powłoki jest sprężysty, anizotropowy i podlega prawu Hooke'a w zakresie małych sprężystych odkształceń. Dalsze rozważania prowadzone będą zatem przy następujących założeniach:

- 1) stan odkształcenia powłoki jest całkowicie określony przez odkształcenie jej powierzchni środkowej,
- 2) powierzchnia podstawowa jest powierzchnią środkową, a układy współrzędnych, parametryzujące ją, są do siebie normalne,
- 3) zakłada się, że stan odkształcenia jest zgodny z hipotezą Kirchhoffa-Love'a,
- 4) naprężenia normalne do powierzchni środkowej są równe zeru,
- 5) materiał powłoki jest jednorodny, sprężysty i anizotropowy,
- 6) składowe stanu odkształcenia, których kierunki są styczne do powierzchni środkowej, traktowane jako wielkości bezwymiarowe, są znikomo małe wobec jedności,
- 7) składowe wektora przemieszczeń, styczne do powierzchni środkowej, są wielkościami niższego rzędu w stosunku do składowej normalnej tego wektora.

2. Podstawowe równania opisujące zagadnienie

Przyjęto że związki, opisujące konfigurację początkową, oznaczane są małymi literami, natomiast związki, opisujące konfigurację aktualną (odkształconą) literami dużymi.

Stan odkształcenia powłoki może być określony za pomocą tensora odkształceń Greena-Saint Venanta (jest to jeden ze sposobów), którego składowe w teorii małych odkształceń i przy zastosowaniu hipotezy Kirchhoffa mają wg pracy [2] (str. 161) postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{\delta\lambda} &= \frac{1}{2} (v_{\delta|\lambda} + v_{\lambda|\delta} + w_{|\delta} w_{|\lambda} g_{33}), \\ \gamma'_{\delta\lambda} &= \frac{1}{2} (2b_{\lambda}^{\rho} v_{\rho|\delta} + b_{\lambda|\delta}^{\rho} v_{\rho} - w_{|\delta\lambda}), \end{aligned}$$

przy czym określone są one w metryce konfiguracji początkowej. Przyjmujemy, że w dalszym ciągu konfigurację początkową określać będziemy mianem stanu B_0 , a konfigurację aktualną (odkształconą) mianem stanu B [1].

We wzorze (2.1) b_{β}^{α} oznacza drugi tensor metryczny lub drugą formę kwadratową powierzchni w stanie B_0 , g_{33} kwadrat długości wektora normalnego do powierzchni w tym samym stanie oraz v_{α} , w składowe styczną i normalną do powierzchni środkowej wektora przemieszczeń o postaci

$$(2.2) \quad \mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k = v^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} + w \mathbf{g}_3, \quad v^3 \equiv w,$$

które są funkcjami jedynie dwóch zmiennych, mianowicie ϑ^1 i ϑ^2 :

$$(2.3) \quad v^{\alpha} = v^{\alpha}(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad w = w(\vartheta^1, \vartheta^2),$$

gdzie $\{\vartheta^{\alpha}\}$ jest układem parametryzującym stan B_0 . Wzory (2.1) i (2.2) dotyczą punktów powierzchni środkowej. Należy podkreślić, że związki (2.1) zostały zlinearyzowane względem składowych stanu przemieszczenia, co wolno uczynić wobec założenia 7.

Przyjmujemy dla skrócenia zapisu, że w dalszym ciągu pracy przez termin «powierzchnia» rozumieć będziemy powierzchnię środkową, ponieważ w przypadku tkanin dopuszczalne wydaje się zrezygnowanie z pojęcia powierzchni granicznych $\pm \vartheta^3 = \text{const}$, co można usprawiedliwić znikomą grubością tkaniny, gdyż trudno właściwie mówić z inżynierskiego punktu widzenia o innych powierzchniach aniżeli środkowej. Ogólne równania równowagi teorii membranowej mają znaną postać

$$(2.4) \quad n^{AK}|_A + p^K + f^K = 0,$$

a ponieważ

$$n^{A3}|_A = n^{A3}|_A + \bar{\Gamma}_{A\vartheta}^A n^{\vartheta 3} + \bar{\Gamma}_{A\vartheta}^3 n^{A\vartheta}$$

oraz

$$(2.5) \quad \bar{\Gamma}_{A\vartheta}^3 = B_{A\vartheta}, \quad n^{A3} = 0,$$

przeto możemy je napisać w postaci

$$(2.6) \quad n^{A\vartheta}|_A + p^{\vartheta} + f^{\vartheta} = 0, \quad B_{A\vartheta} n^{A\vartheta} + p^3 + f^3 = 0.$$

W równaniach (2.6) $n^{A\vartheta}$ oznacza siły błonowe stanu B , $\bar{\Gamma}_{A\vartheta}^A$ symbole Christoffela stanu B , $B_{A\vartheta}$ drugą formę kwadratową stanu B oraz p^K, f^K składowe wektorów obciążenia zewnętrznego i sił masowych. Różniczkowanie w równaniach (2.6) dotyczy nieznannej metryki stanu B . Aby określić je w metryce stanu B_0 (metryka ta jest jedynie znana) należy określić, jak zmieniają się symbole Christoffela przy przejściu z jednej konfiguracji do drugiej.

Na wstępie przyjmujemy, że stosowalność teorii małych odkształceń pozwala utożsamiać układy współrzędnych, parametryzujących oba stany B_0 i B , czyli

$$(2.7) \quad \vartheta^{\varphi} \equiv \theta^{\varphi}$$

ze względu na infinitezymalny charakter odkształcenia wewnętrznego powierzchni. W takim razie

$$(2.8) \quad \vartheta_{,\varphi}^{\varphi} = \delta_{\varphi}^{\varphi}.$$

Wyrażmy następnie symbole Christoffela stanu B_0 na powierzchni przez składowe pierwszego i drugiego tensora metrycznego. Pomijając tok wyprowadzenia, który można znaleźć w pracach [1 i 2], mamy

$$(2.9) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{2} g^{kj} (g_{\alpha j, \beta} + g_{\beta j, \alpha} - g_{\alpha\beta, j}) - g^{k3} b_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{3l}^k = g^{mk} b_{lm}.$$

Jak wiadomo, w teorii małych odkształceń spełniona jest równość

$$\frac{dS - ds}{ds} = o(1),$$

gdzie dS i ds są to elementy liniowe odpowiednio stanu B i B_0 , a symbol $o(1)$ oznacza wielkość bezwymiarową małą wobec jedności. A ponieważ kwadrat długości elementu liniowego powierzchni można przedstawić znanym związkiem

$$ds^2 = g_{rs} d\theta^r d\theta^s$$

oraz zachodzi wzór

$$2\gamma_{rs} = (dS^2 - ds^2) d\theta^r d\theta^s,$$

przeto po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(2.10) \quad \gamma_{rs} = o(1) g_{rs}.$$

Związek (2.10) pozwala traktować składowe tensora odkształcenia Greena-Saint Venanta jako wielkości niższego rzędu aniżeli składowe tensora metrycznego. Skąd też

$$g_{rs} \approx g_{rs} + 2\gamma_{rs}, \quad b_{\alpha\beta} \approx b_{\alpha\beta} + 2' \gamma_{\alpha\beta}$$

i wtedy na podstawie (2.9) otrzymujemy

$$(2.11) \quad \bar{\Gamma}_{\delta\lambda}^k = \Gamma_{\delta\lambda}^k - 2g^{k3} ' \gamma_{\delta\lambda}, \quad \bar{\Gamma}_{3l}^k = \Gamma_{3l}^k + 2g^{mk} ' \gamma_{lm},$$

co jest zgodne z pracą [2] (str. 158).

Zależności (2.11) wyrażają symbole Christoffela konfiguracji B przez symbole stanu B_0 , oznaczone w tych związkach przez $\Gamma_{\delta\lambda}^k$. Zmianę symboli Christoffela przy przejściu z jednej konfiguracji do drugiej można znaleźć również w pracy [5]. Przeprowadzając różniczkowanie kowariantne w równaniach (2.6) i zastępując pojawiające się po tej operacji symbole Christoffela metryki stanu B związkami (2.11) oraz korzystając z (2.5) i (2.8), otrzymujemy po przekształceniach

$$(2.12) \quad n^{\alpha\beta} |_{\alpha} + p^{\beta} + f^{\beta} = 0, \quad n^{\alpha\beta} (b_{\alpha\beta} - 2g^{33} ' \gamma_{\alpha\beta}) + p^3 + f^3 = 0.$$

Przy wyprowadzeniu równań (2.12) wykorzystano ponadto fakt, że we współrzędnych normalnych składowe pierwszego tensora metrycznego $g_{\alpha 3} = g^{\alpha 3} = 0$ i że zanika składowa $' \gamma_{\alpha 3}$ drugiego tensora odkształcenia Greena-Saint Venanta. Ze względu na membranowy charakter pracy powłoki należy przyjąć $n^{\alpha 3} = n^{33} = 0$. Składowe $' \gamma_{\alpha\beta}$ należy przyjąć według (2.1)₂.

Przejdźmy z kolei do równań konstytutywnych. Energia odkształcenia powłoki sprężystej zależy jedynie od konfiguracji początkowej powłoki oraz, w przypadku materiału anizotropowego, od bazy \mathbf{g}_k , czyli od przyjętego układu współrzędnych $\{\vartheta^k\}$ parametryzującego tę konfigurację. Można ją przedstawić w przypadku małych sprężystych odkształceń jako funkcję kwadratową składowych tensora odkształceń

$$(2.13) \quad W = \frac{1}{2} C^{klmn} \gamma_{kl} \gamma_{mn}.$$

Jest to droga znana w literaturze. Pomijając zatem tok wyprowadzenia związku pomiędzy składowymi tensora naprężenia a energią wewnętrzną odkształcenia powłoki, przyjęto równania konstytutywne dla powłoki, podlegającej przyjętym w pracy założeniom, w postaci

$$(2.14) \quad n^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\varrho\sigma} \gamma_{\varrho\sigma}.$$

Tensor o składowych $C^{\alpha\beta\varrho\sigma}$ jest tensorem sztywności sprężystej, zależnym od bazy \mathbf{g}_k i własności materiału powłoki w stanie B_0 ; $\gamma_{\varrho\sigma}$ jest tensorem odkształcenia Greena-Saint Venanta.

Reasumując rozważania bieżącego punktu zagadnienie membrany, rozpatrywanej w ramach teorii małych odkształceń i odkształcającej się zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Love'a, opisują 1) związki geometryczne (2.1), 2) równania równowagi (2.12) oraz 3) równania konstytutywne (2.14) określone w metryce stanu B_0 .

Równania te stanowią punkt wyjścia dla dalszych rozważań.

3. Konfiguracje powłoki rozpatrywane w pracy; układy współrzędnych i tensory sztywności sprężystej

Przyjęto, że przestrzeń euklidesowa, w której znajduje się powłoka, jest parametryzowana kartezjańskim układem współrzędnych $\{x^k\}$. Na płaszczyźnie $x^3 = 0$ znajduje się płat o dowolnym konturze, ortotropowy, przy czym kierunki ortotropii pokrywają się z osiami x^α . Tę konfigurację, w której powłoka jest płaszczyzną, nazwijmy konfiguracją naturalną; oznaczmy ją literą B_n . Odpowiada jej zerowy stan naprężenia.

Z płata tego zostaje następnie uformowana dowolna powierzchnia w ogólności dwukrzywiznowa i nierozwijalna, co możliwe jest na drodze przyłożenia do płata określonych sił i wywołania w nim pewnego stanu napięcia. W przypadku minimalnej sztywności na ścinanie dla materiału powłoki, czyli zdolności zupełnie swobodnego odkształcenia postaciowego, uzyskanie powierzchni nierozwijalnej z płata powierzchniowego nie powoduje wystąpienia sił tnących o kierunkach stycznych do powierzchni. Przykładem takiego tworzywa jest np. siatka linowa lub tkanina, którą można ułożyć na dowolnej nierozwijalnej powierzchni, albowiem tkaninie można nadać model siatki. Tę konfigurację, w której tkanina tworzy powłokę wstępnie sprężoną, nazwijmy konfiguracją początkową; oznaczamy ją, jak wiadomo, literą B_0 . Przyjmijmy, że konfiguracja ta parametryzowana jest układem $\{\vartheta^\alpha\}$, a siły sprężenia wstępnego, realizujące tę konfigurację, nazwijmy $\overset{\circ}{n}^{11}$ i $\overset{\circ}{n}^{22}$. Oczywiście w wyniku zerowej sztywności na ścinanie dla tkaniny siły $\overset{\circ}{n}^{12} = \overset{\circ}{n}^{21} = 0$.

Zakładamy, że istnieje jednoznaczne odwzorowanie

$$(3.1) \quad \vartheta^\alpha = \vartheta^\alpha(x^1, x^2, x^3),$$

jak również odwzorowanie odwrotne. Ze względu na nierozwijałość powierzchni odpowiednie elementy w stanach B_n i B_0 nie są sobie równe, a jedną z konsekwencji tego faktu jest zanikanie ortotropii w konfiguracji B_0 . Kierunki te, ortogonalne w konfiguracji B_n , przestają być nimi w B_0 tworząc dwie rodziny krzywych regularnych, czyli anizotropię krzywoliniową. Ustalamy na powierzchni powłoki inny układ krzywoliniowy, oznaczony przez $\{s\}$ ($\kappa = 1, 2$) taki, że kierunki jego linii pokrywają się z kierunkami powstałej anizotropii krzywoliniowej, zakładając istnienie jednoznacznego odwzorowania między obu układami:

$$(3.2) \quad s = s(\vartheta^1, \vartheta^2)$$

jak również odwzorowania odwrotnego.

Niechaj konfiguracja B_0 opisana będzie za pomocą wektora

$$(3.3) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\vartheta^1, \vartheta^2).$$

Z założenia tego wynika cała geometria stanu B_0 . W wyniku istnienia pola odkształceń wstępnych w powłoce pojawia się pewien stan przemieszczenia, który przeprowadza konfigurację B_0 , czyli konfigurację wstępnego sprężenia, w konfigurację aktualną (odkształconą) B . Przy naszych założeniach przejście to określone jest tylko trzema nieznanymi funkcjami $v_\alpha(\vartheta^1, \vartheta^2)$ i $w(\vartheta^1, \vartheta^2)$. W przypadku trójosiowej symetrii sprężystej tablica składowych tensora sztywności sprężystej ma postać

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccc} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} \\ & C^{2222} & C^{2233} \\ & & C^{3333} & C^{2323} \\ & & & C^{1313} \\ & & & & C^{1212} \end{array}$$

Ponieważ w ramach teorii błonowej stan napięcia jest zdefiniowany symetrycznym tensorem napięcia $n^{\alpha\beta}$, to tabela (3.4) redukuje się do następujących składowych:

$$(3.5) \quad C^{1111}, C^{1122}, C^{1212}, C^{2222},$$

przy czym istnieje symetria:

$$C^{1122} = C^{2211}, C^{1212} = C^{2112}, C^{1212} = C^{1221}.$$

Jak wspomniano poprzednio, składowe te zależą od własności materiałowych powłoki w stanie nieodkształconym i od układu współrzędnych, parametryzujących tę konfigurację. Wartości tych współczynników mierzone w konfiguracji B_n (na płaszczyźnie) w kierunkach x^α , czyli w kierunkach ortotropii, będą takie same wzdłuż kierunków $\{s\}$ w stanie B_0 . Decydując się w dalszym ciągu na prowadzenie rozważań w układzie $\{\vartheta^\alpha\}$ stanu B_0 , należy współczynniki sztywności sprężystej przetransformować z układu $\{s\}$ do układu $\{\vartheta^\alpha\}$.

Na podstawie (3.2) można wektor (3.3) przedstawić w postaci

$$(3.6) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 [\vartheta^1(s, s), \vartheta^2(s, s)];$$

skąd

$$(3.7) \quad \mathbf{r}_0, s = \mathbf{I} = \lambda^\alpha \mathbf{g}_\alpha.$$

Pole wektorowe \mathbf{I} określa jednoznacznie jednoparametrową rodzinę krzywych $\{s\}$ za pomocą równania różniczkowego (3.7). Wektory jednostkowe \mathbf{I} stanowiące bazę układu $\{s\}$ mają składowe kontrawariantne

$$(3.8) \quad \lambda^\alpha = \vartheta^\alpha s$$

wyrażone przez bazę wektorową \mathbf{g}_α układu $\{\vartheta^\alpha\}$.

Transformując składowe tensora sztywności sprężystej z układu $\{s\}$ do układu $\{\vartheta^\alpha\}$ otrzymamy

$$(3.9) \quad C^{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \vartheta^\alpha_s \vartheta^\beta_s \vartheta^\gamma_s \vartheta^\epsilon_s C^{\mu\nu\eta\zeta}.$$

W ten sam sposób otrzymamy przetransformowaną zależność dla składowych tensora odkształcenia Greena-Saint Venanta:

$$(3.10) \quad \gamma_{\epsilon\epsilon} = s, \varrho_s, \epsilon \gamma_{\psi\epsilon}.$$

Równania konstytutywne (2.14), uwzględniające fakt anizotropii krzywoliniowej, lecz napisane w układzie współrzędnych stanu B_0 , przyjmują więc postać

$$(3.11) \quad n^{\alpha\beta} = \lambda^\alpha \lambda^\beta C^{\nu\mu\epsilon\delta} \gamma_{\epsilon\delta},$$

w której wykorzystano oczywistą zależność

$$\vartheta^\alpha_s \vartheta^\beta_s \vartheta^\gamma_s \vartheta^\delta_s \varrho = \frac{\partial \vartheta^\alpha}{\partial s} \frac{\partial \vartheta^\beta}{\partial s} \frac{\partial \vartheta^\gamma}{\partial s} \frac{\partial \vartheta^\delta}{\partial s} \varrho = \delta_{\psi}^{\alpha\beta}.$$

4. Równania przemieszczeniowe

Zakłada się, że wielkości odkształceń wstępnych, wywołane wilgocią lub procesem wysychania, mogą zostać wyznaczone na drodze doświadczalnej, co zresztą istotnie zostało dokonane dla wielu typów stosowanych tkanin. Jednakże nie wyjaśnienie mechanizmu tego zjawiska, lecz jego konsekwencje dla konstrukcji są celem niniejszej pracy.

Badania te były nieodzowne, albowiem w literaturze z dziedziny włókiennictwa, choćby wymienić prace [7 i 8], nie napotkano wzmianki na ten temat, a poszukiwanie prawa fizycznego, wiążącego odkształcenia wywołane wilgocią z wieloma parametrami charakteryzującymi tkaniny techniczne i warunkami jej sprężenia, jest

zagadnieniem zupełnie odrębnym i, zdaniem autora, niezwykle trudnym. Zresztą korzystanie z danych doświadczalnych jest powszechnie przyjęte; jak wiadomo np. w teorii pełzania betonu korzysta się z krzywych empirycznych dla określenia funkcji pełzania.

Autor stwierdził, że wielkości odkształceń wstępnych są różne: inne w kierunku osnowy, inne w kierunku wątku tkaniny, przy czym rzeczą niesłychanie istotną jest rodzaj użytego włókna (wyjątkowe duże odkształcenia wykazują tkaniny wykonane z włókna poliamidowego). Jeśli ponadto uwzględnić fakt, że powłoka jest ze względów konstrukcyjnych wzmacniana taśmami w określonym kierunku, to przyjęcie ortotropii w stanie B_n jest całkowicie usprawiedliwione.

Jeśli oznaczymy składowe tensora odkształceń wstępnych przez $\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta}$, to równania konstytutywne (3.11) napiszemy w postaci

$$(4.1) \quad \overset{\circ}{n}^{\alpha\beta} = \lambda^\alpha \lambda^\beta C^{\nu\mu\epsilon\delta} (\gamma_{\epsilon\delta} - \overset{\circ}{\gamma}_{\epsilon\delta}) + \overset{\circ}{n}^{\alpha\beta},$$

gdzie $\overset{\circ}{n}^{\alpha\beta}$ oznacza siły sprężenia wstępnego, realizujące stan B_0 . Oczywiście jest, że siły $\overset{\circ}{n}^{\alpha\beta}$ muszą spełniać równania równowagi stanu B_0 , tzn. muszą być spełnione warunki

$$(4.2) \quad \overset{\circ}{n}^{\alpha\beta}|_{\alpha} + f^{\beta} = 0, \quad \overset{\circ}{n}^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + f^3 = 0.$$

Z równania (4.2)₂ przy pominięciu ciężaru własnego powłoki, co zresztą nie jest konieczne, wynika natychmiast, że

$$(4.3) \quad \overset{\circ}{n}^{11} = -\frac{b_{22}}{b_{11}} \overset{\circ}{n}^{22},$$

jeśli przyjąć $\overset{\circ}{n}^{12} = \overset{\circ}{n}^{21} = 0$, co jest konsekwencją prawie zerowej sztywności tkaniny na odkształcenia postaciowe. Ze związku (4.3) wynika, że daną powierzchnię (tzn. odpowiadającą ustalonej wartości drugiej formy kwadratowej) można zrealizować za pomocą nieskończonej ilości par sił $\overset{\circ}{n}^{\alpha\beta}$ pod warunkiem, że spełniają one zależności (4.3). Równania (4.3) są istotne dla wyprowadzenia równań przemieszczeniowych. Jak powiedziano wyżej, przejście $B_0 \rightarrow B$ określone będzie wtedy, gdy określone zostaną trzy nieznanne funkcje $v_\alpha(\vartheta^1, \vartheta^2)$ i $w(\vartheta^1, \vartheta^2)$. Znajomość tych funkcji pozwoli na znalezienie składowych stanu napięcia, co w przypadku założeń niniejszej pracy, można traktować jako rozwiązanie problemu. Wiadomo bowiem, że ostatecznym celem analizy stanu napięcia jest wyznaczenie składowych pola tensora naprężeń, a nie sił przekrojowych, jednak dla powłoki omawianej w niniejszej pracy, tzn. dla idealnie cienkiej membrany, pojęcia te są identyczne i zadanie sprowadza się do wyznaczenia wyłącznie sił błonowych. Wstawiając równania konstytutywne (4.1) do równań równowagi (2.12) otrzymujemy po przekształceniach

$$(4.4) \quad \begin{aligned} C^{\nu\mu\epsilon\delta} [(\gamma_{\epsilon\delta} - \overset{\circ}{\gamma}_{\epsilon\delta}) (\lambda^\alpha|_{\alpha} \lambda^\beta + \lambda^\alpha \lambda^\beta|_{\alpha}) + \lambda^\alpha \lambda^\beta (\gamma_{\epsilon\delta} - \overset{\circ}{\gamma}_{\epsilon\delta})|_{\alpha}] + p^\beta &= 0, \\ C^{\nu\mu\epsilon\delta} \lambda^\alpha \lambda^\beta (\gamma_{\epsilon\delta} - \overset{\circ}{\gamma}_{\epsilon\delta}) (b_{\alpha\beta} - 2g^{33} \gamma_{\alpha\beta}) - 2\overset{\circ}{n}^{\alpha\beta} g^{33} \gamma_{\alpha\beta} + p^3 &= 0 \end{aligned}$$

po wykorzystaniu zależności (4.2).

Równania (4.4) są równaniami przemieszczeniowymi, odnoszącymi się do powłoki anizotropowej o zupełnie dowolnej powierzchni. Równania te można napisać w rozwiniętej postaci ze względu na funkcje przemieszczeń v_α , w , jeśli zamiast składowych tensora odkształceń podstawić odpowiednie funkcje wg wzorów (2.1). Zanim to jednak uczynimy, konieczna jest analiza układu równań (4.4), albowiem dla uzyskania efektywnych rozwiązań należy wprowadzić do niego uproszczenia, w tej bowiem postaci możliwe są jedynie rozwiązania numeryczne i to bardzo skomplikowane.

Układ (4.4) reprezentuje układ trzech równań cząstkowych, nieliniowych o zmiennych współczynnikach, przy czym rozwiązanie tego układu musi być poprzedzone wyznaczeniem pola wektorowego \mathbf{l} którego składowe kontrawariantne w bazie układu $\{\vartheta^\alpha\}$ określone są przez (3.8). Wyznaczenie tych składowych jest stosunkowo proste, o ile znana jest transformacja (3.2), co jednak z reguły nie ma miejsca.

Dla określenia układu $\{s\}$ wyróżniającego kierunki anizotropii krzywoliniowej autor posłużył się teorią siatek Czebyszewa opierając się na książce [9] (str. 338–358) oraz pracy [10], w której autor, posługując się unormowanym tensorem siatki Czebyszewa, wykazuje, że dla pewnego typu powierzchni utworzona na niej siatka Czebyszewa, rzutowana na płaszczyznę horyzontalną, daje rodziny krzywych, tworzących również siatkę Czebyszewa. Pomijając szczegółowe rozważania ograniczymy się do ostatecznych wniosków.

Wektor (3.3), opisujący położenie dowolnego punktu konfiguracji B_0 , tworzącej dowolną powierzchnię, można przedstawić w postaci

$$(4.5) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\vartheta^1, \vartheta^2) + z(\vartheta^1, \vartheta^2) \mathbf{k},$$

gdzie $z(\vartheta^1, \vartheta^2)$ jest funkcją horyzontalną (bezwymiarową), określającą odległości punktów powłoki od płaszczyzny poziomej. Przyjmijmy, że rzut pewnej rodziny krzywych, leżących na powierzchni B_0 na płaszczyznę odniesienia, tworzy najprostszą siatkę Czebyszewa, mianowicie płaski układ prostokątny. Powstaje pytanie, jaką musi być wtedy powierzchnia B_0 , aby to zaszło?

Z własności siatek Czebyszewa wynika [9], że dwie rodziny krzywych tworzą ją wtedy, gdy traktowane jako krzywoliniowy układ współrzędnych są takim szczególnym układem, że spełniony jest warunek

$$(4.6) \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Powyższe symbole Christoffela drugiego rodzaju można oczywiście wyrazić przez składowe pierwszego tensora metrycznego w postaci

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} (g^{11} g_{11,2} + g^{12} g_{22,1}), \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} (g^{21} g_{11,2} + g^{22} g_{22,1}),$$

gdzie wykorzystano własności symetrii tych składowych. Na podstawie (4.6) otrzymujemy

$$g_{11,2} = g_{22,1} = 0,$$

skąd wynika, że

$$(4.7) \quad g_{11} = g_{11}(\vartheta^1), \quad g_{22} = g_{22}(\vartheta^2).$$

Związek (4.7) ma dalsze konsekwencje, ogranicza bowiem funkcję $z(\vartheta^1, \vartheta^2)$ do klasy funkcji o budowie

$$(4.8) \quad z = C_1(\vartheta^1) + C_2(\vartheta^2).$$

Innymi słowy, jeśli powierzchnia konfiguracji B_0 jest powierzchnią dowolną, opisaną wektorem (4.5), to znalezienie transformacji (3.2) jest bardzo skomplikowane i sprowadza się jedynie do rozwiązań numerycznych w celu znalezienia tensora siatki Czebyszewa. Jeśli natomiast powierzchnia B_0 jest powierzchnią translacyjną, opisaną wektorem (4.5), w którym funkcja horyzontalna ma szczególną postać (4.8), to określenie pola wektorowego \mathbf{l} , czyli składowych λ^α , jest stosunkowo proste, albowiem układ prostokątny, zrzutowany na powierzchnię translacyjną, daje siatkę Czebyszewa. Nie oznacza to nic innego jak fakt, że kierunki anizotropii krzywoliniowej można w tym przypadku utożsamić z układem $\{\vartheta^\alpha\}$ parametryzującym konfigurację B_0 , czyli

$$\{\vartheta^\alpha\} \equiv \{s\} \delta^{\alpha\alpha}.$$

A ponieważ wiadomo, że długość łuku linii współrzędnych można przedstawić związkiem

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} d\vartheta^\alpha,$$

więc opierając się na (3.8) napiszemy

$$(4.9) \quad \lambda^\alpha = \frac{\partial \vartheta^\alpha}{\partial s} = \delta^\alpha_\alpha (\sqrt{g_{\alpha\alpha}})^{-1}.$$

Jest to pierwsze uproszczenie, jakie wprowadzamy do równań przemieszczeniowych (4.4), polegające na ograniczeniu rozpatrywanych powierzchni jedynie do powierzchni translacyjnych. Należy nadmienić, że w przypadku materiału izotropowego problem ten w ogóle nie występuje, a budowa równań przemieszczeniowych jest znacznie prostsza [11].

Równania przemieszczeniowe mają więc w przypadku powierzchni translacyjnych postać

$$(4.10) \quad \frac{C^{\alpha\beta\epsilon\epsilon}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)}}} (\gamma_{\epsilon\epsilon} - \overset{\circ}{\gamma}_{\epsilon\epsilon})|_\alpha + p^\beta = 0,$$

$$\frac{C^{\alpha\beta\epsilon\epsilon}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)}}} (\gamma_{\epsilon\epsilon} - \overset{\circ}{\gamma}_{\epsilon\epsilon}) (b_{\alpha\beta} - 2g^{33} \gamma_{\alpha\beta}) - 2n^{\alpha\beta} g^{33} \gamma_{\alpha\beta} + p^3 = 0,$$

gdzie został wykorzystany fakt, że pochodna kowariantna tensora metrycznego jest równa zero. Wprowadzając teraz do układu (4.10) zależności (2.1) otrzymujemy

$$(4.11) \quad \frac{C^{\alpha\beta\epsilon\epsilon}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)}}} \frac{1}{2} (v_{\epsilon|s} + v_{s|\epsilon} + g_{33} w|_{\epsilon} w|_{\epsilon})|_{\alpha} - \frac{C^{\alpha\beta\epsilon\epsilon}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)}}} \gamma_{\epsilon s|\alpha}^{\circ} + p^{\beta} = 0,$$

$$\frac{C^{\alpha\beta\epsilon\epsilon}}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)}}} \left[\frac{1}{2} (v_{\epsilon|s} + v_{s|\epsilon} + w|_{\epsilon} w|_{\epsilon} g^{33}) b_{\alpha\beta} + \left(-\frac{1}{2} g^{33} w|_{\epsilon} w|_{s} + \gamma_{\epsilon s}^{\circ} \right) g^{33} \times \right. \\ \left. \times (2b_{\beta}^{\circ} v_{\varphi|\alpha} + b_{\beta|\alpha}^{\circ} v_{\varphi} - w|_{\alpha\beta}) \right] - g^{33} n^{\alpha\beta} (2b_{\beta}^{\circ} v_{\varphi|\alpha} + b_{\beta|\alpha}^{\circ} v_{\varphi} - w|_{\alpha\beta}) + p^3 = 0.$$

Należy podkreślić, że przy przejściu z układu (4.10) do układu (4.11) wykonano mnożenia typu $\gamma_{\epsilon s}$, $\gamma_{\alpha\beta}$, w których dokonano konsekwentnie linearyzacji względem składowych przemieszczeń v_{α} . Wskaźniki ujęte w nawias nie podlegają sumowaniu.

5. Powłoki mało wyniosłe

Równania przemieszczeniowe (4.11) są nadal jeszcze skomplikowane, a ich efektywne rozwiązanie możliwe jest przy przyjęciu przybliżenia małej wyniosłości powłoki. Jest to przypadek ważny z punktu widzenia technicznego i w wielu przypadkach uzasadniony.

Jeśli jako kryterium małej wyniosłości przyjmiemy, że funkcja horyzontalna (4.8), traktowana jako wielkość bezwymiarowa, jest dla każdej pary (θ^1, θ^2) mała wobec jedności, to macierz składowych pierwszego tensora metrycznego można przyjąć w postaci

$$(5.1) \quad g_{\alpha\beta} \approx \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix},$$

a współczynniki drugiej formy kwadratowej spełniają warunki

$$(5.2) \quad b_{11} = \text{const}, \quad b_{22} = \text{const}, \quad b_{12} = b_{21} = 0.$$

Tak więc przy założeniu małej wyniosłości powłoki otrzymujemy dla powierzchni translacyjnych następujące równania przemieszczeniowe, które otrzymano z układu (4.11) po licznych przekształceniach:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & A_1 v_{1,11} + A_2 v_{2,21} + A_1 w_{,1} w_{,11} + A_2 w_{,2} w_{,21} - \sigma_{11,1} = 0, \\ & B_1 v_{1,12} + B_2 v_{2,22} + B_2 w_{2,22} w_{,2} + B_1 w_{,1} w_{,12} - \sigma_{22,2} = 0, \\ & D_1 v_{1,1} + D_2 v_{2,2} + D_3 w_{,1} w_{,1} + D_4 w_{,2} w_{,2} + K_1 w_{,11} + \\ & \quad + K_2 w_{,22} + A_1 v_{1,1} w_{,11} + B_1 v_{1,1} w_{,22} + A_2 v_{2,2} w_{,11} + B_2 v_{2,2} w_{,22} + \\ & \quad + 0,5(A_1 w_{,1} w_{,1} w_{,11} + B_1 w_{,1} w_{,1} w_{,22} + A_2 w_{,2} w_{,2} w_{,11} + B_2 w_{,2} w_{,2} w_{,22}) + \\ & \quad - (C_1 v_{1,1} w_{,1} w_{,1} + C_2 v_{2,2} w_{,1} w_{,1} + C_3 v_{1,1} w_{,2} w_{,2} + C_4 v_{2,2} w_{,2} w_{,2}) + E = 0. \end{aligned}$$

Wobec przyjętego założenia, że składowa $v \ll 1$ i pomijania w związku z tym iloczynów typu $w w$, zachowanie tych wyrazów w równaniu (5.3)₃ wydaje się być niekonsekwentne. Autor zdecydował się jednak na to, ponieważ dwa pierwsze

równania (5.3) mogą być rozwiązane względem v_α i przedstawione w postaci $v_\alpha = C_\alpha w_0^2$ ($C_\alpha = \text{const}$). Po wstawieniu do trzeciego równania uzyskuje się wtedy wyrażenia zawierające jedynie potęgi w^3 i w^4 . Ponadto w przykładzie (por. przykład równania) potęgę czwartą składowej w pominięto.

W równaniach (5.3) przejęliśmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad & A_1 = C^{1111}, \quad C_1 = A_1 b_{11}, \quad \sigma_{11} = A_1 \dot{\gamma}_{11} + A_2 \dot{\gamma}_{22}, \\
 & A_2 = C^{1122}, \quad C_2 = A_2 b_{22}, \quad \sigma_{22} = A_3 \dot{\gamma}_{11} + A_4 \dot{\gamma}_{22}, \\
 & B_1 = C^{2211}, \quad C_3 = B_1 b_{11}, \quad K_1 = 2\dot{n}^{11} - \sigma_{11}, \\
 & B_2 = C^{2222}, \quad C_4 = B_2 b_{22}, \quad K_2 = 2\dot{n}^{22} - \sigma_{22}, \\
 & D_1 = C_1 + C_2 + 2b_{11} \sigma_{11} - 4\dot{n}^{11} b_{11}, \quad D_3 = 0,5 (C_1 + C_2), \\
 & D_2 = C_3 + C_4 + 2b_{22} \sigma_{22} - 4\dot{n}^{22} b_{22}, \quad D_4 = 0,5 (C_3 + C_4), \\
 & E = -(b_{11} \sigma_{11} + b_{22} \sigma_{22}).
 \end{aligned}$$

Układ (5.4) jest ostatecznie poszukiwanym układem równań przemieszczeniowych, nieliniowym ze względu na składową normalną w wektora przemieszczeń. Niewiadomymi są oczywiście trzy funkcje przemieszczeń $v_1, v_2, v_3 = w$, będące funkcjami zmiennych ϑ^1, ϑ^2 , a więc zmiennych parametryzujących konfigurację początkową powłoki.

6. Siły wewnętrzne

Na podstawie przeprowadzonych rozważań jesteśmy obecnie w stanie określić siły błonowe w powłoce, odpowiadające konfiguracji B . Korzystając z równań konstytutywnych

$$n^{\alpha\beta} = \lambda^\alpha \lambda^\beta C^{\nu\mu\alpha\beta} (\gamma_{\alpha\nu} - \dot{\gamma}_{\alpha\nu}) + \dot{n}^{\alpha\beta},$$

które wobec (4.9) i (5.1) mają postać

$$(6.1) \quad n^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\alpha\beta} (\gamma_{\alpha\beta} - \dot{\gamma}_{\alpha\beta}) + \dot{n}^{\alpha\beta},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad & n^{11} = C^{1111} \gamma_{11} + C^{1122} \gamma_{22} - \sigma_{11} + \dot{n}^{11}, \\
 & n^{22} = C^{2211} \gamma_{11} + C^{2222} \gamma_{22} - \sigma_{22} + \dot{n}^{22}, \\
 & n^{12} = n^{21} = 0
 \end{aligned}$$

wobec przyjęcia znikomej sztywności materiału tkaniny na odkształcenia postaciowe.

Podstawiając na miejsce składowych tensora sztywności sprężystej powszechnie przyjęte stałe materiałowe [6], a na miejsce składowych tensora odkształcenia funkcje (2.1) znajdziemy na siły błonowe następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 n^{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (v_{1,1} + w_{,1} w_{,1} - \dot{\gamma}_{11}) + \\
 &+ \frac{E_{11} \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (w_{2,2} + w_{,2} w_{,2} - \dot{\gamma}_{22}) + \dot{n}^{11}, \\
 n^{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (v_{2,2} + w_{,2} w_{,2} - \dot{\gamma}_{22}) + \\
 &+ \frac{E_{22} \nu_{12}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (v_{1,1} + w_{,1} w_{,1} - \dot{\gamma}_{11}) + \dot{n}^{22},
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

gdzie składowe v_1 , v_2 i w są funkcjami, wynikającymi z rozwiązania równań przemieszczeniowych (5.3).

Łatwo zauważyć, że przy braku pola odkształceń wstępnych, tzn. gdy $\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, oraz przyjmując stan B_0 jako wyjściowy, tzn. gdy $v_1 = v_2 = w = 0$, otrzymujemy

$$n^{11} = \dot{n}^{11}, \quad n^{22} = \dot{n}^{22},$$

czyli siły błonowe, równe siłom sprężenia wstępnego.

Siły błonowe (6.3) są funkcjami ϑ^1 i ϑ^2 , albowiem są nimi składowe wektora przemieszczeń: stąd też można je wyznaczyć w dowolnym punkcie powłoki.

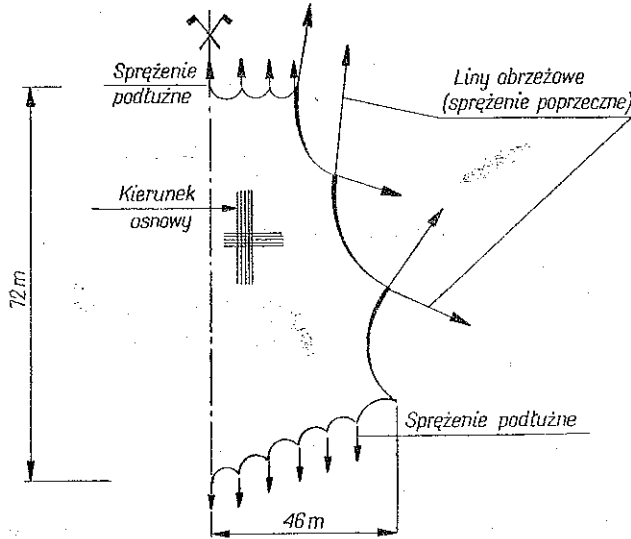
Bardzo istotne znaczenie mają warunki brzegowe, przy których należy rozwiązać układ równań przemieszczeniowych (5.3). W przypadku powłok tekstylnych warunki te są bardzo trudne, albowiem kontur powłoki, sprężony liną stalową, jest ciągnem w postaci krzywej przestrzennej. Stąd też warunki brzegowe, uwzględniające odkształcenia konturu, prowadzą do skomplikowanych równań różniczkowych cząstkowych i nieliniowych. W niniejszej pracy autor ogranicza warunki brzegowe do konturu całkowicie niepodatnego, co oczywiście odbiega znacznie od rzeczywistej pracy powłoki. Problem uwzględnienia odkształcalności konturu wraz z koncepcją zastosowania przybliżeń w celu dostosowania tak powstałych warunków brzegowych dla celów praktycznych jest, zdaniem autora, nowym zagadnieniem, które wysuwają powłoki tekstylne, o czym wspomina na wstępie.

7. Przykład

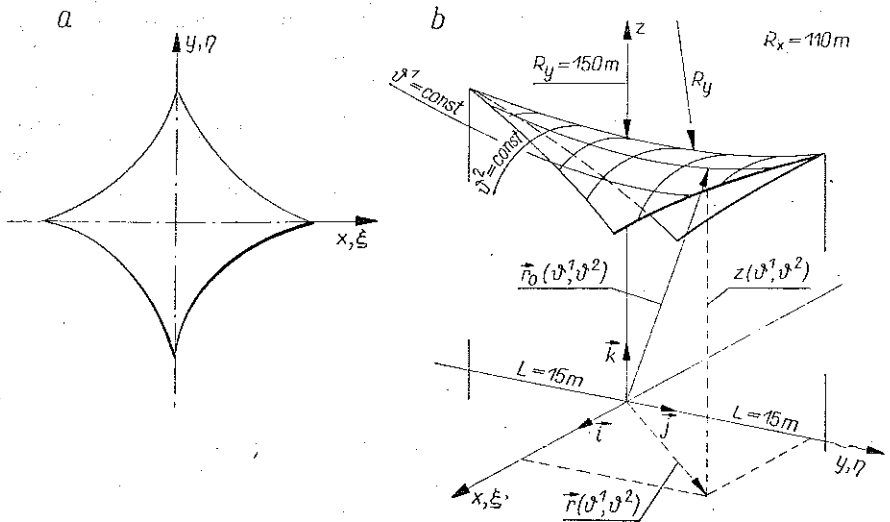
Dla zilustrowania stosowalności wyprowadzonych w pracy wzorów, a przede wszystkim dla oszacowania wielkości zmian stanu napięcia w anizotropowej powłoce tekstylnej, poddanej działaniu wilgoci, podajemy przykład liczbowy.

Przykład ten jest zupełnie realny, albowiem dotyczy własności sprężystych i wielkości odkształceń wywołanych wilgocią, którymi charakteryzuje się tkanina techniczna, wykonana specjalnie jako powłoka dla przykrycia teatru plenerowego Opery Leśnej w Sopocie, o powierzchni około 4000 m². Tkanina wykonana jest z włókna poliamidowego, powlekana pastami poliuretanowymi i ma grubość 0,9 mm. Projekt przykrycia wykonano w Zakładzie Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej przy współudziale autora niniejszej pracy przy korzystaniu z jego analizy teoretycznej.

Powłoki tekstylne mogą być «wykrojone» według dowolnego konturu pod warunkiem, że zapewnia on właściwe sprężenie powłoki. Zagadnienie to jest oddzielnym problemem, którego nie omawia się w pracy niniejszej.



Rys. 1. Rzut powłoki nad Operą Leśną w Sopocie (konfiguracja B_n)



Rys. 2. Powłoka rozpatrywana w przykładzie liczbowym
a) konfiguracja B_n , b) konfiguracja B_0 (wstępne sprężenie)

Powłoka dla Opery Leśnej ma kontur podany na rys. 1, w przykładzie liczbowym jednak przyjmuje się kontur znacznie mniej skomplikowany, przedstawiony na rys. 2. Realność tego konturu, albowiem kontur o brzegach prostoliniowych wyklucza sprężenie powłoki, znacznie komplikuje rozwiązanie, zachodzi bowiem konieczność

opisania konturu jednym równaniem, które w przyjętym układzie współrzędnych ma postać

$$(7.1) \quad -2\xi^2 - 2\eta^2 + (\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4) + 1 = 0.$$

Zakłada się, że powierzchnia powłoki (stan B_0) po sprężeniu przyjmuje równanie powierzchni translacyjnej

$$(7.2) \quad z = -\frac{x^2}{R_x} + \frac{y^2}{R_y}, \quad z = -0,00909x^2 + 0,00667y^2,$$

gdzie R_x R_y są to promienie krzywizn (rys. 2).

Równanie (7.2) można przedstawić w postaci wektorowej (4.5),

$$(7.3) \quad \mathbf{r} = \vartheta^1 \mathbf{i} + \vartheta^2 \mathbf{j} + [-0,137 (\vartheta^1)^2 + 0,100 (\vartheta^2)^2] \mathbf{k},$$

gdzie trzeci wyraz po prawej stronie jest funkcją horyzontalną postaci (4.8). Wielkości występujące w równaniu (7.3) są bezwymiarowe, przyjęto bowiem jako mnożnik wymiar długości $L = 15$ m. Z równania (7.3) otrzymujemy wielkości charakteryzujące geometrię powierzchni:

wektory bazy

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{g}_1 = \mathbf{r}_{,1} &= \mathbf{i} - 0,274 \mathbf{k}, \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{r}_{,2} &= \mathbf{j} + 0,200 \mathbf{k}, \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 (\det g_{\alpha\beta})^{-1} &= \frac{0,200 \vartheta^1 \mathbf{i} - 0,274 \vartheta^2 \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\det g_{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

składowe tensora metrycznego

$$(7.5) \quad g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 + 0,075 (\vartheta^1)^2, & -0,055 (\vartheta^1 \vartheta^2) \\ -0,055 (\vartheta^1 \vartheta^2), & 1 + 0,04 (\vartheta^2)^2 \end{bmatrix},$$

współczynniki drugiej formy kwadratowej

$$(7.6) \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -0,274, & 0 \\ 0, & 0,200 \end{bmatrix} (\det g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Ponieważ $-1 \leq \vartheta^1 \leq 1$, $-1 \leq \vartheta^2 \leq 1$, przeto można się łatwo przekonać, że w stosunku do (7.5) można przyjąć z dużym przybliżeniem zależność (5.1) i traktować powłokę jako mało wyniosłą.

Niechaj siła sprężająca powłokę w kierunku ϑ^2 wynosi $\dot{n}^{22} = 550$ [kg/mb] (wielkość zbliżona do sprężenia powłoki nad Operą Leśną); wtedy na podstawie (4.3) i przy pominięciu znikomego ciężaru własnego otrzymujemy

$$(7.7) \quad \dot{n}^{11} = \frac{-b_{22}}{b_{11}} 550 = 400 \text{ [kg/mb]}.$$

Są to siły realizujące konfigurację B_0 , czyli powierzchnię (7.3). Stałe materiałowe tkaniny, o której wspomniano wyżej, a uzyskane z wielokrotnych badań, wynoszą

$$E_{11} = 14.700 \text{ [kg/mb]}, \quad E_{22} = 8.340 \text{ [kg/mb]}, \quad \nu_{12} = 0,26, \quad \nu_{21} = 0,15;$$

wykazują one cechy ortotropii i dotyczą obszaru sił występujących w rzeczywistej powłoce wstępnie sprężonej.

Dla rozwiązania równań przemieszczeniowych (5.3) zastosowano metodę Galerkinia przyjmując postać funkcji przemieszczeń *a priori* w postaci

$$(7.8) \quad v_1 = v_{10} \sin \pi \xi f(\xi, \eta), \quad v_2 = v_{20} \sin \pi \eta f(\xi, \eta), \quad w = w_0 f(\xi, \eta),$$

gdzie $f(\xi, \eta)$ oznacza lewą stronę równania (7.1). Funkcje te spełniają warunek znikania na konturze (7.1).

Po licznych i dosyć żmudnych obliczeniach otrzymano z układu (5.3) następujący układ równań algebraicznych stopnia trzeciego:

$$(7.9) \quad \begin{aligned} 48,8A_1 v_{10} + 19,5A_2 v_{20} + 27,5A_1 w_0^2 - 132A_2 w_0^2 &= 0, \\ 19,5B_1 v_{10} + 48,8B_2 v_{20} + 132B_1 w_0^2 - 27,5B_2 w_0^2 &= 0, \\ -10,85(D_1 v_{10} + D_2 v_{20}) - 138(D_3 + D_4) w_0^2 + 9,5(K_1 + K_2) w_0 - \\ &- 97 v_{10} w_0 (A_1 + B_1) - 97 v_{20} w_0 (A_2 + B_2) + \\ &+ 0,5(742A_1 + 742B_2 + 362B_1 + 362A_2) = 0. \end{aligned}$$

Obliczając na podstawie (5.4) stałe A_1, \dots, B_2 otrzymano

$$(7.10) \quad \begin{aligned} v_{10} = 0,165 w_0^2, \quad v_{20} = -0,134 w_0^2, \\ 9,5 \cdot 10^6 w_0^3 - [1,79 D_1 - 1,45 D_2 + 138(D_3 + D_4)] w_0^2 + \\ + 9,5(K_1 + K_2) w_0 + 2,45 = 0. \end{aligned}$$

Wykorzystując równanie (5.3)₃ zachowano jako najwyższą trzecią potęgę składowej normalnej w .

Układ (7.10) odnosi się do ustalonego rodzaju tkaniny, albowiem wykorzystano w nim liczbowe wartości stałych sprężystych, ale dla dowolnej powierzchni (translacyjnej) i dowolnych sił sprężających. Przyjmując dalej określoną powierzchnię, mianowicie powierzchnię (7.3), z której wynikają liczbowe wartości współczynników formy kwadratowej (7.6) oraz dane siły sprężenia wstępnego otrzymano po obliczeniu odpowiednich stałych następujące równanie:

$$(7.11) \quad \begin{aligned} 10^3 \cdot 9,5 w_0^3 + [187,3 + \dot{\gamma}_{22}(16,31a + 7,28)] w_0^2 + \\ + 18 [0,95 - \dot{\gamma}_{22}(8,77 + 5,47a)] w_0 - \dot{\gamma}_{22}(2,64 - 8,96a) = 0 \end{aligned}$$

ze względu na składową normalną w wektora przemieszczeń i wyłącznie jako funkcji pola przemieszczeń. W równaniu (7.11) $a = \dot{\gamma}_{11}/\dot{\gamma}_{22}$. Równanie (7.11) rozwiązano dwukrotnie:

$$\begin{aligned} \text{I dla } \dot{\gamma}_{22} = -2\%, \quad \dot{\gamma}_{11} = -3\% \\ \text{otrzymując } w_0 = 0,0181, Lw_0 = 27 \text{ cm;} \\ \text{II dla } \dot{\gamma}_{22} = -6\%, \quad \dot{\gamma}_{11} = -10\% \\ \text{otrzymano } w_0 = 0,071, Lw_0 = 107 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Wielkości odkształceń $\overset{\circ}{\gamma}_{11}$ i $\overset{\circ}{\gamma}_{22}$ przyjęte w zadaniu są bliskie rzeczywistym odkształceniom użytej tkaniny, a wielkości składowej normalnej wektora przemieszczeń, czyli wielkości Lw_0 obliczone dla środka powłoki są rzeczywiście rzędu przemieszczeń, które zaobserwowano na wykonanych obiektach.

Podstawiając otrzymane wartości w_0 do funkcji (7.8), a następnie korzystając ze związków (6.3), określających siły błonowe, otrzymano dla środka powłoki, czyli dla $\xi = \eta = 0$,

$$w_0 = 0,0181: \quad n^{11} = 908 \text{ [kg/mb]}, \quad n^{22} = 787 \text{ [kg/mb]},$$

natomiast $\overset{\circ}{n}^{11} = 400 \text{ [kg/mb]}, \quad \overset{\circ}{n}^{22} = 550 \text{ [kg/mb]}$;

$$\text{dla } w_0 = 0,071: \quad n^{11} = 2100 \text{ [kg/mb]}, \quad n^{22} = 1293 \text{ [kg/mb]},$$

natomiast $\overset{\circ}{n}^{11} = 400 \text{ [kg/mb]}, \quad \overset{\circ}{n}^{22} = 550 \text{ [kg/mb]}$.

Otrzymane wyniki wskazują dobitnie, jak znaczne zmiany w stanie napięcia wywołuje pole odkształceń wstępnych.

Wielkości odkształceń wstępnych przyjęto w zadaniu jako ujemne, co oznacza skurcz tkaniny, wywołujący wzrost sił błonowych. Przyjęcie znaku dodatniego oznacza konsekwentnie zmniejszenie stanu sprężenia, a w przypadku dużych odkształceń (rzędu 12–15%) — do zupełnego wyluzowania się powłoki. Zjawiska takie były niejednokrotnie obserwowane w powłoce nad Operą Leśną stanowiąc dla niej bardzo poważne niebezpieczeństwo zniszczenia.

Dyskusja wpływu poszczególnych parametrów, tzn. wielkości krzywizn powierzchni, sił sprężenia wstępnego, stałych sprężystych i wielkości odkształceń, wydaje się być trudna w sensie ogólnym. Można je natomiast przedyskutować na drodze wielokrotnego rozwiązania równań (7.9) przy różnych zestawach parametrów, uzyskując różne wielkości w_0 i konsekwentnie różne wielkości zmian sił błonowych. Przy użyciu maszyn cyfrowych jest to oczywiście zadanie zupełnie proste.

Powstaje na zakończenie pytanie, w jakim stopniu otrzymane wyniki aproksymują rzeczywisty stan napięcia powłoki w konfiguracji B . Wydaje się, że kryteria teoretyczne są raczej wątpliwe, wiadomo bowiem, jakimi możliwościami w sensie efektywnego rozwiązania dysponuje teoria nieliniowych równań cząstkowych i teoria szacowania błędów. Odpowiedzi na to pytanie odstarczyć może raczej doświadczenie, wynikające z obserwacji powłok tego typu.

Autor rozporządza danymi doświadczalnymi w tym względzie, dotyczącymi powłoki nad Operą Leśną oraz przekrycia brezentowego pawilonu młodzieżowego (o pow. 700 m²), wykonanymi jako pierwsze w kraju powłoki wiszące z tkanin technicznych. O ile jednak stałe materiałowe, siły sprężające i wielkości pola odkształceń, przyjęte w przykładzie liczbowym, są wzięte z projektu powłoki nad Operą Leśną, o tyle kontur powłoki obliczonej w pracy jest znacznie uproszczony oraz jej wymiary odbiegają znacznie od wymiarów powłoki nad Operą Leśną.

Niemniej jednak dla uchwycenia rzędu wielkości zmian wywołanych działaniem wilgoci autor zdecydował się na przytoczenie pewnych faktów, zaobserwowanych na tych obiektach.

a. Przemieszczenia normalne punktu środkowego symetrycznego przekrycia brezentowego nad pawilonem młodzieżowym w Sopocie wyniosły średnio na przestrzeni obserwacji trzyletniej około 160 cm ku górze po opadach deszczu, wywołując znaczne dodatkowe sprężenie powłoki. Powłoka wysychająca wykazywała wyraźny powrót do stanu normalnego.

b. W przypadku powłoki nad Operą Leśną występowało zjawisko zupełnie odwrotne w stosunku do włókna brezentowego, mianowicie obniżenie się punktu środkowego i spadki napięcia pod wpływem opadów. Nie można jednak było wyznaczać przemieszczeń, albowiem układ lin stalowych biegnących nad powłoką, do których jest ona podwieszona, uniemożliwiał jej swobodny zwis, jaki miałby miejsce, gdyby lin nie było. Stąd też pomiar ten był niecelowy. Uchwycono natomiast spadki napięcia w linach obrzeżowych, sprężających powłokę poprzecznie (przy zastosowaniu specjalnych dynamometrów tensometrycznych). Powłoka nawilgocona opadami deszczu luzowała się.

W pierwszym roku eksploatacji, gdy impregnaty chroniły jeszcze dostatecznie włókno przed nasiąkliwością (ale nie idealnie) stwierdzono w linach spadki sił od 300 do 400%. Powodowało to tak znaczne wyluzowanie się powłoki idealnie napiętej w czasie słonecznej pogody, że powłoka nie odprowadzała wód deszczowych, a gromadzące się w «wygiętych» lokalnie płatach powierzchniowych duże ilości wody spowodowały pęknięcie powłoki na długości kilkunastu metrów.

W trzecim roku eksploatacji, gdy niewystarczająca ciągliwość osłaniających włókna impregnatów spowodowała ich popękanie na skutek nieustannej pracy powłoki i znaczne odsłonięcie włókna na działanie wilgoci — stwierdzono zupełny spadek sił w linach obrzeżowych i niemal całkowite wyluzowanie się powłoki. Zmiany konstrukcyjne wprowadzone do konstrukcji podporowej, mające na celu nadanie powłoce dodatkowych spadków (zbędnych, gdyby pole odkształceń nie powodowało tak fatalnych skutków) pozwoliło uchronić powłokę w dalszych latach eksploatacji od stanów awaryjnych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN and W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1963.
2. CZ. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
3. P. M. NAGHDI, R. P. NORDGREN, *On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff hypothesis*, Quart. Appl. Math., 1, 1963.
4. E. BIBLIEWICZ, *O geometrycznie nieliniowej teorii powłok lepkosprężystych*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966).
5. П. А. КИЛЧЕВСКИЙ, *Основы аналитической механики оболочек*, Москва 1963.
6. С. Т. ЛЕХНИЦКИЙ, *Теория упругости анизотропного тела*, Москва 1950.
7. T. ŻYLYŃSKI, *Metrologia włókiennictwa*, WPL, Warszawa 1965.
8. R. MEREDITH, J. W. HEARLE, *Physical Methods of Investigating Textiles*, N. York 1959.
9. Ф. В. КАГАН, *Основы теории поверхностей*, Москва 1948.
10. P. WILDE, *Some problems of the theory of membranes formed by inextensibles cords*, Arch. Mech. Stos., 4, 18 (1966).
11. M. WIZMUR, *Sily wewnętrzne wywołane dystorsją w paraboloidzie hiperbolicznej, rozpatrzonej w stanie bezzgięciowym*, Arch. Inżyn. Łąd., 2, 14 (1968).
12. Ф. ОТТО, Р. ТРОСТЕЛ, *Пневматические строительные конструкции*, Москва 1967.

Резюме

НЕКОТОРОЕ ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ
ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТЕКСТИЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе рассматривается влияние дисторсии на изменение внутренних сил в произвольной оболочке, при чем материал оболочки — не изотропный. Рассуждения ведутся в тензорной записи. Предполагая, что оболочка была в начале плоской, принято в этом состоянии упругую и дисторсионную ортотропию, а затем формируется неразвертывающаяся поверхность. В результате этого, исчезает ортотропия, а на поверхности появляется криволинейная анизотропия. Тензор деформации дополняется тензором дисторсии, а физические зависимости, записанные в произвольной криволинейной системе являются линейными. Принято, что деформации, возникающие в срединной поверхности, являются бесконечно малыми, а нормальные к ней — большими. Это ввиду переменной w . приводит к нелинейной системе уравнений Уравнения равновесия для мембранной теории, преобразовываются в уравнения в перемещениях. Затем автор, обсуждает гиперболический параболоид и применяет к нему выведенное уравнение, показывая, на основе теории сеток Чердышева и при предположении малой пологости, вытекающие оттуда упрощения, позволяющие решить эту систему уравнений. Решение проводится с помощью метода Галеркина. В качестве примера дается фрагмент перекрытия театра на открытом воздухе «Лесная Опера» в Сопоте, изготовленного из стилионной ткани поверхностью ок. 4550 см². Числовые результаты показывают изменения внутренних сил, вызванных дисторсией, появляющейся в ткани под влиянием усадки или растяжимости, вызванной увлажнением.

Summary

A PARTICULAR SOLUTION FOR A PRESTRESSED TEXTILE MEMBRANE

The present paper is concerned with the relation between the stress and the distortion of an arbitrary membrane. The material of the shell is anisotropic. The analysis is performed in the tens or notation. The membrane which is initially plane and orthotropic is transformed into an undevelopable surface. The consequence of this is that orthotropy is replaced by curvilinear anisotropy. The displacement tensor is completed by the distortion tensor. The stress-strain relations are expressed in the generalized coordinates of the surface, and are assumed to be linear. The components of the displacement vector at the middle surface are infinitesimally small whilst its normal component is large. This leads to non-linear equations in w . The equations of equilibrium for a membrane are transformed into equations of displacement. Next, the hyperbolic paraboloid is considering showing on the grounds of the Tshebyshev-net theory and by assuming that the shell is shallow, that the equation obtained can be written in a simpler form. These equations are solved the Galerkin method thus finding the relation required. The theoretical considerations are illustrated by a numerical example concerning a textile membrane of 4.550 sq.m. designed as a covering for the Sopot Open Air Opera. The results show how the membrane forces vary under conditions of distortion.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 sierpnia 1967 r.