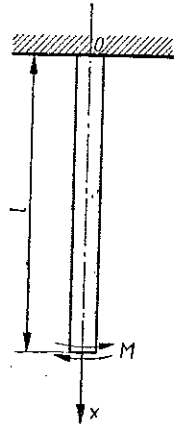


WYMUSZONE DRGANIA SKRĘTNE PRĘTA Z MATERIAŁU LEPKOSPĘŻYSTEGO

ANNA FORYŚ i ANDRZEJ FORYŚ (KRAKÓW)

1. Wstęp

Praca przedstawia drgania skrętne pręta lepkospężystego o kołowym, stałym przekroju przy wymuszeniu sinusoidalnym, działającym na swobodny koniec pręta. Przyjęto, że odkształcenie następuje bez zmiany objętości oraz że przekroje pozostają płaskie. Zasada superpozycji Boltzmanna prowadzi do równania ruchu, które jest równaniem różniczkowo-całkowym o pochodnych cząstkowych. Równanie to zostało rozwiązane w sposób ścisły w postaci ogólnej. Dokładniejszą analizę przeprowadzono dla dwóch prostych modeli reologicznych: Maxwella i Kelvina-Voigta. Wyniki końcowe ilustrują załączone wykresy.



Rys. 1

2. Sformułowanie zagadnienia

Pręt kołowy o długości l i promieniu przekroju R ma zamocowany nieruchomo jeden koniec (rys. 1). Na drugi koniec pręta działa moment skręcający $M(t) = M_0 \sin \omega t$, gdzie $M_0 = \text{const}$. Wektor momentu siły $\mathbf{M}(t)$ ma kierunek osi x , pokrywającej się z osią pręta. Kąt skręcenia φ jest funkcją współrzędnej x i czasu t : $\varphi = \varphi(x, t)$. Kąt skręcenia prostego γ jest związany z kątem φ znaną z wytrzymałości materiałów zależnością

$$(2.1) \quad \gamma = r \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

gdzie r oznacza odległość od osi pręta ($0 \leq r \leq R$).

Zasada superpozycji Boltzmanna [1 i 2] dla skręcania ma postać

$$(2.2) \quad \tau(r, x, t) = \int_0^t \psi(t-\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial x} \right] d\theta = \\ = \psi(0) r \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} - r \int_0^t \frac{\partial}{\partial \theta} [\psi(t-\theta)] \frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial x} d\theta,$$

gdzie τ oznacza naprężenie styczne w punkcie odległym o r od osi pręta (symetria walcowa) i leżącym w przekroju o współrzędnej x w chwili t ; $\psi(t-\theta)$ jest funkcją relaksacji.

Moment sił działający w przekroju o współrzędnej x określa wzór

$$(2.3) \quad M(x, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \tau(r, x, t) d\vartheta dr.$$

Korzystając z (2.2) otrzymuje się z (2.3)

$$M(x, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \left[\psi(0) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} - \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial x} d\theta \right] d\vartheta dr$$

lub po wykonaniu całkowania

$$(2.4) \quad M(x, t) = J_0 \left[\psi(0) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} - \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial x} d\theta \right],$$

gdzie J_0 przedstawia biegunowy moment bezwładności pola przekroju, tzn. $J_0 = 1/2\pi R^4$.

Stąd wynika równanie drgań skrętnych pręta lepkosprężystego:

$$(2.5) \quad J_0 \left[\psi(0) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi(x, \theta)}{\partial x^2} d\theta \right] = \rho i^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2},$$

gdzie ρ jest liniową gęstością ciała ($\rho = dm/dx$), a i ramieniem bezwładności ($i = R/\sqrt{2}$).

Równanie (2.5) jest równaniem różniczkowo-całkowym o pochodnych cząstkowych ze względu na niewiadomą funkcję $\varphi(x, t)$. Do tego równania należy dołączyć dwa warunki brzegowe i dwa warunki początkowe. Zgodnie z założeniami warunki brzegowe mają postać (dla $t \geq 0$) następującą:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \varphi(0, t) &= 0, \\ J_0 \psi(0) \left[\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l} - J_0 \int_0^t \frac{\partial \psi(t-\theta)}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \varphi(x, \theta)}{\partial x} \right]_{x=l} d\theta &= M_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Przyjmijmy warunki początkowe (dla $0 \leq x \leq l$)

$$(2.7) \quad \varphi(x, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0.$$

Rozważane drgania pręta opisuje równanie (2.5) z warunkami (2.6) i (2.7).

3. Rozwiązanie zagadnienia

Dla uproszczenia wprowadźmy oznaczenia

$$(3.1) \quad F(t) = \left[\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l}, \quad K(t-\theta) = \frac{\partial \psi(t-\theta)}{\partial \theta}.$$

Warunek brzegowy (2.6)₂ ma teraz postać

$$(3.2) \quad J_0 \psi(0) F(t) - J_0 \int_0^t K(t-\theta) F(\theta) d\theta = M_0 \sin \omega t.$$

Jest to równanie Voltery drugiego rodzaju ze względu na funkcję $F(t)$. Jeżeli jądro $K(t-\theta)$ jest ograniczone, równanie to ma jedyne rozwiązanie ograniczone określone wzorem [3]

$$(3.3) \quad F(t) = \frac{M_0}{J_0 \psi(0)} \sin \omega t + \frac{M_0}{J_0 [\psi(0)]^2} \int_0^t \tilde{K} \left(t-\theta, \frac{1}{\psi(0)} \right) \sin \omega \theta d\theta,$$

gdzie $\tilde{K}(t-\theta, 1/\psi(0))$ jest jądrem rozwiązującym.

Na podstawie (3.3) $F(0)=0$, $\dot{F}(0)=M_0 \omega / J_0 \psi(0)$ ($(\dot{}) = d()/dt$). Równanie (3.2) można również rozwiązać przy zastosowaniu transformacji Laplace'a [4]. W pewnych przypadkach równanie to daje się sprowadzić do równania różniczkowego, co zostanie przedstawione dalej w przykładzie.

Znając $F(t)$ szukamy rozwiązania równania (2.5) w postaci

$$(3.4) \quad \varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) + xF(t).$$

Po wstawieniu (3.4) do (2.5) otrzymujemy

$$(3.5) \quad J_0 \psi(0) \varphi_{1xx}(x, t) - J_0 \int_0^t K(t-\theta) \varphi_{1xx}(x, \theta) d\theta = \rho i^2 [\varphi_{1tt}(x, t) + x \ddot{F}(t)],$$

gdzie

$$\varphi_{1x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \varphi_{1t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}.$$

Jest to równanie różniczkowo-całkowe o pochodnych cząstkowych ze względu na funkcję $\varphi_1(x, t)$ z warunkami brzegowymi i początkowymi otrzymanymi z (3.4), (2.6) i (2.7):

$$(3.6) \quad \varphi_1(0, t) = 0, \quad \varphi_{1x}(l, t) = 0, \quad \varphi_1(x, 0) = 0, \quad \varphi_{1t}(x, 0) = -\frac{M_0 \omega}{J_0 \psi(0)} x.$$

Zajmiemy się najpierw rozwiązaniem zagadnienia drgań swobodnych. Przyjmijmy w (3.5) $F(t) \equiv 0$, co ze względu na (3.3) odpowiada $M_0 = 0$ czyli $M(t) \equiv 0$. Otrzymane z (3.5) równanie ma postać

$$(3.7) \quad J_0 \psi(0) \bar{\varphi}_{1xx}(x, t) - J_0 \int_0^t K(t-\theta) \bar{\varphi}_{1xx}(x, \theta) d\theta = \rho i^2 \bar{\varphi}_{1tt}(x, t),$$

gdzie $\bar{\varphi}_1(x, t)$ jest kątem skęcenia dla drgań swobodnych, a warunki brzegowe zgodne z (3.6)_{1,2}.

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(3.8) \quad \bar{\varphi}_1(x, t) = X(x) T(t).$$

Po wstawieniu (3.8) do równania (3.7) otrzymujemy rozdzielanie zmiennych i równanie ze względu na funkcję $X(x)$ ma postać:

$$(3.9) \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$X(x) = \bar{A} \sin \lambda x + \bar{B} \cos \lambda x,$$

a po wykorzystaniu warunków brzegowych (3.6)_{1,2} otrzymujemy ciąg funkcji własnych

$$(3.10) \quad X_n(x) = \bar{A}_n \sin \lambda_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz ciąg wartości własnych

$$(3.11) \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Zakładamy, że rozwiązanie $\varphi_1(x, t)$ równania (3.5) można przedstawić w postaci rozwinięcia na szereg wyżej otrzymanych funkcji własnych (3.10):

$$(3.12) \quad \varphi_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \lambda_n x.$$

Po wstawieniu (3.12) do (3.5) otrzymujemy

$$(3.13) \quad -J_0 \psi(0) \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \lambda_n^2 \sin \lambda_n x + J_0 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \sin \lambda_n x \int_0^t K(t-\theta) q_n(\theta) d\theta = \\ = \rho i^2 \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \sin \lambda_n x + \rho i^2 x \ddot{F}(t).$$

Korzystając z warunku ortogonalności funkcji własnych [5]

$$(3.14) \quad \int_0^l \sin \lambda_k x \sin \lambda_n x dx = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } k \neq n, \\ l/2, & \text{jeśli } k = n \end{cases}$$

oraz ze wzoru

$$\int_0^l x \sin \lambda_k x dx = \frac{\sin \lambda_k l}{\lambda_k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

po zastosowaniu metody Galerkinia równanie (3.13) zostaje zastąpione układem równań zwyczajnych różniczkowo-całkowych:

$$(3.15) \quad \ddot{q}_n(t) + \frac{J_0 \psi(0) \lambda_n^2}{\rho i^2} q_n(t) - \frac{J_0 \lambda_n^2}{\rho i^2} \int_0^t K(t-\theta) q_n(\theta) d\theta = \\ = (-1)^n \frac{2}{\lambda_n^2 l} \ddot{F}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Warunki początkowe (3.6)_{3,4} będą spełnione, jeżeli przyjmiemy

$$(3.16) \quad q_n(0) = 0, \quad \dot{q}_n(0) = (-1)^n \frac{2M_0 \omega}{J_0 \psi(0) \lambda_n^2 l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Jak widać, układ równań (3.15) jest układem rozdzielonym dzięki własności ortogonalności (3.14). Można rozwiązać każde z równań oddzielnie posługując się np. metodą transformacji Laplace'a [4]. W pewnych przypadkach każde z nich daje się sprowadzić do równania różniczkowego.

4. Przykłady szczegółowe

Obliczenia szczegółowe przeprowadzimy dla dwóch modeli reologicznych: Maxwella i Kelvina-Voigta.

Model Maxwella. W tym przykładzie

$$K(t-\theta) = G\beta e^{-\beta(t-\theta)}, \quad \psi(0) = G,$$

gdzie G jest modułem sztywności, $\beta = 1/\tau = G/\eta$, a η oznacza współczynnik lepkości, τ jest czasem relaksacji. Równanie (3.2) ma zatem postać

$$(4.1) \quad GJ_0 F(t) - J_0 G \beta \int_0^t e^{-\beta(t-\theta)} F(\theta) d\theta = M_0 \sin \omega t.$$

Równanie to daje się sprowadzić do równania różniczkowego przez obustronne zróźniczkowanie względem czasu i ponowne skorzystanie z tegoż równania. Dostaje się wtedy

$$(4.2) \quad \dot{F}(t) = \frac{M_0}{GJ_0} (\beta \sin \omega t + \omega \cos \omega t),$$

skąd

$$(4.3) \quad F(t) = \frac{M_0}{GJ_0} \left(\sin \omega t - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \right),$$

gdź $F(0) = 0$.

Równanie (3.15) ma teraz postać

$$(4.4) \quad \ddot{q}_n(t) + \frac{G\lambda_n^2}{d} q_n(t) - \frac{G\beta\lambda_n^2}{d} \int_0^t e^{-\beta(t-\theta)} q_n(\theta) d\theta = \frac{2(-1)^n M_0 \omega}{\lambda_n^2 I G J_0} (-\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t),$$

gdzie skorzystano z równości

$$\frac{\rho l^2}{J_0} = d;$$

d jest gęstością materiału.

Równanie to daje się sprowadzić do równania różniczkowego zupełnie podobnie jak równanie (4.1). Otrzymujemy więc

$$(4.5) \quad \ddot{q}_n(t) + \beta \ddot{q}_n(t) + \frac{G\lambda_n^2}{d} \dot{q}_n(t) = \frac{2(-1)^n}{\lambda_n^2 l} (\beta \dot{F} + \ddot{F}).$$

Uwzględniając warunki początkowe (3.16) oraz $\ddot{q}(0)$ otrzymane z (3.15) znajdziemy rozwiązanie

$$(4.6) \quad q_n(t) = -\frac{2A_n\eta}{G\left(1-\sqrt{1-\frac{4\lambda_n^2\eta^2}{Gd}}\right)} e^{-\frac{G}{2\eta}\left(1-\sqrt{1-\frac{4\lambda_n^2\eta^2}{Gd}}\right)t} - \\ -\frac{2B_n\eta}{G\left(1+\sqrt{1-\frac{4\lambda_n^2\eta^2}{Gd}}\right)} e^{-\frac{G}{2\eta}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\lambda_n^2\eta^2}{Gd}}\right)t} + \frac{C_n}{\omega} \sin \omega t - \frac{D_n}{\omega} \cos \omega t,$$

gdzie A_n, B_n, C_n i D_n są stałymi zależnymi od wartości $\omega, M_0, G, \eta, \lambda_n$ i l .

Rozwiązanie zagadnienia otrzymuje się po wstawieniu (4.6) do (3.12) oraz wykorzystaniu zależności (3.4) przy uwzględnieniu związku (4.3).

W rozwiązaniu (4.6) dwa pierwsze wyrazy przedstawiają drgania swobodne, które, jak wynika z ich budowy, zanikają z upływem czasu. Dwa ostatnie wyrazy przedstawiają ustalone drgania wymuszone.

W dalszym ciągu dokładniej rozpatrzmy te właśnie drgania odrzucając wyrazy wykładniczo zanikające z czasem. Wówczas [użyjemy tego samego oznaczenia $q_n(t)$ dla tego rodzaju drgań] mamy wzór

$$(4.7) \quad q_n(t) = \frac{1}{\omega} (C_n \sin \omega t - D_n \cos \omega t),$$

gdzie

$$(4.8) \quad C_n = \frac{2(-1)^n M_0 \omega}{GJ_0 l \lambda_n^2} \frac{\left(\frac{G\lambda_n^2}{d} - \omega^2\right)(\beta^2 - \omega^2) + 2\beta^2 \omega^2}{\left(\frac{G\lambda_n^2}{d} - \omega^2\right)^2 + \beta^2 \omega^2}, \\ D_n = \frac{2(-1)^n M_0 \beta \omega^2}{GJ_0 l \lambda_n^2} \frac{\beta^2 + \omega^2 - \frac{2G\lambda_n^2}{d}}{\left(\frac{G\lambda_n^2}{d} - \omega^2\right)^2 + \beta^2 \omega^2}.$$

Nie podajemy wzorów szczegółowych na A_n oraz B_n ze względu na to, że nie zajmujemy się nimi w dalszych rozważaniach. Rozwiązanie opisujące drgania ustalone ma zatem na podstawie (3.4) postać

$$(4.9) \quad \varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{\omega} \sin \omega t - \frac{D_n}{\omega} \cos \omega t \right) \sin \lambda_n x + \\ + x \frac{M_0}{GJ_0} \left(\sin \omega t - \frac{\beta}{\omega} \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \right).$$

Postać tę można przekształcić wprowadzając amplitudę $A(x, \omega)$ i kąt przesunięcia fazowego $\delta(x, \omega)$:

$$(4.10) \quad \varphi(x, t) = A(x, \omega) \sin[\omega t + \delta(x, \omega)] + \frac{M_0 \beta}{GJ_0 \omega} x,$$

gdzie

$$(4.11) \quad A(x, \omega) = \left[\left(\frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x + \frac{M_0 x}{GJ_0} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \lambda_n x - \frac{M_0 \beta x}{GJ_0 \omega} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \delta(x, \omega) = - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \lambda_n x + \frac{M_0 \beta x}{GJ_0}}{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n x + \frac{M_0 \omega x}{GJ_0}}.$$

Zatem drgania ustalone mają częstość równą częstości momentu wymuszającego. Amplituda i kąt przesunięcia fazowego zależą od współrzędnej x położenia przekroju i od ω . Środek drgań zależy od x zgodnie z ostatnim składnikiem w (4.10). Na podstawie (4.8) kolejne wyrazy szeregów wchodzących do amplitudy $A(x, \omega)$ maleją ze wzrostem n jak $1/(2n-1)^4$. Z tego powodu można ograniczyć obliczenia do kilku pierwszych wyrazów obu szeregów występujących w (4.11)₁. Rozważymy oddzielnie wpływ dwu pierwszych składników występujących w (4.11)₁ szeregów:

$$(4.12) \quad A_1(x, \omega) = \left[\left(\frac{1}{\omega} C_1 \sin \pi x \frac{1}{2l} + \frac{M_0 x}{GJ_0} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega} D_1 \sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{M_0 \beta x}{GJ_0 \omega} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$A_2(x, \omega) = \left[\left(\frac{1}{\omega} C_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega} D_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Ustalmy $x=l$, tzn. opiszmy ruch swobodnego końca pręta. Na rys. 2 przedstawiono wykres obu funkcji (4.12) w zależności od bezwymiarowego parametru $\nu = \frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{d}{G}} \omega$,

dla dwóch przykładowych wartości parametru $\beta_1 = \frac{2l}{\pi} \sqrt{\frac{d}{G}} \beta$, $\beta_1 = 0,004$ i $\beta_1 = 0,01$.

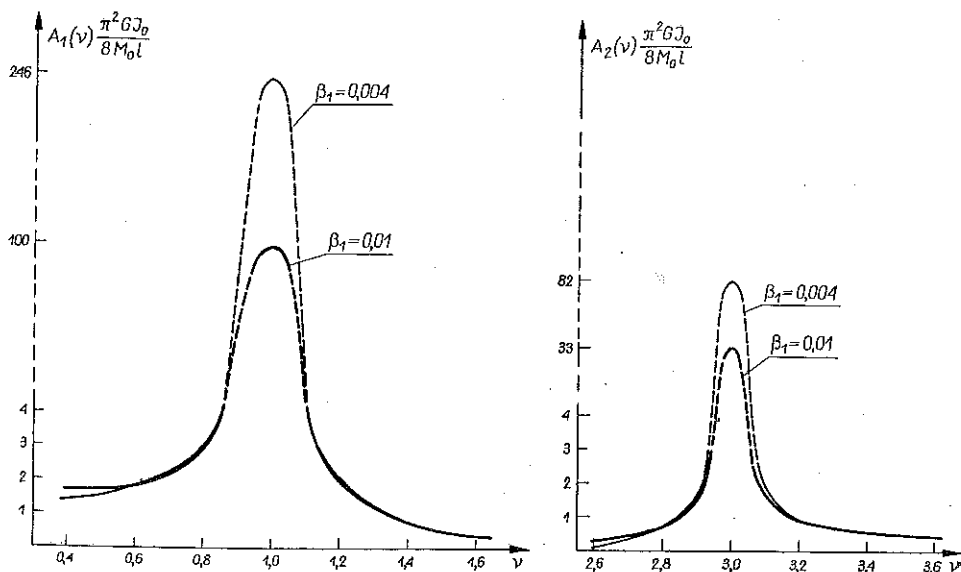
Z wykresu widać, że A_1 i A_2 posiadają wyraźne maksima: A_1 dla $\nu=1$, A_2 dla $\nu=3$, przy czym drugie maksimum jest trzy razy mniejsze od pierwszego. Widać również, że ze zmniejszaniem się wartości parametru β_1 większą rolę odgrywają sprężyste własności modelu ($\beta_1=0$ odpowiada samej sprężynie). Zatem maksymalne wartości A_1 i A_2 rosną, gdy wartość β_1 maleje.

Na wykresie 3 przedstawiliśmy inne przybliżenie amplitudy, zachowując łącznie dwa pierwsze wyrazy obydwu szeregów w (4.11)₁. Z rysunku widać, że wartości maksimów prawie nie ulegają zmianie. Kolejne przybliżenia amplitudy, uwzględniające dalsze wyrazy w obydwu szeregach, dałyby następne maksima.

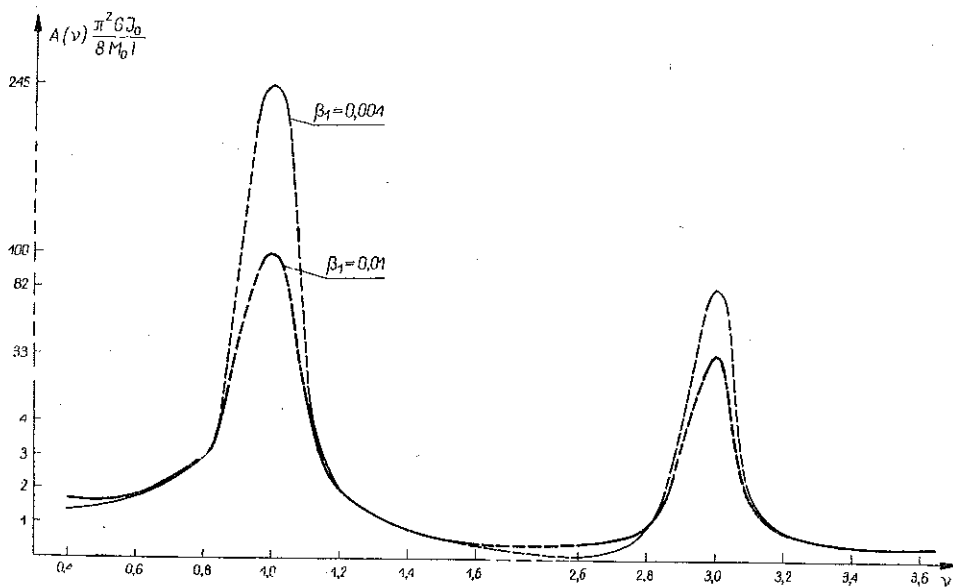
Model Kelvina-Voigta. Dla tego modelu

$$K(t-\theta) = -\eta \dot{\delta}(t-\theta) - G\delta(t-\theta), \quad \psi(0) = G + \eta \delta(0),$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją delta Diraca, a $\dot{\delta}(x)$ oznacza pochodną funkcji $\delta(x)$.



Rys. 2



Rys. 3

Równanie (3.2) można napisać w formie

$$(4.13) \quad GJ_0 F(t) + J_0 \eta \dot{F}(t) = M_0 \sin \omega t.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne, którego rozwiązaniem jest funkcja

$$(4.14) \quad F(t) = \frac{M_0}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)} \left(\eta \omega e^{-\frac{G}{\eta} t} + G \sin \omega t - \eta \omega \cos \omega t \right).$$

Równania (3.15) mają obecnie postać

$$(4.15) \quad \ddot{q}_n(t) + \frac{\lambda_n^2 \eta}{d} \dot{q}_n(t) + \frac{\lambda_n^2 G}{d} q_n(t) = \frac{2(-1)^n}{\lambda_n^2 l} \ddot{F}(t)$$

i są również równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Rozwiązanie otrzymujemy w postaci

$$(4.16) \quad q_n(t) = a_n e^{r_{1n}t} + b_n e^{r_{2n}t} + c_n \sin \omega t + d_n \cos \omega t + e_n e^{-\frac{G}{\eta}t},$$

gdzie a_n, b_n, c_n, d_n i e_n są stałymi oraz

$$r_{1,2n} = -\frac{\lambda_n^2 \eta}{2d} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4Gd}{\lambda_n^2 \eta^2}} \right).$$

Ogólne rozwiązanie problemu otrzymuje się przez wstawienie do (3.4) związków (4.14) i (4.16) oraz skorzystanie z zależności (3.12).

Zajmiemy się dokładniejszą analizą drgań ustalonych i odrzucimy wyrażenia wykładniczo zanikające z czasem. Wówczas

$$(4.17) \quad \varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sin \omega t + d_n \cos \omega t) \sin \lambda_n x + \\ + x \frac{M_0}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)} (G \sin \omega t - \eta \omega \cos \omega t),$$

gdzie otrzymane uprzednio stałe c_n i d_n mają postać

$$(4.18) \quad c_n = \frac{2(-1)^n M_0 \omega^2 d}{\lambda_n^2 J_0 l (G^2 + \eta^2 \omega^2)} \frac{\lambda_n^2 \eta^2 \omega^2 - G(\lambda_n^2 G - \omega^2 d)}{\lambda_n^4 \eta^2 \omega^2 + (\lambda_n^2 G - \omega^2 d)^2}, \\ d_n = \frac{2(-1)^n M_0 \omega^3 \eta d}{\lambda_n^2 J_0 l (G^2 + \eta^2 \omega^2)} \frac{2G\lambda_n^2 - \omega^2 d}{\lambda_n^4 \eta^2 \omega^2 + (\lambda_n^2 G - \omega^2 d)^2}.$$

Rozwiązanie można napisać nieco inaczej wprowadzając, jak uprzednio, amplitudę $\bar{A}(x, \omega)$ i kąt $\bar{\delta}(x, \omega)$ przesunięcia fazowego:

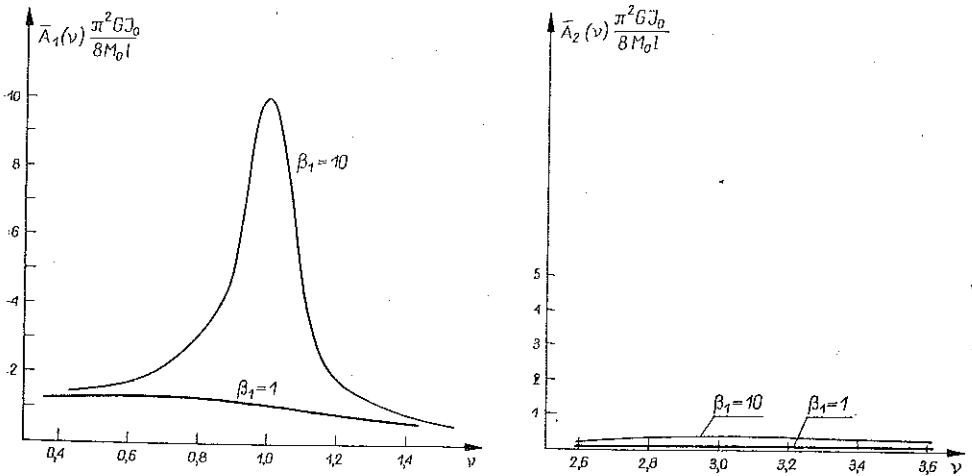
$$(4.19) \quad \bar{A}(x, \omega) = \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x + \frac{M_0 G x}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \lambda_n x - \frac{M_0 \eta \omega x}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \bar{\delta}(x, \omega) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \lambda_n x - \frac{M_0 \eta \omega x}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)}}{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x + \frac{M_0 G x}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)}}.$$

Wstawiając (4.19) do (4.17) otrzymujemy ostatecznie

$$(4.20) \quad \varphi(x, t) = \bar{A}(x, \omega) \sin[\omega t + \bar{\delta}(x, \omega)].$$

Zatem drgania odbywają się z częstością równą częstości momentu wymuszającego i są przesunięte w fazie o kąt $\bar{\delta}(x, \omega)$. Środkiem drgań dla całego pręta jest obecnie położenie odpowiadające kątowi $\varphi = 0$.

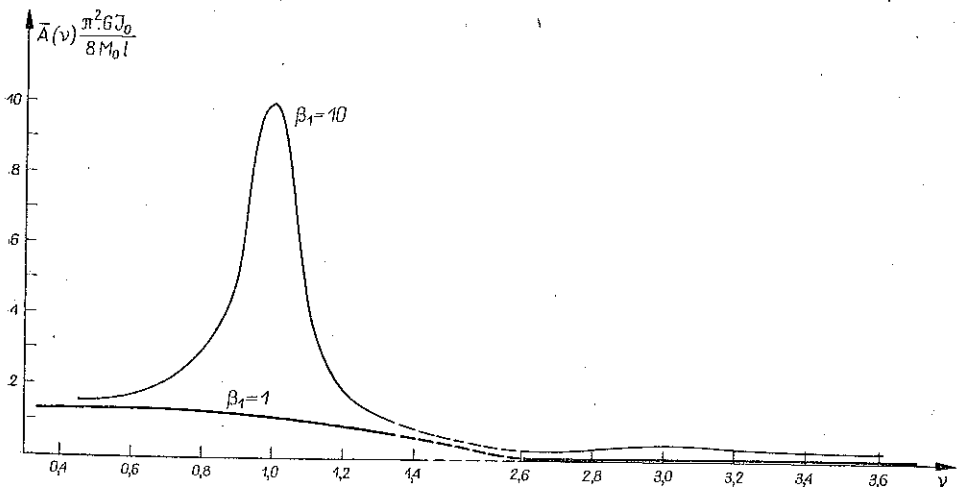


Rys. 4

Podobnie jak poprzednio kolejne wyrazy szeregów wchodzących do amplitudy $\bar{A}(x, \omega)$ maleją jak $1/(2n-1)^4$. Ponownie ograniczymy się do dwóch pierwszych wyrazów obu szeregów i przedstawimy na wykresach funkcje

$$(4.21) \quad \bar{A}_1(x, \omega) = \left\{ \left[c_1 \sin \frac{\pi x}{2l} + \frac{M_0 G x}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)} \right]^2 + \left[d_1 \sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{M_0 \eta \omega x}{J_0(G^2 + \eta^2 \omega^2)} \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$(4.22) \quad \bar{A}_2(x, \omega) = \left[\left(c_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} \right)^2 + \left(d_2 \sin \frac{3\pi x}{2l} \right)^2 \right]^{1/2}.$$



Rys. 5

Rozważymy drgania końcowego przekroju pręta. Rysunek 4 przedstawia wykresy obydwu wyrażeń w zależności od bezwymiarowego parametru ν (zdefiniowanego jak poprzednio) dla dwóch wartości parametru β_1 (również jak poprzednio): $\beta_1 = 1$, $\beta_1 = 10$. W tym modelu wyraźne maksimum wystąpiło jedynie dla $\beta_1 = 10$, a więc dla η dużo mniejszych niż dla modelu Maxwella. Tłumaczymy to tym, że dla modelu Kelvina-Voigta własności sprężyste odgrywają tym większą rolę, im η jest mniejsze. Przy dużym tłumieniu (β małe) w ogóle nie występują charakterystyczne wierzchołki. Dla $\beta_1 = 10$ \bar{A}_1 posiada maksimum dla $\nu = 1$, \bar{A}_2 posiada małe maksimum dla $\nu = 3$. Na rysunku 5 przedstawiliśmy wykres dla drugiego przybliżenia amplitudy. W tym przypadku wartości maksymalne również nie uległy zmianie.

Dziękujemy prof. dr Jadwidze HALAUNBRENNER za podsuniecie tematu pracy. Serdecznie dziękujemy prof. dr Kazimierzowi PISZCZKOWI za troskliwą opiekę oraz konsultacje z matematyki.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. BYCHAWSKI, *Introduction into theoretical and applied rheology*, Copenhagen 1968, preprint.
2. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1968.
3. W. POGORZELSKI, *Równania całkowe i ich zastosowania*, Warszawa 1953.
4. K. W. WAGNER, *Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a*, Warszawa 1960.
5. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, Москва 1962.

Резюме

ВЫНУЖДЕННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ИЗ ВЯЗКО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Работа касается вынужденных крутильных колебаний стержня из вязко-упругого материала. Рассматривается стержень постоянного, кругового сечения из материала без старения. Один конец стержня неподвижно закреплен, а второй конец находится под действием крутящего момента $M(t) = M_0 \sin \omega t$. Используя принцип суперпозиции Больцмана, получается уравнение крутильных колебаний стержня [уравнение (2.5)]. Предлагается общий и точный метод решения задачи.

Подробные расчеты проводились для двух простых реологических моделей Максвелла и Кельвина-Фойгта. Более точно исследовались только установившиеся колебания. Ввиду того, что последовательные выражения рядов для амплитуды колебания уменьшаются как $1/(2n-1)^4$, можно ограничить численные расчеты несколькими первыми выражениями рядов. Обсуждаются значения амплитуды колебаний, происходящие отдельно от двух первых выражений, а также амплитуды во втором приближении. На приложенных рисунках (от 2 до 5) показана амплитуда колебаний свободного конца стержня, в зависимости от безразмерного параметра ν , пропорционального ω для двух разных значений параметра β_1 , связанного с коэффициентом вязкости.

Summary

FORCED TWISTING VIBRATIONS OF A ROD MADE OF VISCO-ELASTIC MATERIAL

This paper concerns the forced twisting vibrations of a rod made of visco-elastic material. We have considered a rod having a constant, circular cross-section made of material without ageing. One end of the rod is immobilized, and a torque $M(t) = M_0 \sin \omega t$ acts on the second end of the rod. Utilizing Boltzmann's principle of superposition, we obtain the equation of twisting vibrations of the rod, Eq. (2.5) in the text. We present the general, exact method of solution of the problem.

We have performed detailed calculations for two simple rheological models—the Maxwell model and the Kelvin-Voigt model. A more accurate investigation has been made of steady vibrations only. Since the consecutive terms of the series involved in the amplitude of vibrations decrease following $1/(2n-1)^4$, it is possible to confine the numerical calculations to a few of the first terms of the series. The contributions to the amplitude of vibration are considered separately, originating from the first two terms and the amplitude in the second approximation. In the drawings (2 to 5) included, is represented the amplitude of vibration of the free end of the rod depending on the dimensionless parameter, proportional to ω , for two different values of the parameter β_1 , connected with the coefficient of viscosity.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1970 r.
