

ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO ZAGADNIEN PEŁZANIA
KOŁOWO CYLINDRYCZNYCH POWŁOK⁽¹⁾

SUMIO MURAKAMI⁽²⁾ (NAGOJA)

Ostatnie osiągnięcia w dziedzinie techniki kosmicznej i nuklearnej wymagają nie tylko stosowania najwyższej jakości stopów dobrze znoszących surowe warunki wysokich temperatur i ogromnych ciśnień, lecz wymagają również znalezienia analitycznych metod określenia stanu naprężenia i odkształcenia w różnego typu urządzeniach i elementach konstrukcyjnych. Odkształcenia tych urządzeń w czasie, nawet przy stałym obciążeniu zewnętrznym i stałej temperaturze, są na ogół bardzo znaczne. Ten stan deformacji nazywamy pełzaniem. Aby zapewnić wysoką sprawność i duże bezpieczeństwo konstrukcji i urządzeń, nieodzowne jest przy projektowaniu uwzględnienie odkształceń pełzania, występujących w całym okresie ich eksploatacji, a ponadto odkształceń sprężysto-plastycznych zachodzących w chwili obciążenia.

W wielu metalach stosowanych w praktyce inżynierskiej przy przyłożeniu w wysokiej temperaturze stałego obciążenia prędkość odkształcenia najpierw szybko maleje, potem dąży asymptotycznie do stałej wartości, a w końcu ponownie wzrasta i powoduje zniszczenie materiału. Te trzy fazy nazywamy odpowiednio pełzaniem przejściowym (zwanym też pełzaniem niestabilnym lub I stadium pełzania), pełzaniem ustalonym (II stadium pełzania) i pełzaniem przyspieszonym (III stadium pełzania). W niniejszej pracy rozważany jest przejściowy i ustalony stan pełzania powłoki kołowo-walcowej, będącej jednym z najlepszych przykładów wyżej wspomnianych urządzeń. Ostatnie stadium pełzania jest na ogół pomijane przy projektowaniu, gdyż jest związane ze stanem bardzo niestatecznym, występującym bezpośrednio przed zniszczeniem przez pełzanie.

Powyższe problemy od dawna przyciągały uwagę badaczy ze względu na ich duże możliwości zastosowań praktycznych. Niemniej ściśle rozwiązanie tych zagadnień jest bardzo kłopotliwe z powodu trudności matematycznych, których główną przyczynę stanowi nieliniowy charakter prawa pełzania. Prace dotychczasowe ograniczają się bądź do analizy przybliżonej, wynikającej z pewnych fizykalnych założeń upraszczających, bądź do teorii cienkich rur kołowych, pomijającej efekt

⁽¹⁾ Z angielskiego przetłumaczył J. Bejda.

⁽²⁾ Zastępca profesora w Uniwersytecie Nagoja, Chikusa-ku, Nagoja, Japonia, przebywający na stażu naukowym w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w roku akademickim 1969/1970.

podparcia końców powłoki, który jest bardzo istotny z punktu widzenia projektowania konstrukcji. Szybki rozwój w ostatnich latach maszyn cyfrowych pozwala na rozwiązanie tych problemów numerycznie. Dlatego w niniejszej pracy proponujemy rozwiązanie numeryczne metodą różnic skończonych. Pozwoli to wyjaśnić pewne ogólne właściwości pełzania powłok kołowo-walcowych, pracujących w warunkach wysokiej temperatury i dużych naprężeń.

W pierwszej części pracy przeprowadzono analizę przejściowego stanu pełzania powłok kołowo-walcowych przy założeniu potęgowego prawa pełzania oraz teorii pełzania Misesa-Misesa, Treski-Misesa, i Treski-Treski (por. str. 635). Przyjęto hipotezę wzmocnienia zależnego od odkształcenia (strain hardening) oraz wzmocnienia zależnego od czasu (time hardening). Stan odkształcenia pełzania i odpowiadający mu stan naprężenia jest analizowany dla różnej geometrii powłoki i różnych wielkości ciśnienia wewnętrznego.

Część druga z kolei dotyczy analizy ustalonego stanu pełzania powłok kołowo-walcowych przy założeniu potęgowego prawa pełzania i teorii typu Misesa-Misesa. Zaproponowano kombinowaną metodę rozwiązania zagadnienia, mianowicie procedurę iteracyjną w połączeniu z metodą różnic skończonych. Zbadano wpływ geometrii powłok i potęgowego wykładnika pełzania na stan naprężenia i prędkość odkształcenia. Otrzymane ściśle wyniki porównano również z istniejącymi rozwiązaniami dla powłoki sandwiczowej oraz przedyskutowano słuszność przyjęcia powłoki sandwiczowej.

Oznaczenia

- x, z, θ współrzędne ortogonalne (rys. 1),
- a, h, l średniony promień, grubość i długość powłoki walcowej,
- p ciśnienie,
- u, w składowa osiowa i promieniowa przemieszczenia,
- N_x, N_θ składowa osiowa i promieniowa siły membranowej,
- M_x, M_θ składowa osiowa i promieniowa momentu gnącego,
- σ, ϵ naprężenie i odkształcenie w stanie jednoosiowym,
- σ_e, ϵ_e naprężenie efektywne i odkształcenie efektywne,
- σ_x, σ_θ składowa osiowa i obwodowa naprężenia,
- $\epsilon_x, \epsilon_\theta$ składowa osiowa i obwodowa odkształcenia,
- s_{ij}, e_{ij} dewiatory stanu naprężenia i odkształcenia,
- t czas,
- E, ν moduł Younga i współczynnik Poissona,
- A, n, m stałe pełzania,
- N liczba przedziałów połowy długości powłoki,
- g $1/N$ odległość między węzłami siatki na osi ξ (rys. 2),
- \hat{p} dowolna wartość ciśnienia służąca do określenia wielkości bezwymiarowych,
- c wskaźnik odnoszący się do pełzania,
- i wskaźnik odnoszący się do i -tego węzła siatki,
- (\cdot) pochodna względem czasu t ,
- k, n stałe pełzania,

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{z}{h}, \quad U = \frac{u}{pa}, \quad W = \frac{w}{pa^2}, \quad E_x = \frac{\varepsilon_x}{pa}, \quad E_\theta = \frac{\varepsilon_\theta}{pa},$$

$$\frac{E_c}{Eh} = \frac{\varepsilon_c}{pa}, \quad S_x = \frac{\sigma_x}{pa}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{pa}, \quad S_e = \frac{\sigma_e}{pa}, \quad n_x = \frac{N_x}{pa}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{pa},$$

$$m_x = \frac{M_x}{pah}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{pah}, \quad \alpha^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} \frac{l^2}{ah}, \quad P = \frac{p}{\hat{p}},$$

α parametr określający kształt powłoki [14].

W części pierwszej wielkości bezwymiarowe odniesione są do wartości ciśnienia $p = \hat{p}$.

CZĘŚĆ I. PRZEJŚCIOWY STAN PEŁZANIA POWŁOK KOŁOWO-WALCOWYCH

1. Wstęp

Przy projektowaniu na pełzanie różnego rodzaju aparatury pracującej w niesprzyjających warunkach wysokiej temperatury i dużych naprężeń, gdy projektowany czas jej eksploatacji jest stosunkowo krótki, początkowa faza pełzania zajmuje jego większą część i dlatego nie może być nigdy pomijana. Przykładami takiej aparatury są naczynia poddane ciśnieniu wewnętrznemu. Informacje dotyczące ich stanu deformacji w krótkim przedziale czasu są często bardzo pożądane, a ilość publikowanych na ten temat prac jest stosunkowo bardzo skąpa. W szczególności odczuwa się dotąd zupełny brak ścisłej analizy przejściowego stanu pełzania dla powłok kołowo-walcowych obciążonych ciśnieniem wewnętrznym [1], nie licząc oczywiście kilku prac poświęconych wydrążonym walcom kołowym [2–4].

W pracach wcześniejszych [5] autor wraz ze współpracownikami analizował przejściowy stan pełzania skręcanych kwadratowych prętów zastępując wyjściowy układ równań różniczkowych odpowiednim układem równań różnicowych. Powstały w ten sposób dla wszystkich punktów siatki pokrywającej pręt układ równań liniowych całkowano względem czasu. Taka metoda może być oczywiście zastosowana również do innych problemów brzegowych.

W pierwszej części niniejszej pracy rozważany jest problem pełzania kołowo-walcowych powłok poddanych wewnętrznemu ciśnieniu przy różnych warunkach obciążenia zewnętrznego. Do rozwiązania zagadnienia zastosowano wyżej wspomnianą metodę przyjmując potęgowe prawo pełzania oraz teorię pełzania typu Misesa-Misesa, Treski-Misesa i Treski-Treski. Przyjęto ponadto hipotezę wzmocnienia zależnego od odkształcenia i wzmocnienia zależnego od czasu. W szczególności wiele uwagi poświęcono dokładności metody. Analogiczne podejście do rozwiązania problemu pełzania powłok kulistych, przyjmując hipotezę wzmocnienia zależnego od czasu, zaadoptował ostatnio R. K. PENNY [6].

Głównym celem niniejszych rozważań jest wyjaśnienie ogólnych własności pełzania powłok kołowo-walcowych ze szczególnym uwzględnieniem wpływu geo-

metrii powłoki; dalszym — porównanie i określenie zakresu stosowalności wyżej wspomnianych hipotez wzmocnienia w przypadku przejściowego stanu pełzania powłok. Ponieważ wzmocnienie zależne od odkształcenia oraz wzmocnienie zależne od czasu są bardzo często stosowane do zagadnień pełzania różnego typu konstrukcji, a ponadto istnieje powszechne przekonanie, że pierwsze posiada uzasadnienie fizykalne, a drugie cechuje się łatwością matematyczną, ich rozbieżność lub poprawność były przedmiotem ciągłych dociekań [7]. Badania te były jednakże prowadzone głównie w jednorodnym stanie naprężenia przy pomocy cienkich rurkowych próbek, a zatem poprawność powyższych hipotez wzmocnieniowych nie może być przeniesiona na praktyczne problemy inżynierskie. W konsekwencji interesujące jest zbadanie ilościowej różnicy między tymi hipotezami na przykładzie kołowo-walcowych powłok.

Innym jeszcze celem tej pracy jest wykazanie różnic rozwiązań analitycznych otrzymanych przy przyjęciu różnych teorii pełzania i wybranie odpowiedniej do projektowania na pełzanie powłok walcowych, poddanych ciśnieniu wewnętrznemu. Najbardziej znane formy naprężenia efektywnego (odkształcenia efektywnego) i praw płynięcia stosowane w wieloosiowych zagadnieniach pełzania są typu MISESA i TRESKI [8 i 9] i zwykle wśród ich czterech kombinacji w praktyce stosowane są najczęściej teorie pełzania typu Misesa-Misesa, Treski-Treski i Treski-Misesa (efektywne naprężenie Treski i prawo płynięcia Misesa). Teoria pełzania typu Misesa-Misesa jest najbardziej popularna i przyjmowana w większości dotychczasowych prac.

A. M. WAHL [11] na podstawie tych trzech teorii przeprowadził szereg badań dotyczących pełzania wirujących krążków, przedyskutował różnice między nimi i porównał wyniki z odpowiednimi rezultatami eksperymentalnymi. Zgodnie z jego badaniami teoria Treski-Misesa pokrywa się dobrze z wynikami eksperymentalnymi, podczas gdy teoria Misesa-Misesa daje mniejsze wartości odkształceń pełzania i dlatego z punktu widzenia teorii pełzania daje wyniki po stronie niebezpiecznej. Podobne badania i wyniki dla zagadnień pełzania w dwuosiowym stanie naprężenia uzyskane zostały również w pracach [12 i 13]. Dlatego też w tej części pracy problem przejściowego stanu pełzania powłok kołowo-walcowych, poddanych ciśnieniu wewnętrznemu jest badany dla trzech rodzajów teorii pełzania i przedyskutowane są szczegółowo zachodzące między nimi różnice.

2. Równania podstawowe

2.1. Związki podstawowe. Rozważmy cienką powłokę walcową o uśrednionym promieniu a , grubości h i długości l , poddaną ciśnieniu wewnętrznemu p . Przyjmijmy ortogonalny układ współrzędnych x, θ, z z początkiem układu w płaszczyźnie środkowej w środku powłoki i współrzędną promieniową z , skierowaną do wewnątrz (rys. 1). Niech składowe przemieszczenia w kierunku osiowym i promieniowym będą oznaczone odpowiednio przez u i w , a siła membranowa i moment gnący w kierunku osiowym i promieniowym przez N_x, N_θ, M_x i M_θ . Jeśli przyjmiemy

klasyczną hipotezę Love'go-Kirchhoffa, otrzymamy następujące równania równowagi i związki kinetyczne dla nieskończone małych osiowo-symetrycznych odkształceń:

$$(1.1) \quad \frac{dN_x}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_\theta}{a} = P$$

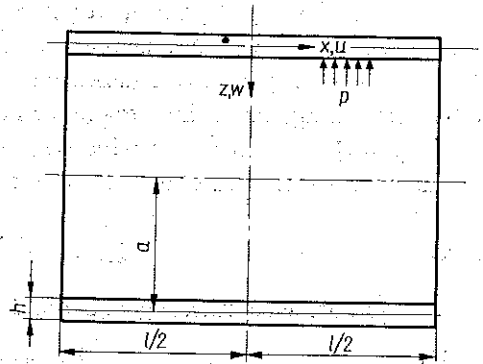
oraz

$$(1.2) \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} - 2 \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{w}{a},$$

gdzie ε_x i ε_θ oznaczają składowe stanu odkształcenia w kierunku x i θ . Wprowadzone wyżej założenie małych ugięć w przypadku powłok walcowych może być stosowane w szerokim zakresie odkształceń, co stanowi podstawową różnicę między powłokami i płytami.

Przyjmuje się, że całkowita prędkość odkształcenia może być wyrażona przez sumę części sprężystej i części pełzania:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_\theta) + \dot{\varepsilon}_{xc}, \\ \dot{\varepsilon}_\theta &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_\theta - \nu \dot{\sigma}_x) + \dot{\varepsilon}_{\theta c}, \end{aligned}$$



Rys. 1. Cienka kołowo walcowa powłoka i nomenklatura

gdzie $\dot{\sigma}_x$, $\dot{\sigma}_\theta$ oraz $\dot{\varepsilon}_{xc}$, $\dot{\varepsilon}_{\theta c}$ oznaczają składowe prędkości naprężenia i prędkości odkształcenia pełzania, a E i ν są odpowiednio modułem Younga i współczynnikiem Poissona. Jeśli układ (1.3) rozwiążemy względem $\dot{\sigma}_x$, $\dot{\sigma}_\theta$ oraz wyrazimy $\dot{\varepsilon}_x$ i $\dot{\varepsilon}_\theta$ przez u , w za pomocą (1.2), to otrzymamy następujące formuły:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{d\dot{u}}{dx} - \nu \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \right) - \nu \frac{\dot{w}}{a} - (\dot{\varepsilon}_{xc} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta c}) \right], \\ \dot{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\frac{\dot{w}}{a} + \nu \left(\frac{d\dot{u}}{dx} - \nu \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \right) - (\dot{\varepsilon}_{\theta c} + \nu \dot{\varepsilon}_{xc}) \right]. \end{aligned}$$

Z kolei całkowanie równań (1.4) prowadzi do następujących wzorów na prędkość siły membranowej \dot{N}_x , \dot{N}_θ i momentu gnącego \dot{M}_x , \dot{M}_θ :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{N}_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{d\dot{u}}{dx} - \nu \frac{\dot{w}}{a} \right) - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\varepsilon}_{xc} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta c}) dz, \\ \dot{N}_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_\theta dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{\dot{w}}{a} + \nu \frac{d\dot{u}}{dx} \right) - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\varepsilon}_{\theta c} + \nu \dot{\varepsilon}_{xc}) dz. \end{aligned}$$

oraz

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \dot{M}_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_x z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\varepsilon}_{xc} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta c}) z dz, \\ \dot{M}_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \dot{\sigma}_\theta z dz = -\frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{\varepsilon}_{\theta c} + \nu \dot{\varepsilon}_{xc}) z dz. \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że związek między odkształceniem pełzania w stadium przejściowego pełzania ε_c , czasem t oraz naprężeniem σ w jednoosiowym stanie naprężenia ma następującą postać:

$$(1.7) \quad \varepsilon_c = A \sigma^n t^m,$$

gdzie A , n i m są stałymi materiałowymi. Związek (1.7) jest poprawny dla większości metali w podwyższonej temperaturze przy względnie niskich naprężeniach [8, 9 i 10]. Jeśli zróżniczkujemy (1.7) względem czasu, napiszemy prędkość odkształcenia zgodnie z hipotezami wzmocnienia zależnego od odkształcenia i od czasu [8 i 9], to otrzymamy odpowiednio

dla wzmocnienia zależnego od odkształcenia

$$(1.8) \quad \dot{\varepsilon}_c = mA^m \sigma^m \varepsilon_c^{\frac{m-1}{m}},$$

dla wzmocnienia zależnego od czasu

$$(1.8') \quad \dot{\varepsilon}_c = mA \sigma^n t^{m-1}.$$

Hipotezy powyższe postulują, że spadek prędkości pełzania, tzn. wzmocnienia materiału jest spowodowany jedynie przyrostem odkształcenia pełzania lub upływem czasu, a zatem prędkość pełzania w dowolnej chwili może być wyrażona jako funkcja naprężenia i odkształcenia pełzania lub naprężenia i czasu, lecz nie historii obciążenia. Innymi słowy postulują one, że przejściowy stan odkształcenia pełzania jest quasi-statyczny. Dlatego też mimo że związek (1.7) został wyprowadzony dla stałej wartości naprężenia, zależności (1.8) mogą być również stosowane w przypadku mało zmieniających się naprężeń.

Jeśli założymy izotropię i nieściśliwość materiału, powyższy związek (1.8) może być rozszerzony na wieloosiowy stan pełzania. Zatem zgodnie z trzema wyżej omówionymi teoriami pełzania składowe prędkości odkształcenia: osiowa $\dot{\varepsilon}_{xc}$ i obwodowa $\dot{\varepsilon}_{\theta c}$, występujące w równaniach (1.3), mogą być wyrażone następująco [8 i 9].

W teorii Misesa-Misesa i teorii Treski-Misesa dla wzmocnienia zależnego od odkształcenia

$$(1.9) \quad \dot{\varepsilon}_{xc} = mA^m \sigma_e^m \varepsilon_{ce}^{\frac{m-1}{m}} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right), \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = mA^m \sigma_e^m \varepsilon_{ce}^{\frac{m-1}{m}} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_x \right);$$

dla wzmocnienia zależnego od czasu

$$(1.9') \quad \dot{\varepsilon}_{xc} = mA \sigma_e^{n-1} t^{m-1} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right), \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = mA \sigma_e^{n-1} t^{m-1} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_x \right),$$

gdzie σ_e i ε_e oznaczają efektywne naprężenie i efektywne odkształcenie pełzania i są opisane następującymi zależnościami:

w teorii Misesa-Misesa,

$$(1.10) \quad \sigma_e = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\theta + \sigma_\theta^2)^{1/2}, \quad \varepsilon_{ce} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{xc}^2 + \varepsilon_{xc} \varepsilon_{\theta c} + \varepsilon_{\theta c}^2)^{1/2};$$

w teorii Treski-Misesa

$$(1.10') \quad \sigma_e = \text{Max} \{ |\sigma_x|, |\sigma_x - \sigma_\theta|, |\sigma_\theta| \}, \quad \varepsilon_{ce} = \frac{2}{3} \text{Max} \{ |2\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{\theta c}|, |\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{\theta c}|, |2\varepsilon_{\theta c} + \varepsilon_{xc}| \};$$

w teorii Treski-Treski

$$(1.11) \quad \begin{array}{ll} \sigma_x > \sigma_\theta > 0: & \dot{\varepsilon}_{xc} = c, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = 0; \quad \sigma_\theta > \sigma_x > 0: \quad \dot{\varepsilon}_{xc} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = c; \\ \sigma_x > 0 > \sigma_\theta: & \dot{\varepsilon}_{xc} = c, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = -c; \quad \sigma_\theta > 0 > \sigma_x: \quad \dot{\varepsilon}_{xc} = -c, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = c; \\ 0 > \sigma_x > \sigma_\theta: & \dot{\varepsilon}_{xc} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = -c; \quad 0 > \sigma_\theta > \sigma_x: \quad \dot{\varepsilon}_{xc} = -c, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta c} = 0, \end{array}$$

gdzie dla wzmocnienia zależnego od odkształcenia

$$(1.12) \quad c = mA^m \sigma_e^m \varepsilon^{\frac{m-1}{m}},$$

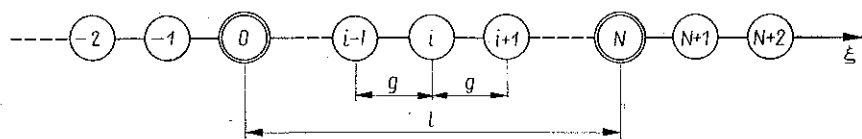
a dla wzmocnienia zależnego od czasu

$$(1.12') \quad c = mA \sigma_e^n t^{m-1}$$

oraz gdzie σ_e i ε_{ce} mają postać

$$\sigma_e = \text{Max} \{ |\sigma_x|, |\sigma_x - \sigma_\theta|, |\sigma_\theta| \}, \quad \varepsilon_{ce} = \frac{1}{2} \text{Max} \{ |2\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{\theta c}|, |\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{\theta c}|, |2\varepsilon_{\theta c} + \varepsilon_{xc}| \}.$$

2.2. Równania wyjściowe w przemieszczeniach. W dalszych obliczeniach i dyskusji rezultatów wygodnie jest wprowadzić określone wcześniej (por. str. 631) zmienne bezwymiarowe. Ciśnienie p z definicji jest dowolnym ciśnieniem, a α parametrem



Rys. 2. Siatka jednowymiarowa

określającym kształt kołowo-walcowej powłoki [14]. Następnie pokryjmy oś ξ jednowymiarową siatką o skończonym przedziale g tak, jak to pokazano na rys. 2 i zastąpmy pochodne przez zwykłe określone niżej różnice środkowe [15]:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)_i &= \frac{1}{2g} (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) + O(g^2), \\ \left(\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} \right)_i &= \frac{1}{g^2} (\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}) + O(g^2), \\ \left(\frac{d^4\Phi}{d\xi^4} \right)_i &= \frac{1}{g^4} (\Phi_{i+2} - 4\Phi_{i+1} + 6\Phi_i - 4\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}) + O(g^2), \end{aligned}$$

gdzie wskaźnik i odnosi się do wartości funkcji w punkcie $\xi = ig$. Wpływ błędu obciążenia $O(g^2)$ na wyniki numeryczne może być zbadany przez jednoczesne przeprowadzenie obliczeń dla różnych wartości g i porównanie otrzymanych rezultatów. Zatem związki powyższe prowadzą do następujących zależności:

1) równań równowagi (1.1)

$$(1.14) \quad \begin{aligned} & (\dot{n}_x)_{i+1} - (\dot{n}_x)_{i-1} = 0, \\ & \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\alpha^2 g^2} \{(\dot{m}_x)_{i+1} - 2(\dot{m}_x)_i + (\dot{m}_x)_{i-1}\} + (\dot{n}_\theta)_i = \dot{p}. \end{aligned}$$

2) wzorów na składowe odkształcenia pełzania (1.9), (1.10) i (1.11).

Teoria Misesa-Misesa i teoria Treski-Treski dla wzmocnienia zależnego od odkształcenia prowadzi do wzorów

$$(1.15) \quad \begin{aligned} (\dot{E}_{xc})_i &= m(EA)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\hat{p}\alpha}{h}\right)^{\frac{n-1}{m}} (S_e)_i^{\frac{n-m}{m}} (E_{ce})_i^{\frac{m-1}{m}} \left[(S_x)_i - \frac{1}{2}(S_\theta)_i \right], \\ (\dot{E}_{\theta c})_i &= m(EA)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\hat{p}\alpha}{h}\right)^{\frac{n-1}{m}} (S_e)_i^{\frac{n-m}{m}} (E_{ce})_i^{\frac{m-1}{m}} \left[(S_\theta)_i - \frac{1}{2}(S_x)_i \right]; \end{aligned}$$

dla wzmocnienia zależnego od czasu

$$(1.15') \quad \begin{aligned} (\dot{E}_{xc})_i &= m(EA) \left(\frac{\hat{p}\alpha}{h}\right)^{n-1} (S_e)_i^{n-1} t^{m-1} \left[(S_x)_i - \frac{1}{2}(S_\theta)_i \right], \\ (\dot{E}_{\theta c})_i &= m(EA) \left(\frac{\hat{p}\alpha}{h}\right)^{n-1} (S_e)_i^{n-1} t^{m-1} \left[(S_\theta)_i - \frac{1}{2}(S_x)_i \right], \end{aligned}$$

gdzie w teorii Misesa-Misesa

$$(1.16) \quad S_e = |S_x^2 - S_x S_\theta + S_\theta^2|^{1/2}, \quad E_{ce} = \frac{2}{\sqrt{3}} (E_{xc}^2 + E_{xc} E_{\theta c} + E_{\theta c}^2)^{1/2};$$

a w teorii Treski-Misesa

$$(1.16') \quad \begin{aligned} (S_e)_i &= \text{Max} \{ |(S_x)_i|, |(S_x)_i - (S_\theta)_i|, |(S_\theta)_i| \}, \\ (E_{ce})_i &= \frac{2}{3} \text{Max} \{ |2(E_{xc})_i + (E_{\theta c})_i|, |(E_{xc})_i - (E_{\theta c})_i|, |2(E_{\theta c})_i + (E_{xc})_i| \}. \end{aligned}$$

Teoria Treski-Treski prowadzi do wzorów

$$(1.17) \quad \begin{aligned} S_x > S_\theta > 0: & \quad (\dot{E}_{xc})_i = C_i, \quad (\dot{E}_{\theta c})_i = 0; \\ S_\theta > S_x > 0: & \quad (\dot{E}_{xc})_i = 0, \quad (\dot{E}_{\theta c})_i = C_i; \\ S_x > 0 > S_\theta: & \quad (\dot{E}_{xc})_i = C_i, \quad (\dot{E}_{\theta c})_i = -C_i; \\ S_\theta > 0 > S_x: & \quad (\dot{E}_{xc})_i = -C_i, \quad (\dot{E}_{\theta c})_i = C_i; \\ 0 > S_x > S_\theta: & \quad (\dot{E}_{xc})_i = 0, \quad (\dot{E}_{\theta c})_i = -C_i; \\ 0 > S_\theta > S_x: & \quad (\dot{E}_{xc})_i = -C_i, \quad (\dot{E}_{\theta c})_i = 0, \end{aligned}$$

gdzie dla wzmocnienia zależnego od odkształcenia

$$c_i = m(EA)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{\frac{n-1}{m}} (S_e)_i^{\frac{n}{m}} (E_{ce})_i^{\frac{m-1}{m}},$$

a dla wzmocnienia zależnego od czasu

$$c_i = m(EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} (S_e)^n t^{n-1}$$

oraz

$$(S_e)_i = \text{Max} \{ |(S_x)_i|, |(S_x)_i - (S_\theta)_i|, |(S_\theta)_i| \},$$

$$(E_{ce})_i = \frac{1}{2} \text{Max} \{ |2(E_{xc})_i + (E_{\theta c})_i|, |(E_{xc})_i - (E_{\theta c})_i|, |2(E_{\theta c})_i + (E_{xc})_i| \}.$$

3) Składowe odkształcenia (1.2)

$$(1.18) \quad (\dot{E}_x)_i = \frac{1}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (\dot{W}_{i+1} - 2\dot{W}_i + \dot{W}_{i-1}) \eta,$$

$$(\dot{E}_\theta)_i = -\dot{W}_i.$$

4) Składowe naprężenia (1.4)

$$(1.19) \quad (\dot{S}_x)_i = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \frac{1}{\alpha^2 g^2} \times \right. \\ \left. \times (\dot{W}_{i+1} - 2\dot{W}_i + \dot{W}_{i-1}) \eta - \nu \dot{W}_i \right] - \frac{1}{1-\nu^2} [(\dot{E}_{xc})_i + \nu(\dot{E}_{\theta c})_i],$$

$$(\dot{S}_\theta)_i = \frac{1}{1-\nu^2} \left[-\dot{W}_i + \frac{\nu}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \frac{\nu}{\alpha^2 g^2} \times \right. \\ \left. \times (\dot{W}_{i+1} - 2\dot{W}_i + \dot{W}_{i-1}) \eta \right] - \frac{1}{1-\nu^2} [(\dot{E}_{\theta c})_i + \nu(\dot{E}_{xc})_i].$$

5) Składowe siły membranowej (1.5)

$$(1.20) \quad (\dot{n}_x)_i = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) - \nu \dot{W}_i \right] - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \dot{Q}_i,$$

$$(\dot{n}_\theta)_i = \frac{1}{1-\nu^2} \left[-\dot{W}_i + \frac{\nu}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) \right] - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \dot{R}_i,$$

gdzie

$$(1.20') \quad \dot{Q}_i = \int_{-1}^1 [(\dot{E}_{xc})_i + \nu(\dot{E}_{\theta c})_i] d\eta, \quad \dot{R}_i = \int_{-1}^1 [(\dot{E}_{\theta c})_i + \nu(\dot{E}_{xc})_i] d\eta.$$

6. Składowe momentu gnącego (1.6)

$$(1.21) \quad (\dot{m}_x)_i = -\frac{1}{4\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (\dot{W}_{i+1} - 2\dot{W}_i + \dot{W}_{i-1}) - \frac{1}{4(1-\nu^2)} \dot{F}_i,$$

$$(\dot{m}_\theta)_i = -\frac{\nu}{4\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (\dot{W}_{i+1} - 2\dot{W}_i + \dot{W}_{i-1}) - \frac{1}{4(1-\nu^2)} \dot{G}_i,$$

gdzie

$$(1.21') \quad \dot{F}_i = \int_{-1}^1 [(\dot{E}_{xc})_i + \nu(\dot{E}_{\theta c})_i] \eta d\eta, \quad \dot{G}_i = \int_{-1}^1 [(\dot{E}_{\theta c})_i + \nu(\dot{E}_{xc})_i] \eta d\eta.$$

Z równowagi statycznej w kierunku osiowym siła osiowa $(n_x)_i$ może być określona jako równa zero (koniec otwarty) lub $1/2P$ (koniec zamknięty). Zatem równanie równowagi (1.5) wraz z równaniami (1.20) i (1.21) prowadzi do następującego układu równań różnicowych:

$$\frac{1}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) - \nu \dot{W}_i = (1-\nu^2) \mu + \frac{1}{2} \dot{Q}_i$$

(gdy $\mu=0$, koniec otwarty; gdy $\mu=1/2P$, koniec zamknięty),

$$(1.22) \quad \frac{\nu}{g} (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_{i-1}) - \dot{W}_i - \frac{1-\nu^2}{4} \frac{1}{\alpha^4 g^4} (\dot{W}_{i+2} - 4\dot{W}_{i+1} + 6\dot{W}_i - 4\dot{W}_{i-1} + \dot{W}_{i-2}) = (1-\nu^2) \dot{P} + \left[\frac{\sqrt{3}(1-\nu^2)}{4} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (\dot{F}_{i+1} - 2\dot{F}_i + \dot{F}_{i-1}) + \frac{1}{2} \dot{R}_i \right].$$

Warunki brzegowe (1.22) są następujące:

brzeg zamocowany

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \xi=0: & \quad \dot{U}_0=0, \dot{U}_1+\dot{U}_{-1}=0, \dot{W}_1-\dot{W}_{-1}=0, \dot{W}_2-\dot{W}_{-2}=0, \\ \xi=1: & \quad \dot{W}_N=0, \dot{W}_{N+1}-\dot{W}_{N-1}=0; \end{aligned}$$

brzeg swobodnie podparty

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \xi=0: & \quad \dot{U}_0=0, \dot{U}_1+\dot{U}_{-1}=0, \dot{W}_1-\dot{W}_{-1}=0, \dot{W}_2-\dot{W}_{-2}=0, \\ \xi=1: & \quad \dot{W}_N=0, (\dot{m}_x)_N=0. \end{aligned}$$

Ostatni związek (1.23) może być również wyrażony w postaci

$$(1.23') \quad \dot{W}_{N+1} - \dot{W}_{N-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\nu^2}} \alpha^2 g^2 \dot{F}_N = 0.$$

Równania (1.22) wraz z równaniami (1.23) stanowią układ liniowych równań o $(2N+1)$ zmiennych \dot{U}_i ($i=1, 2, \dots, N+1$) i \dot{W}_i ($i=0, 1, \dots, N-1, N+1$), które mogą być napisane w postaci macierzowej

$$(1.24) \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{B}(t).$$

Wyrażenia na A , $\dot{X}(t)$ i $B(t)$ są podane w Dodatku I na stronie 673. Ponieważ macierz A nie zależy od czasu, przeto $\dot{X}(t)$ w dowolnej chwili t może być otrzymane przez mnożenie $B(t)$ przez macierz odwrotną do macierzy A pod warunkiem, że była ona znana na początku obliczeń.

W szczególnym przypadku długich powłok walcowych stan odkształcenia w ich części środkowej jest równomiernie rozłożony w kierunku osiowym. W rezultacie ta część powłoki może być traktowana jak długa cienka rura kołowa, dla której można otrzymać rozwiązanie w postaci zamkniętej. Na przykład dla walca z końcami zamkniętymi składowe naprężenia mają postać

$$(1.25) \quad S_x = 1/2, \quad S_e = 1,$$

a zatem ugięcie w czasie t prowadzi do następujących rozwiązań:
w teorii Misesa-Misesa

$$(1.26) \quad W = - \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) + \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{n+1}{2}} (EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} t^m \right\};$$

w teorii Treski-Misesa

$$(1.26') \quad W = - \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) + \left(\frac{3}{4} \right) (EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} t^m \right\};$$

w teorii Treski-Treski

$$(1.26'') \quad W = - \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right) + (EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} t^m \right\}.$$

3. Metoda obliczeń

Pierwszym krokiem obliczeń numerycznych jest określenie odkształceń sprężystych, odpowiadających danemu ciśnieniu. Odkształcenia te stanowią warunek początkowy dla dalszych obliczeń. Równaniami wyjściowymi dla stanu sprężystego mogą być równania (1.8)–(1.24), o ile wyrazy zawierające prędkość pełzania przyjmiemy za równe zero i opuścimy kropki nad poszczególnymi symbolami.

Prędkość pełzania w pewnej chwili t może być obliczona ze związków (1.15)–(1.17) ze znanych w poprzedniej chwili wartości naprężenia i odkształcenia pełzania. W rezultacie U_i i W_i są określone wzorami (1.23) i (1.24). Wykorzystując te wartości prędkości pozostałych zmiennych otrzymuje się z zależności (1.18)–(1.21). Zatem poszukiwane funkcje w każdej następnej chwili t mogą być określone drogą numerycznego całkowania względem czasu znalezionych uprzednio ich prędkości.

W chwili $t=0$ (tzn. gdy $\varepsilon_{ec}=0$) prędkość pełzania przyjmuje jednakże wartość nieskończoną, co jest widoczne bezpośrednio z równań (1.15)–(1.17), i wyżej opisana procedura upada. Celem uniknięcia tej trudności wybieramy szczególnie krótki przedział czasu $0 \leq t \leq t_0$ bezpośrednio po obciążeniu i w tym przedziale obliczamy przyrosty poszukiwanych wielkości całkując równania wyjściowe zamiast

wyznaczać ich prędkości. Jeśli przyrost naprężenia w tym przedziale czasu jest dostatecznie mały w porównaniu do wartości naprężenia w chwili $t=0$, tzn. taki, że możemy przyjąć stałą wartość naprężenia, to przyrosty odkształceń pełzania mogą być obliczone przez całkowanie równań (1.15) oraz (1.17) i wyrażone niezależnie od hipotez wzmocnienia w sposób następujący:

w teorii Misesa i teorii Treski-Misesa

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \Delta E_{xc} &= (EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} S_{0e}^{n-1} \Delta t^m \left(S_{x0} - \frac{1}{2} S_{\theta 0} \right), \\ \Delta E_{\theta c} &= (EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} S_{0e}^{n-1} \Delta t^m \left(S_{\theta 0} - \frac{1}{2} S_{x0} \right), \end{aligned}$$

gdzie w przypadku teorii Misesa-Misesa

$$(1.28) \quad S_{0e} = (S_{x0}^2 - S_{x0} S_{\theta 0} + S_{\theta 0}^2)^{1/2},$$

a w przypadku teorii Treski-Misesa

$$(1.28') \quad S_{0e} = \text{Max} \{ |S_{x0}|, |S_{x0} - S_{\theta 0}|, |S_{\theta 0}| \}.$$

W teorii Treski-Treski (tzn. gdy $S_{x0} < S_{\theta 0} < 0$)

$$(1.29) \quad \Delta E_{xc} = (EA) \left(\frac{\hat{p}a}{h} \right)^{n-1} S_{0e}^n t^m, \quad \Delta E_{\theta c} = 0,$$

gdzie

$$S_{0e} = \text{Max} \{ |S_{x0}|, |S_{x0} - S_{\theta 0}|, |S_{\theta 0}| \}.$$

W powyższych wzorach S_{x0} i $S_{\theta 0}$ oznaczają początkowe wartości naprężenia. Pozostałe związki, tzn. (1.18) – (1.24), również powinny być scałkowane względem czasu, ale formalnie pozostaną one niezmiennione. Zatem przyrosty poszukiwanych wielkości mogą być obliczone z równań (1.18) – (1.24) w sposób analogiczny do przytoczonego wyżej, o ile tylko związki (1.15) – (1.17) zostaną zastąpione związkami (1.27) – (1.29). W obliczeniach numerycznych przeprowadzonych w tej pracy przyjęta wartość $t_0 = 10^{-5}$ godzin okazała się wystarczająco dobra.

Numeryczne całkowanie względem czasu wyżej wspomnianych prędkości poszukiwanych wielkości wykonano metodą Runge-Kutta-Gilla [16], a równania (1.20') i (1.21') rozwiązano wykorzystując regułę Simpsona [16], dzieląc przy tym grubość powłoki na dziesięć równoodległych przedziałów. Powyższa procedura postępowania została zaprogramowana w języku FORTRAN IV, a wyniki uzyskano w podwójnej precyzji (13 bitów) na maszynie cyfrowej HITAC — 5020E na Uniwersytecie Tokijskim. Program zawiera około 71 000 słów w przypadku $g=1/25$, a czas obliczeń przykładowo wynosił około 150 sekund w przypadku powłoki $\alpha=2\pi$, $pa/h=15$ kG/mm², przy założeniu teorii Misesa-Misesa i hipotezy wzmocnienia zależnej od odkształcenia w przedziale czasu (0, 120) [godz].

4. Wyniki numeryczne

Jako przykłady numeryczne zostały rozważone dwa następujące przypadki: swobodnie podpartych kołowo-walcowych powłok z zamkniętymi końcami ($\mu = 1/2P$), wykonanych z 0,15% stali węglowej. Przyjęto temperaturę równą 450°C. W przykładzie pierwszym został rozwiązany numerycznie problem pełzania powłok o parametrach $\alpha = \pi$ i $\alpha = 2\pi$ dla czterech wartości stałego obciążenia zmieniającego się od $pa/h = 5$ kG/mm² do 20 kG/mm². W drugim przykładzie przyjęto skokowo zmienne obciążenie $pa/h = 7,5, 10$ i 12,5 kG/mm² powłoki $\alpha = 2\pi$ i teorię Misesa-Misesa. Parametry $\alpha = \pi$ i $\alpha = 2\pi$ odpowiadają odpowiednio krótkiej i długiej powłocie, a pa/h jest równoważne naprężeniu obwodowemu w długich cienkich rurach kołowych.

Przyjęto następujące stałe materiałowe:

$$E = 18000 \text{ kG/mm}^2, \nu = 0,3, A = 4,36 \times 10^{-7} [\text{kG/mm}^2]^{-4,66} \text{ godz}^{-0,218}, \\ m = 0,218, n = 4,66,$$

które zostały otrzymane z próby na pełzanie dla wyżej wspomnianej stali.

Błąd powstały z zastąpienia pochodnych środkowymi różnicami skończonymi jest rzędu g^2 , gdzie $g = 1/N$ [15]. Różnica w wynikach numerycznych między $g = 1/25$ i $g = 1/50$ jest mniejsza niż 0,2% dla powłoki walcowej $\alpha = 2\pi$ i $pa/h = 15$ kG/mm². Zatem przedział siatki $g = 1/25$ jest praktycznie dopuszczalny i był przyjmowany w dalszych obliczeniach.

Błędy wynikające z numerycznego całkowania metodą Runge-Kutta-Gilla są proporcjonalne do Δt^5 (Δt jest przyrostem czasu) i są o wiele mniejsze niż błędy wynikające z metody różnic skończonych. W obliczeniach przeprowadzonych w tej pracy wartość przyrostu Δt jest wyspecyfikowana tak, aby wartość W w punkcie $\xi = 0$ mogła w tym przedziale czasu wzrastać o pewną stałą wartość (tzn. $1/K$) początkowej wartości energii sprężystej W . Wyniki obliczeń dla $K = 30$ i $K = 60$ pokrywały się z dokładnością do szóstej cyfry znaczącej w przypadku $g = 1/25$, $\alpha = 2\pi$ i $pa/h = 15$ kG/mm². Do obliczeń przyjęto zatem wartość $K = 30$.

Gdy proces pełzania trwa dostatecznie długo, a odkształcenia pełzania stają się dosyć duże w porównaniu do odkształceń sprężystych, prędkość naprężenia stopniowo maleje i rozkład naprężenia dąży do ustalonego stanu pełzania. Dlatego też w niniejszych rozważaniach obliczenia prowadzone są do stanu $\text{Max} |\dot{\sigma}/\sigma| < 10^{-7} \text{ godz}^{-1}$, a naprężenie stąd otrzymane przyjmuje się takie, jak dla stanu ustalonego (tzn. dla $t = \infty$). Wyniki obliczeń zostały przedstawione na wykresach. Na przykład dla $pa/h = 20$ kG/mm² i teorii Misesa-Misesa powyższy warunek jest spełniony dla czasu t równego odpowiednio 6000 i 4000 godzin w przypadku $\alpha = \pi$ i $\alpha = 2\pi$, a stosunki odkształceń pełzania do odkształceń sprężystych nie przekraczają odpowiednio 20 i 15.

4.1. Powłoki kołowo-walcowe poddane ciśnieniu wewnętrznemu. 1. Rozpatrzmy najpierw zagadnienie na gruncie teorii Misesa-Misesa. Wyniki obliczeń numerycznych dla teorii Misesa-Misesa przy przyjęciu stałego ciśnienia są przedstawione w tablicy 1 i na rys. 3–7. Linie ciągłe i przerywane reprezentują odpowiednio

Tablica 1. Obliczone wartości Ehw_{\max}/pa^2 , Ehu_{\max}/pah i $(N_{\theta})_{\max}/pa$ dla różnych czasów (wg teorii Misesa-Misesa)

(a) $\alpha=\pi$, $pa/h = 15$ kG/mm²

		$t(h)$					
		0	0,1	1	10	100	∞
Ehw_{\max}	*	-0,923	-1,473	-1,815	-2,369	-3,273	—
pa^2	**		-1,484	-1,835	-2,403	-3,324	
Ehu_{\max}	*	0,1201	0,1234	0,1256	0,1299	0,1378	—
pal	**		0,1234	0,1254	0,1290	0,1358	
$(M_x)_{\max}$	*	-0,0818	-0,0662	-0,0610	-0,0559	-0,0517	-0,0454
pah	**		-0,0644	-0,0583	-0,0527	-0,0486	
$(M_{\theta})_{\max}$	*	-0,246	-0,0129	-0,0103	-0,0088	-0,0077	-0,0054
pah	**		-0,0116	-0,0084	-0,0059	-0,0057	
$(N_{\theta})_{\max}$	*	1,073	1,057	1,051	1,046	1,042	1,036
pa	**		1,055	1,049	1,043	1,039	

(b) $\alpha=2\pi$, $pa/h = 15$ kG/mm

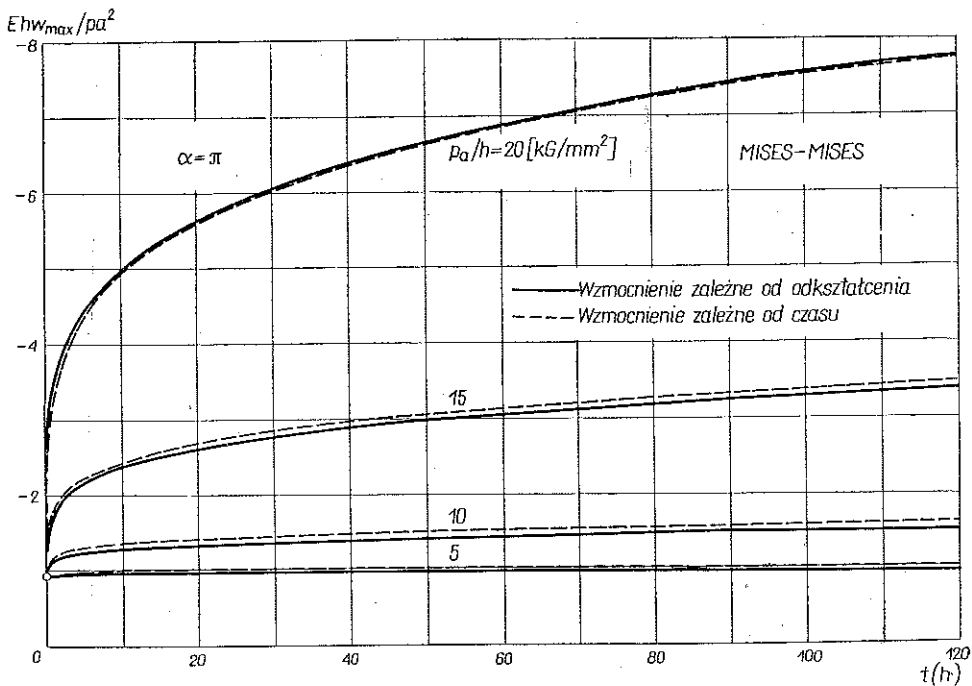
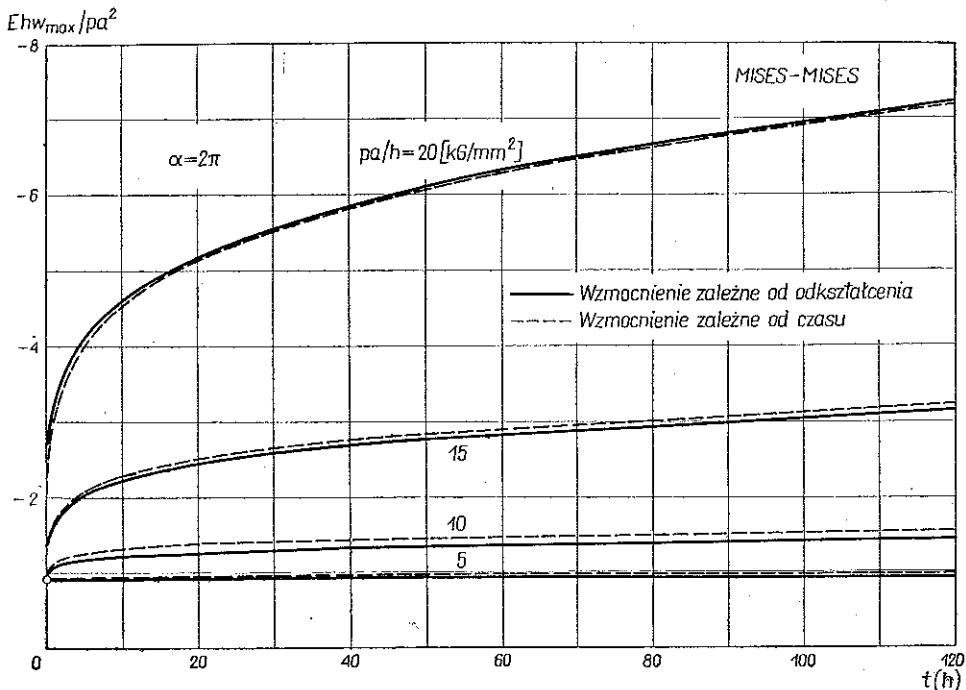
		$t(h)$					
		0	0,1	1	10	100	∞
Ehw_{\max}	*	-0,905	-1,392	-1,699	-2,201	-3,027	—
pa^2	**		-1,400	-1,712	-2,221	-3,057	
Ehu_{\max}	*	0,1100	0,2211	0,1133	0,1157	0,1202	—
pal	**		0,1122	0,1140	0,1155	0,1193	
$(M_x)_{\max}$	*	-0,0822	-0,0678	-0,0629	-0,0577	-0,0537	-0,0483
pah	**		-0,0661	-0,0587	-0,0552	-0,0514	
$(M_{\theta})_{\max}$	*	-0,0247	-0,0131	-0,0105	-0,0091	-0,0080	-0,0058
pah	**		-0,0112	-0,0077	-0,0064	-0,0061	
$(N_{\theta})_{\max}$	*	1,055	1,033	1,029	1,025	1,022	1,018
pa	**		1,031	1,026	1,022	1,020	

* Wzmocnienie zależne od odkształcenia

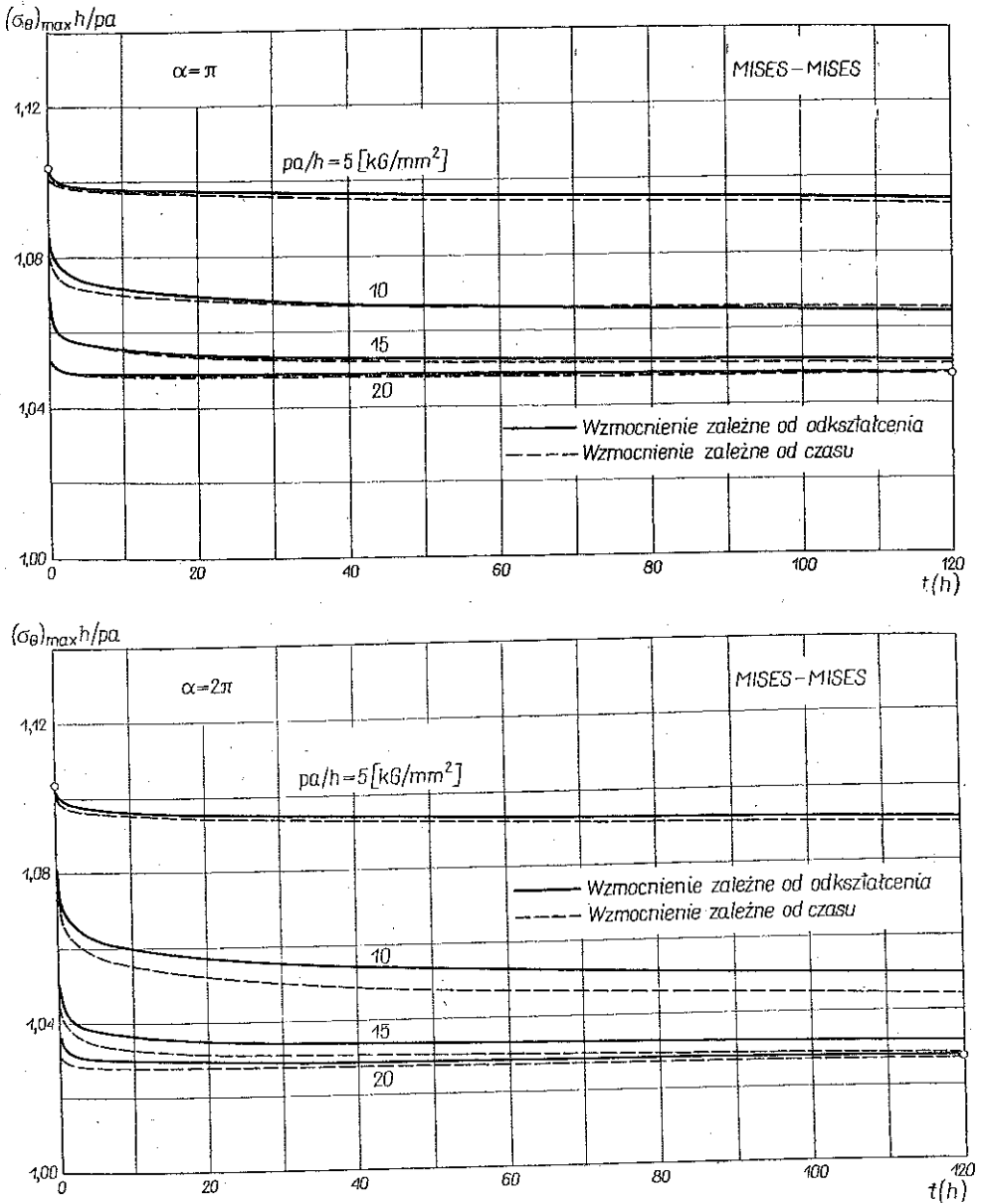
** Wzmocnienie zależne od czasu

wzmocnienie zależne od odkształcenia i wzmocnienie zależne od czasu. W dalszym ciągu pracy ciśnienie wewnętrzne p odgrywa rolę ciśnienia odniesienia \hat{p} przyjętego w definicji zmiennej bezwymiarowej.

Na rys. 3 i 4 pokazana jest zmiana maksymalnego ugięcia i maksymalnego naprężenia dla różnych wartości pa/h . Puste kółeczka na osi rzędnej przedstawiają wartości odpowiadające odkształceniom sprężystym. Na rys. 3 różnica między wynikami obydwu teorii jest mniejsza niż 3%. Naprężenie $\sigma_{\theta \max} h/pa$ pokazane na rys. 4a i 4b odnosi się do powierzchni $z/h = -1$ odpowiednio w przekrojach $2x/l = 0,4$ do 0 i od 0,7 do 0,6. Zmianę miejsca występowania naprężenia maksymalnego w czasie można określić w sposób przybliżony z rys. 6 i 7 oraz z faktu, że M_{θ}/pah



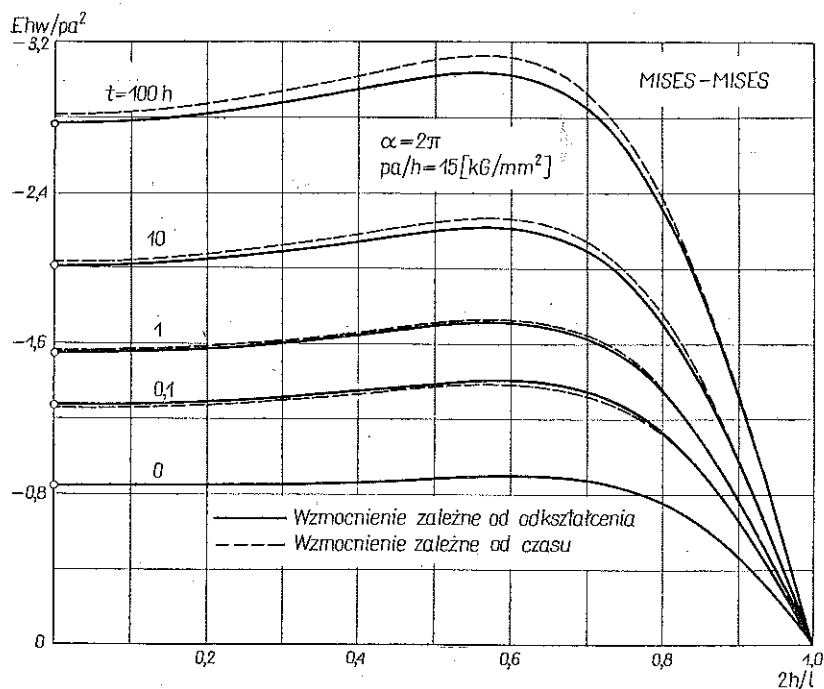
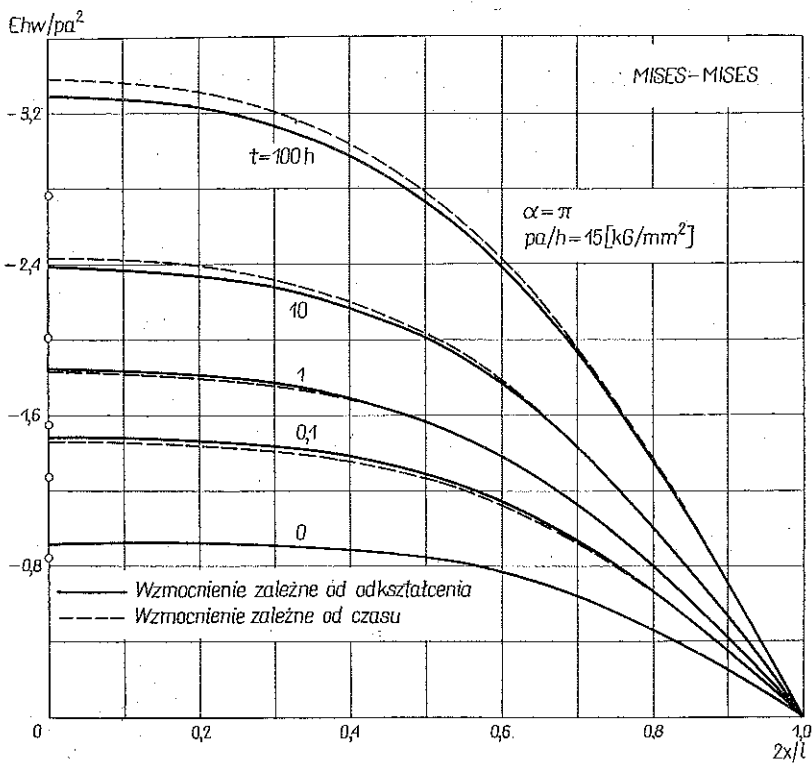
Rys. 3. Wykres maksymalnego ugięcia



Rys. 4. Wykres maksymalnego naprężenia

wykazuje prawie taki sam rozkład, jak M_x/pah , lecz jego wielkość wynosi od jednej trzeciej do jednej dziewiątej wartości M_x/pah .

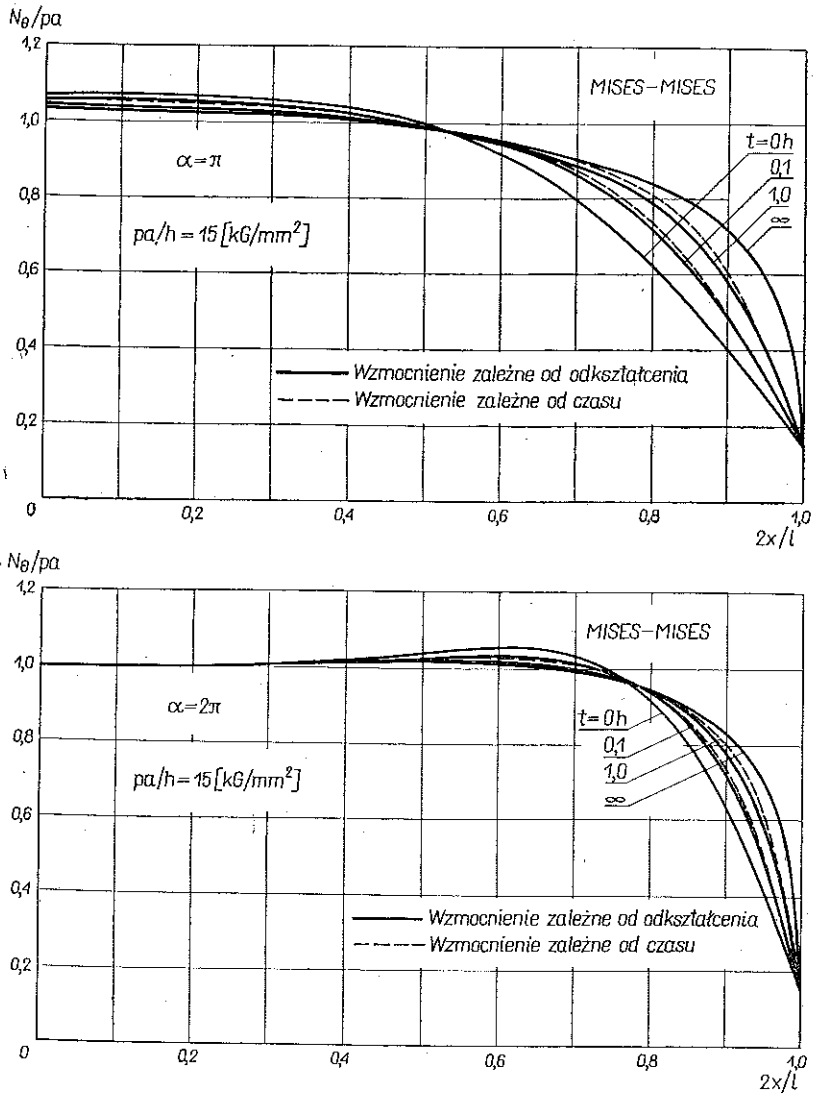
Zaczernione kółka na osi rzędnej oznaczają maksymalne naprężenia w ustalonym stanie pelzania. Zauważmy, że maksymalne naprężenia w powłokach walcowych $\alpha = \pi$ i $\alpha = 2\pi$ są w przybliżeniu o 5% i 3% większe nawet w stanie ustalonego pelzania niż w rurze cylindrycznej, dla której zawsze mamy $\sigma_{\theta} h/pa = 1,0$. Na rysun-



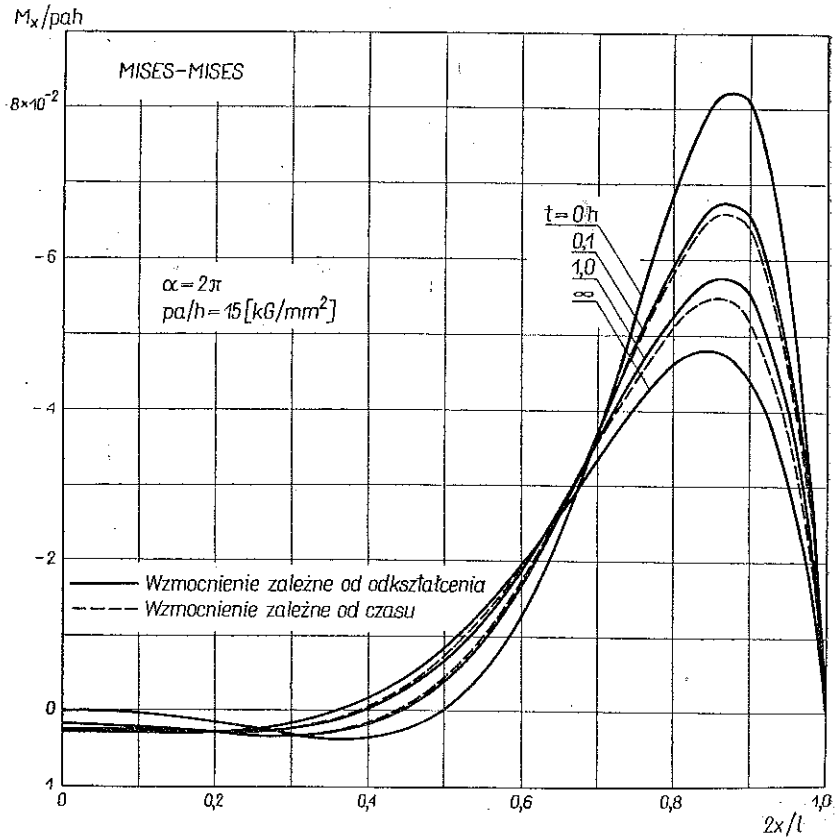
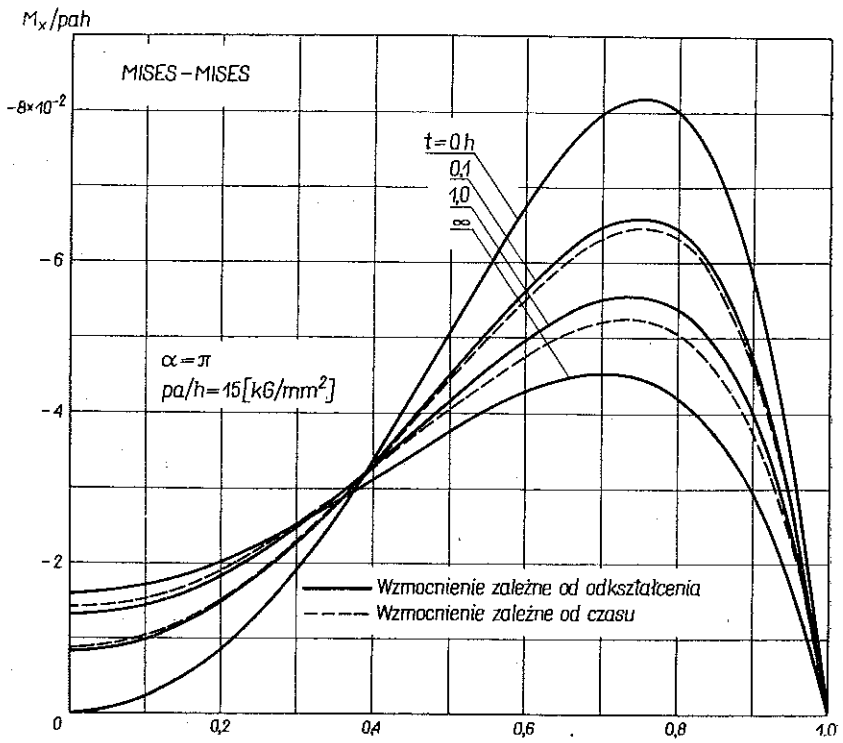
Rys. 5. Rozkład ugięcia

kach powyższych można również zaobserwować zależność prędkości malenia $\sigma_{0 \max} h/pa$ od wielkości ciśnienia wewnętrznego i geometrii powłoki. Różnica między linią ciągłą i przerywaną na rys. 4 wynosi mniej niż 0,5%.

Rozkład Ehw/pa^2 w przypadku $pa/h=15 \text{ kG/mm}^2$ jest pokazany na rys. 5. Krzywe $t=0$ reprezentują sprężyste ugięcie w chwili obciążenia, a kółka na osi rzędnej są wartościami obliczonymi z równania (1.26') dla $t=0; 0,1; 1; 10$ i 100 godzin. Widzimy więc, że ugięcia w środku powłoki $\alpha=\pi$ są w przybliżeniu 15% większe niż w długich cienkich rurach. Z drugiej strony w powłokach $\alpha=2\pi$ kółka pokrywają się nie tylko z wynikami rozwiązania sprężystego, lecz również z rozwiązaniem teorii pełzania, opartej na hipotezie wzmocnienia zależnego od odkształcenia z dokładnością rzędu 1%. Zgodnie z wynikami dla $\alpha=2\pi$, tzn. rys. 6b i 7b,



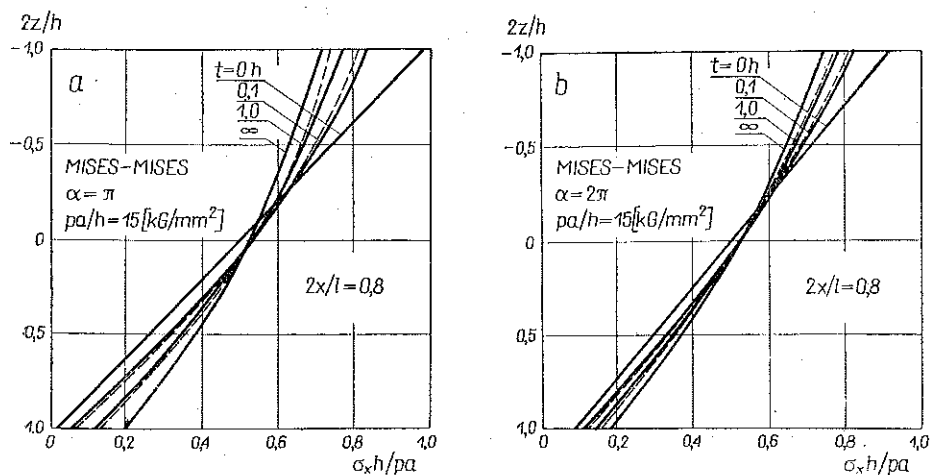
Rys. 6. Rozkład składowej obwodowej siły membranowej



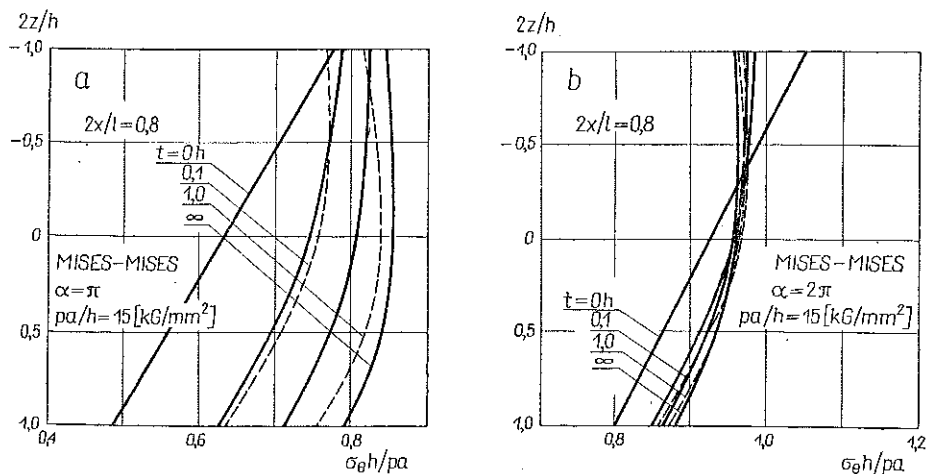
Rys. 7. Rozkład składowej osiowej momentu gnącego

środkowa część powłoki znajduje się prawie zawsze w stanie naprężeń obwodowych. W konsekwencji fakt pokrywania się wyników rozwiązania ścisłego (1.26') z odpowiednimi wynikami obliczeń numerycznych potwierdza dokładność przyjętej procedury obliczeń. Maksymalne ugięcia w powłoce $\alpha=2\pi$ występują w przekrojach $2x/l=$ od 0,55 do 0,65 i są około 10% większe niż obliczone ze wzoru (1.26'). Należy podkreślić, że te obszary maksymalnego ugięcia nie mogą być pomijane przy projektowaniu konstrukcji.

Rozkłady N_θ/pa i M_x/pah w przypadku $pa/h=15 \text{ kG/mm}^2$ są pokazane na rys. 6 i 7. Maksymalne wartości N_θ/pa dla powłok $\alpha=\pi$ i $\alpha=2\pi$ są, nawet w ustalonym stanie pełzania, w przybliżeniu o 2% większe niż wartość $N_\theta/pa=1,0$ dla długich rur kołowych przy pominięciu efektu obydwu końców. Wartość N_θ/pa nie znika w przekroju $2x/l=1$ wskutek występowania siły osiowej. Z drugiej strony M_x/pah osiąga znaczną wartość jedynie w otoczeniu podpartych końców, a na przykład



Rys. 8. Rozkład składowej osiowej naprężenia



Rys. 9. Rozkład składowej obwodowej naprężenia

w środkowej części powłoki $\alpha=2\pi$ można go pominąć. W przypadku $n=M_x/pah$ znika w przekroju $2x/l=0$ w powłoce $\alpha=\pi$ i w przekrojach 0 i 0,5 w powłoce $\alpha=2\pi$ [14]. Dlatego też łatwo zauważyć z rys. 7, że w procesie postępującego pełzania efekt swobodnego końca oddziałuje w szerokim przedziale. Różnice między liniami ciągłymi i przerywanymi na rys. 6 i 7 wynoszą mniej niż 3% i 6%. Z rys. 6 i 7 można również zaobserwować, że zmiany w rozkładach siły membranowej momentu gnącego są dosyć szybkie w pierwszych kilku godzinach, a maksymalne wartości zmieniają się w ciągu 10 godzin około 60% ich całkowitych wahań.

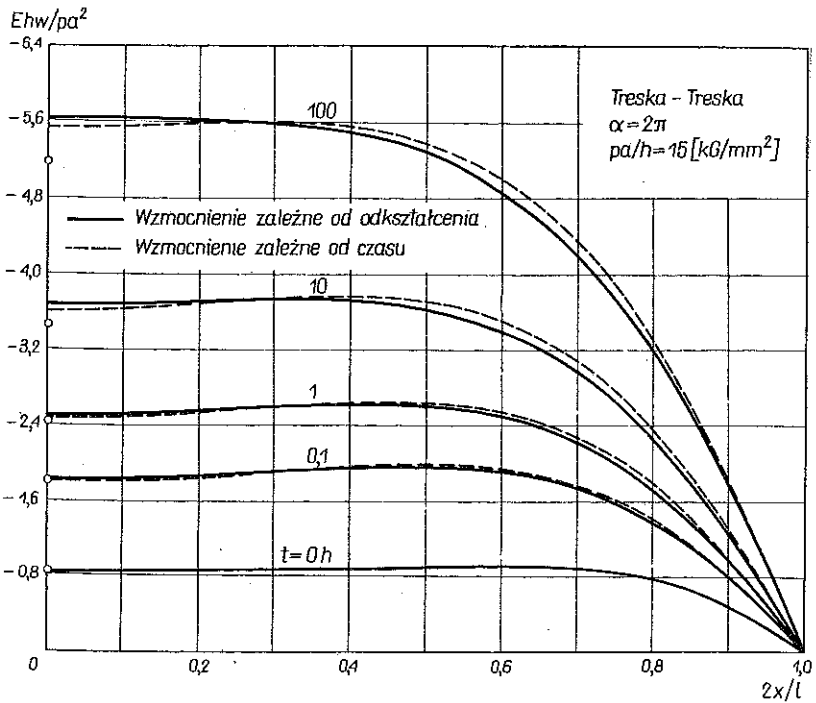
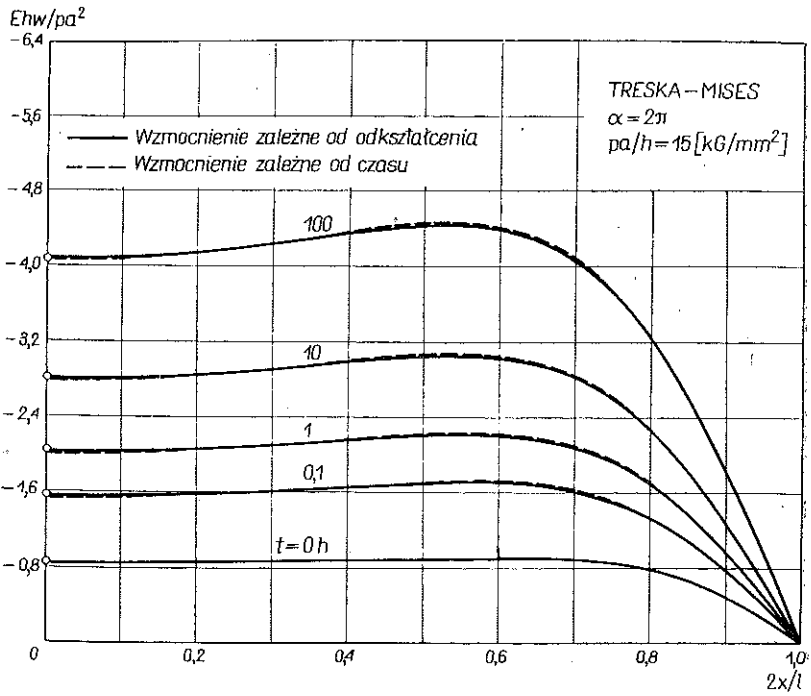
Na zakończenie podajemy rys. 8 i 9, które ilustrują przykład rozkładu naprężeń w strefie środkowej. Należy zwrócić uwagę, że rozkład naprężeń w poszczególnych przekrojach wykazuje w stosunkowo krótkim czasie znaczną tendencję do rozkładu równomiernego.

2. Teoria Treski-Misesa i Treski-Treski. Niektóre z otrzymanych wyników numerycznych dla powłoki $\alpha=2\pi$ dla teorii Treski-Misesa i Treski-Treski są przedstawione na rys. 10 - 12.

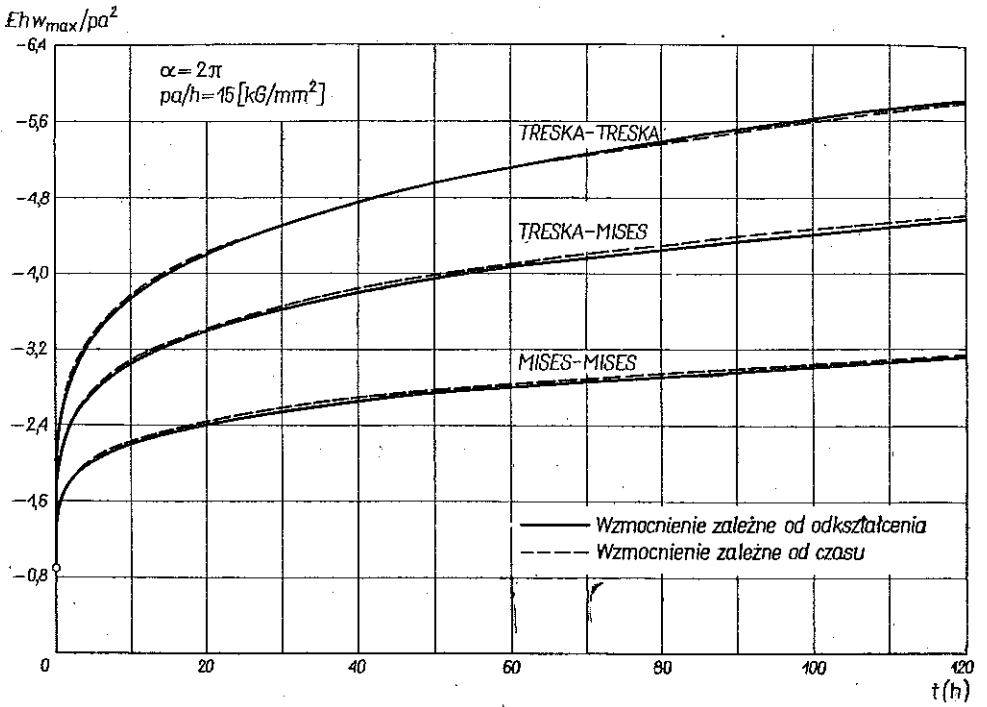
Rysunek 10 pokazuje rozkład ugięcia otrzymany na podstawie tych teorii w przypadku $pa/h=15$ kG/mm². Małe kółka na osi rzędnej odpowiadają jak poprzednio rozwiązaniu ścisłemu dla długich cienkich rur (1.26') i (1.26''). Choć wyniki dla teorii Treski-Misesa (rys. 10a) wykazują podobny charakter jak dla teorii Misesa-Misesa, to jednak wartości otrzymane według pierwszej teorii są około 40% większe. Różnica między hipotezą wzmocnienia zależnego od odkształcenia i hipotezą wzmocnienia zależnego od czasu wynosi mniej niż 2%, a wartości w środkowej części powłoki pokrywają się prawie całkowicie z wynikami dla długiej rury (1.26).

Z drugiej strony w świetle wyników teorii Treski-Treski miejsce występowania maksymalnego ugięcia zmienia się znacznie z upływem czasu. W szczególności maksymalna wartość ugięcia, otrzymana przy przyjęciu hipotezy wzmocnienia zależnego od odkształcenia, znajduje się w środku powłoki po czasie 100 godzin. Różnica między linią ciągłą i przerywaną wynosi mniej niż 3%. Choć ugięcie środka powłoki pokrywa się z wartością (1.26') dla $t \leq 0,1$, to jednak z czasem różnica ta się powiększa. I dlatego zgodnie z teorią Treski-Treski obszar, w którym oddziałuje zaburzenie końca powłoki, wzrasta w czasie postępowania pełzania, a rozkład odkształcenia staje się podobny do rozkładu dla powłoki $\alpha=\pi$, pokazanego na rys. 5a. Maksymalna wartość ugięcia w tym przypadku jest większa o około 80% i 40% od odpowiednich wartości otrzymanych na podstawie teorii Misesa-Misesa i Treski-Misesa.

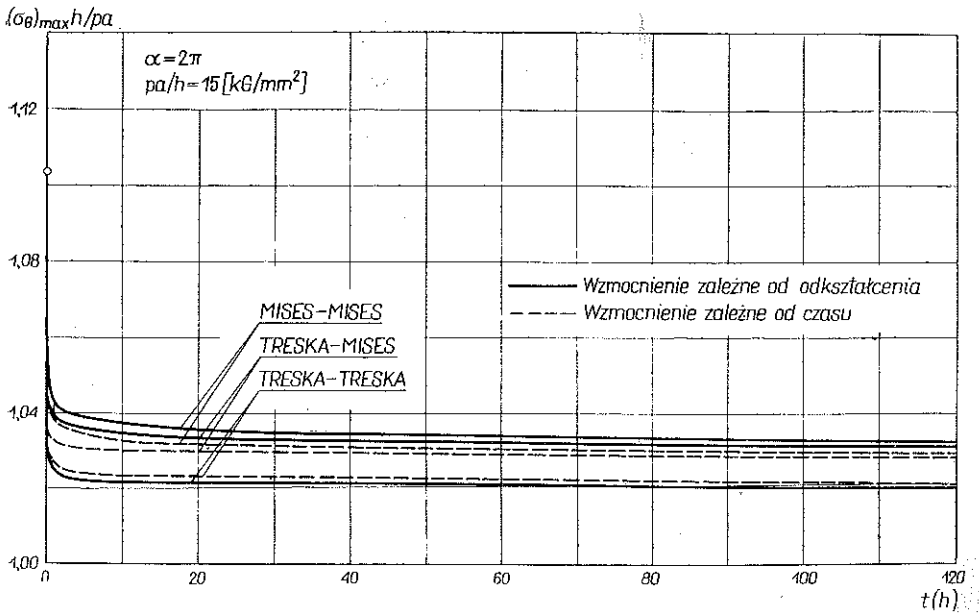
Odnosnie składowych przemieszczenia osiowego, siły membranowej i momentu gnącego wykazano, że teoria Treski-Misesa daje podobne rozkłady i prawie takie same wartości jak teoria Misesa-Misesa. Jednakże w przypadku teorii Treski-Treski wpływ brzegu swobodnie podpartego na rozkłady tych wielkości dał się również wyraźnie zauważyć.



Rys. 10. Rozkład ugięcia



Rys. 11. Porównanie wykresów maksymalnego ugięcia



Rys. 12. Porównanie wykresów maksymalnego naprężenia

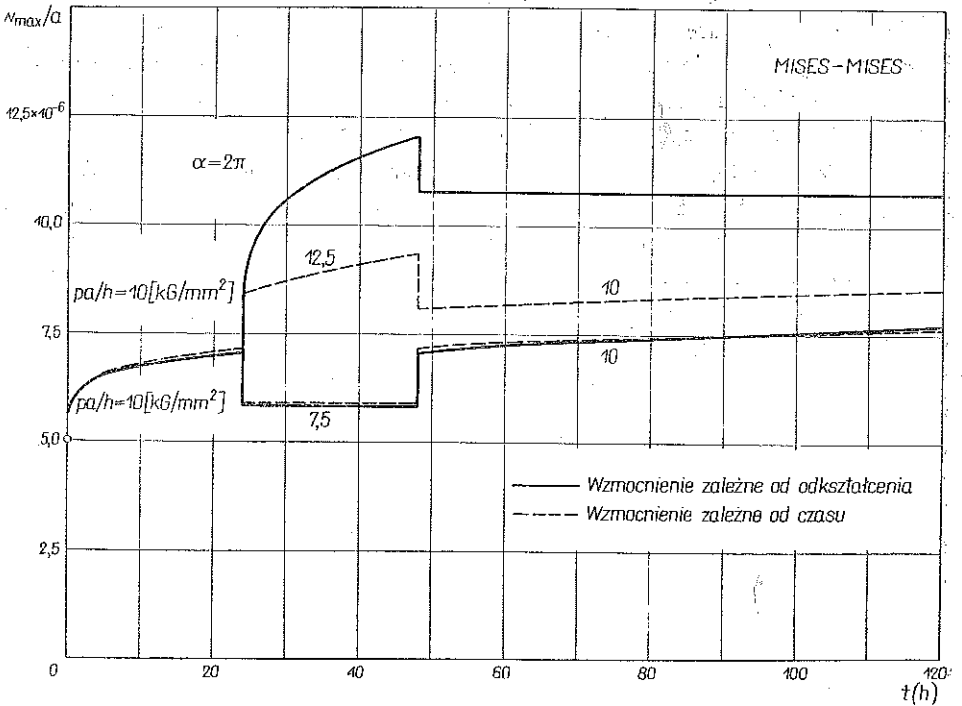
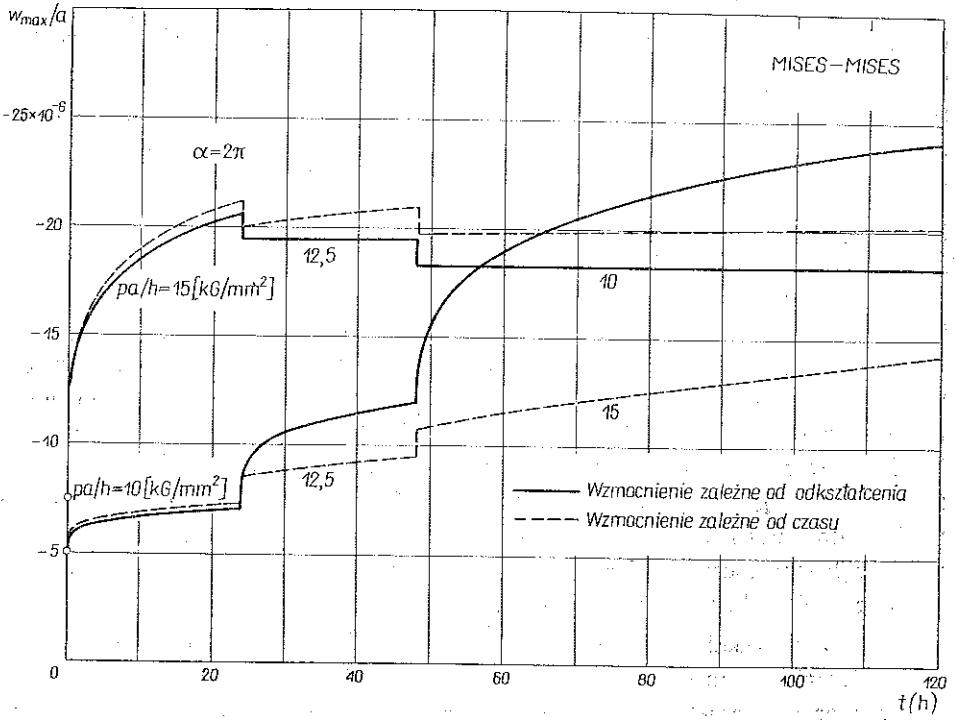
Rysunki 11 i 12 przedstawiają z kolei porównanie trzech teorii pełzania na przykładzie zmiany maksymalnego ugięcia i maksymalnego naprężenia. Jak widać z rys. 11 oraz z wyników numerycznych Whala dla wirujących krążków [11 i 12], teoria Misesa-Misesa daje mniejsze wartości odkształcenia niż teorie Treski-Misesa i Treski-Treski i dlatego znajduje się po stronie niebezpiecznej. Natomiast odnośnie maksymalnego naprężenia teoria Misesa-Misesa daje większe wartości niż pozostałe teorie (rys. 12) i dlatego jest po stronie bezpieczniejszej, co jednak nie pokrywa się z badaniami WHALA [11]. Widzimy więc, że trudno jest wyciągnąć bezpośrednie wnioski odnośnie wyboru właściwej teorii pełzania przy projektowaniu konstrukcji na pełzanie.

Należy zaznaczyć, że przy projektowaniu na pełzanie oprócz stanu naprężenia znajomość stanu odkształcenia jest również bardzo pożądana, a znaczna różnica między stanem odkształcenia, otrzymanym według teorii Misesa i Treski wynika z wysoce nieliniowego prawa pełzania. Zatem różnica między teorią Treski i Misesa posiada większe znaczenie w teorii pełzania niż w teorii plastyczności, gdzie określenie stanu naprężenia bądź nośności granicznej odgrywa poważną rolę. Zatem modyfikacja elementarnej teorii wydaje się być ważniejsza w teorii pełzania niż w teorii plastyczności.

4.2. Powłoki kołowo walcowe poddane zmiennemu ciśnieniu wewnętrznemu. Mimo oczywistego faktu, że hipotezy wzmocnienia zależnego od odkształcenia i od czasu dają różne rezultaty odnośnie stanu naprężenia, to jednak prac poświęconych ilościowej różnicy między tymi hipotezami i dotyczących podstawowych problemów inżynierskich jest zaledwie kilka. Stąd też w I części pracy zilustrowaliśmy tę różnicę na przykładzie swobodnie podpartych powłok kołowo-walcowych, poddanych ciśnieniu wewnętrznemu wykorzystując teorie Misesa-Misesa, Treski-Misesa i Treski-Treski oraz wykazaliśmy, że wyniki otrzymane dla dwóch hipotez wzmocnienia różnią się w każdym przypadku o mniej niż o kilka procent.

W celu zbadania różnicy między wyżej wspomnianymi hipotezami wzmocnienia w przypadku zmiennego obciążenia w rozdziale tym zanalizujemy ponadto problem pełzania kołowo-walcowych powłok poddanych zmieniającemu się skokowo ciśnieniu. Posłużymy się teorią Misesa-Misesa.

Otrzymane na przykład wyniki dla powłoki $\alpha=2\pi$, są pokazane na rys. 13a i 13b. Ciśnienie wewnętrzne zmienia się o $pa/h=2,5 \text{ kG/mm}^2$ w chwilach $t=24$ godziny i $t=48$ godzin. Łatwo zauważyć, że różnica między wynikami dla wzmocnienia zależnego od odkształcenia i od czasu wynosi około 20% i 40% dla wzrostu ciśnienia odpowiednio o 25% i 50%. Jednakże w przypadku spadku ciśnienia o tę samą wielkość różnica wynosi mniej niż 10%. W szczególności dla chwilowego spadku obciążenia pokazanego na rys. 11b różnicę między wynikami obydwu teorii można prawie pominąć. Ponieważ różnica ta może zależeć od czasu i od wielkości zmiany naprężenia, to (odwołując się do istotnej własności hipotezy wzmocnienia mówiącej, że w przypadku skokowego wzrostu obciążenia hipoteza wzmocnienia



Rys. 13. Wykres maksymalnego ugięcia w przypadku zmiennego ciśnienia wewnętrznego

zależnego od odkształcenia daje zawsze większe wartości odkształceń niż pozostałe hipotezy) można wyciągnąć wniosek, że różnica ta jest tym większa, im późniejsza jest zmiana obciążenia. Odwrotny wniosek zachodzi w przypadku spadku obciążenia.

5. Wnioski

Analiza przejściowego pełzania kołowo-walcowych powłok poddanych ciśnieniu wewnętrznemu przeprowadzona została na podstawie dwóch hipotez: wzmocnienia zależnego od odkształcenia i wzmocnienia zależnego od czasu. Przyjęto teorie pełzania typu Misesa-Misesa, Treski-Misesa, Treski-Treski oraz potęgowe prawo pełzania. Założono, że odkształcenie całkowite jest sumą części sprężystej i części pełzania. Równania równowagi zastąpiono odpowiednimi równaniami różnicowymi względem prędkości przemieszczeń. Rozwiązanie powstałych w ten sposób jednoczesnych równań liniowych otrzymano drogą numerycznego całkowania względem czasu. Obliczenia przeprowadzono dla powłoki wykonanej z 0,15% stali węglowej i dla temperatury 450°C.

Pierwszy przykład stanowiły powłoki swobodnie podparte o $\alpha = \pi$ (krótkie) i $\alpha = 2\pi$ (długie) z zamkniętymi końcami, poddane ciśnieniu wewnętrznemu. Wykazano, że teoria Misesa-Misesa daje odkształcenia mniejsze odpowiednio o 40% i 80% od teorii Treski-Misesa i Treski-Treski. Zatem modyfikacja teorii elementarnej wydaje się mieć duże znaczenie w teorii pełzania, gdyż w projektowaniu na pełzanie wymagana jest znajomość nie tylko stanu naprężenia, lecz również stanu deformacji, a różnica między wynikami otrzymanymi na podstawie teorii Misesa i Treski jest duża ze względu na nieliniowy charakter prawa pełzania.

Odnośnie naprężeń maksymalnych można powiedzieć, że teoria Misesa-Misesa daje większe wartości niż pozostałe teorie i z tego względu jest po stronie bezpiecznej. Różnica między wynikami dla hipotezy wzmocnienia zależnego od odkształcenia i wzmocnienia zależnego od czasu, mimo dużych lokalnych zmian naprężenia, była w badanych powłokach mniejsza o kilka procent. Maksymalne wartości ugięcia i składowej obwodowej siły membranowej występowały w środku powłoki $\alpha = \pi$ i w otoczeniu podpartych końców w przypadku powłoki $\alpha = 2\pi$ (z wyjątkiem rezultatów dla $t = 100$ godzin uzyskanych według teorii Treski-Treski i wzmocnienia zależnego od odkształcenia, gdzie wartości maksymalne występowały w środku powłoki, tzn. tak, jak dla powłoki $\alpha = \pi$) i były od 5 do 10% większe niż dla długich cienkich kołowych rur, dla których efekt podpartych końców nie był uwzględniony. Należy podkreślić, że obszary maksymalnych wartości są bardzo ważne z punktu widzenia projektowania na pełzanie.

Jako drugi przykład rozważono problem swobodnie podpartych powłok $\alpha = 2\pi$ z zamkniętymi końcami, poddanych zmiennemu ciśnieniu przy przyjęciu teorii Misesa. Skokowy przyrost ciśnienia wewnętrznego od 2,5% do 50% powoduje różnicę między dwiema hipotezami od około 20 do 40%. W przypadku spadku ciśnienia o tę samą wartość różnica była mniejsza niż 10%.

CZEŚĆ II. USTALONY STAN PEŁZANIA POWŁOK KOŁOWO-WALCOWYCH

1. Wstęp

W pierwszej części pracy analizowaliśmy przejściowe pełzanie powłok kołowo-walcowych obciążonych ciśnieniem wewnętrznym i wyjaśniliśmy proces deformacji aż do stanu ustalonego pełzania, w czasie którego prędkość pełzania maleje z upływem czasu, a odkształcenia sprężysto-plastyczne zmieniają się wraz ze wzrostem odkształceń pełzania. Zgodnie z otrzymanymi rezultatami zmiana rozkładu naprężenia w przypadku stałego obciążenia kończy się w stosunkowo krótkim czasie i gdy odkształcenia pełzania przewyższają od 15 do 20 razy odkształcenia sprężysto-plastyczne, realizowany jest stan ustalonego pełzania. Stąd też analiza ustalonego stanu pełzania jest równie ważna, gdyż obejmuje większość całkowitego procesu pełzania, w szczególności przypadek stosunkowo niskich naprężeń.

Analiza ustalonego stanu pełzania w powłokach kołowo-walcowych, poddanych ciśnieniu wewnętrznemu była ostatnio przedmiotem wielu prac [1]. Przegląd różnych rozwiązań przybliżonych tego zagadnienia zawarty jest w pracach [17 - 23]. Wśród nich w szczególności zasługują na uwagę prace J. N. RABOTNOWA [26 i 27], który metodami rachunku wariacyjnego znalazł rozwiązanie przybliżone dla swobodnie podpartych i zamocowanych półnieskończonych powłok sandwiczowych, wykonanych z materiału podlegającego warunkowi Misesa i potęgowemu prawu pełzania. Jego wyniki wykazują dużą zgodność z rezultatami J. M. WÓLKOWICZA [28], który stosując bezpośrednio metodę kolejnych przybliżeń otrzymał takie same równanie wyjściowe. Z kolei F. A. COZZARELLI, S. A. PATEL i B. VENKATRAMAN [31] stosując metodę iteracyjną analizowali podobny problem zamocowanych kołowo walcowych powłok sandwiczowych i wykazali, że wielkość momentu gnącego spada w kierunku osiowym od maksymalnej wielkości na końcu zamocowanym bardziej gwałtownie niż przewidywało rozwiązanie M. P. BIENKA i A. M. FREUDENTHALA [19].

W cytowanych wyżej pracach związek między powłoką sandwiczową a powłoką o przekroju pełnym uzyskuje się dzięki założeniu, że obydwie powłoki zachowują się identycznie tylko w przypadku stanu membranowego lub czystego zginania [26]. Jednakże stan naprężenia w tych powłokach daleki jest od stanu membranowego lub czysto zgięciowego, które na ogół występują równocześnie. Dlatego też, mówiąc ściśle, dokładność wyżej wspomnianego rozwiązania dla powłok sandwiczowych jako rozwiązania przybliżonego dla powłok pełnościennych w ustalonym stanie pełzania jest problemem nadal otwartym. Czy założenie powłoki sandwiczowej jest dobrym przybliżeniem czy nim nie jest można stwierdzić rozwiązując każdy problem brzegowy oddzielnie i porównać go z rozwiązaniem ścisłym.

Trudności w analizie pełzania powłok z reguły wynikają z faktu, że składowe siły membranowej i momentu gnącego w powłoce nie mogą być wyrażone przez znane funkcje proste, jak na przykład składowe odkształcenia lub prędkości odkształcenia. Przyczyną jest nieliniowy charakter związku: naprężenie-prędkość odkształcenia. W konsekwencji, wysiłek autorów wcześniejszych prac prawie zawsze

ograniczał się do tego, aby otrzymać pewne rozwiązanie przybliżone przez wprowadzenie dodatkowych założeń upraszczających odnośnie powyższego związku fizykalnego. Rozwiązanie ściśle rozważanego problemu nie jest dotąd znane. Jeśli przyjąć jednak małe zaburzenia (przyrosty) składowych przemieszczenia zamiast składowych przemieszczenia całkowitego, podstawowe równania pełzania powłok mogą być zlinearyzowane względem tych przyrostów. Przyrosty przemieszczeń można już łatwo określić żądając jedynie, aby spełniały równania podstawowe, o ile oczywiście przybliżone wartości składowych przemieszczenia zostały przyjęte właściwie. Jeśli powtórzymy tę procedurę rozpoczynając od właściwych wartości początkowych składowych przemieszczenia, to wartości przybliżone będą dążyć do ścisłego rozwiązania rozważanego problemu.

W tej części pracy rozważany jest osiowo-symetryczny problem ustalonego stanu pełzania cienkich kołowo-walcowych powłok. Przyjmuje się wyżej omówione podejście do rozwiązania stosując teorię pełzania typu Misesa-Misesa oraz potęgowe prawo pełzania. Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone dla zamocowanych powłok walcowych z otwartymi końcami. Otrzymane rezultaty zostały porównane z wynikami COZZARELLEGO i innych [31].

2. Równania podstawowe

2.1. Związki podstawowe. Rozważmy ponownie cienką kołowo-walcową powłokę przedstawioną na rys. 1. Równania równowagi i związki kinematyczne są dane następującymi zależnościami [14], identycznymi jak w części I:

$$(2.1) \quad \frac{dN_x}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{N_0}{a} = p$$

oraz

$$(2.2) \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \varepsilon = -\frac{w}{a}.$$

Założono, że prędkość pełzania w stałym jednoosiowym stanie naprężenia jest opisana powszechnie używanym potęgowym prawem pełzania

$$(2.3) \quad \varepsilon = k\sigma^n.$$

Stwierdzono, że związek powyższy jest spełniony w ustalonym stanie pełzania dla większości używanych metali w wysokiej temperaturze przy względnie niskich naprężeniach [8-10]. Jeśli przyjmiemy izotropię i nieściśliwość materiału oraz przeniesiemy związek (2.3) na wieloosiowy stan naprężenia zgodnie z teorią typu Misesa-Misesa, to otrzymamy następujące wzory [89]:

$$(2.4) \quad \dot{e}_{ij} = \frac{3}{2} k \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad \sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}.$$

Na podstawie analogii HOFFA [33] powyższe formuły są podobne do nieliniowego prawa sprężystego

$$(2.4') \quad e_{ij} = \frac{3}{2} k \sigma_e^{n-1} s_{ij}.$$

Gdy warunki brzegowe nie ulegają zmianie w czasie, obydwa związki (2.4) dają takie same naprężenia, a stan odkształcenia (2.4) otrzymuje się odpowiednio przez zastąpienie prędkości odkształcenia odkształceniem (2.4'). Stąd też dla ułatwienia przeprowadzenia dalszej analizy wykorzystywać będziemy analogię z (2.4'). Zgodnie z założeniem przyjętym przy wyprowadzaniu równań (2.4), tzn. że naprężenie efektywne i odkształcenie efektywne określone są takim samym związkiem jak naprężenie i odkształcenie w stanie jednoosiowym, równanie (2.4') może być wyrażone również w innej postaci:

$$(2.5) \quad s_{ij} = \frac{2}{3} k^{-\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1-n}{n}} e_{ij}, \quad \varepsilon_e = \left(\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}.$$

Ponieważ stan odkształcenia w rozważanej powłoce jest zasadniczo stanem płaskim, nie znikającymi składowymi tensora naprężenia są: naprężenie osiowe σ_x i naprężenie obwodowe σ_θ , które na mocy (2.5) mają postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4}{3} k^{-\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1-n}{n}} \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_\theta \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{4}{3} k^{-\frac{1}{n}} \varepsilon_e^{\frac{1-n}{n}} \left(\varepsilon_\theta + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right), \\ \varepsilon_e &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2). \end{aligned}$$

Składowe siły membranowej i momentu gnącego, występujące w (2.1), są bezpośrednio obliczone z (2.6):

$$(2.7) \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz,$$

oraz

$$(2.8) \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz.$$

Jeśli wprowadzimy zmienne bezwymiarowe określone poprzednio, to równania (2.1) – (2.3) i (2.6) – (2.8) możemy przepisać w postaci

$$(2.10) \quad \eta_x = \mu, \quad \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 M}{d\xi^2} + (\eta_\theta - 1) = 0$$

(jeśli $\mu = 0$, to mamy koniec otwarty, jeśli $\mu = 1/2$, to koniec jest zamknięty);

$$(2.11) \quad E_x = 2 \frac{dU}{d\xi} - \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha^2} \eta \frac{d^2 W}{d\xi^2}, \quad E_\theta = -W;$$

$$(2.12) \quad S_x = \left(\frac{4}{3} E_e \right)^{\frac{1-n}{n}} \left(E_x + \frac{1}{2} E_\theta \right), \quad S_\theta = \left(\frac{4}{3} E_e \right)^{\frac{1-n}{n}} \left(E_\theta + \frac{1}{2} E_x \right),$$

$$E_e = \frac{2}{3} (E_x^2 + E_x E_\theta + E_\theta^2)^{1/2};$$

$$(2.13) \quad \eta_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S_x d\eta, \quad \eta_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S_\theta d\eta;$$

$$(2.14) \quad m_x = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 S_x \eta d\eta, \quad m_\theta = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 S_\theta \eta d\eta.$$

2.2. Równania podstawowe w przemieszczeniach. Jeśli podstawimy (2.13) do równań równowagi i wyrazimy składowe siły membranowej i momentu gnącego przez składowe przemieszczenia, to otrzymamy układ nieliniowych równań różniczkowych. Jednakże, jak wynika z (2.11) i (2.12), składowe siły membranowej i momentu gnącego nie mogą być wyrażone bezpośrednio przez funkcje proste składowych przemieszczenia drogą całkowania (2.13) i (2.14) i dlatego rozwiązanie analityczne wyżej wspomnianego układu równań różniczkowych jest na ogół niemożliwe. Fakt, że powłoki pełnościenne w tego rodzaju problemach są często aproksymowane przez konstrukcje sandwiczowe, wypływa głównie z tych przyczyn.

Dlatego też aby ominąć tę trudność przy rozwiązywaniu danych problemów brzegowych rozpoczynamy od właściwej wartości przybliżonej przemieszczenia i wyprowadzamy zlinearyzowane równania dla małych przyrostów przemieszczenia między rozwiązaniem przybliżonym i rozwiązaniem dokładnym. Dokładne składowe przemieszczenia mogą być wyrażone w sposób następujący:

$$(2.15) \quad U = U^* + \bar{U}, \quad W = W^* + \bar{W},$$

gdzie U^* i W^* oznaczają wartości m -tego przybliżenia, a \bar{U} , \bar{W} są małymi różnicami odpowiednio między U , W i U^* , W^* . Zatem jeśli dane są przybliżone wartości U^* , W^* , a wartości \bar{U} , \bar{W} mogą być określone tak, aby n_x , n_θ , m_x , m_θ wyprowadzone z U , W spełniały równania równowagi (2.10), to tak otrzymane wartości U , W stanowią dokładną wartość przemieszczenia. Jednakże otrzymanie ścisłego rozwiązania dla \bar{U} , \bar{W} oznacza nic więcej niż rozwiązanie bezpośrednio wyżej wspomnianego układu równań nieliniowych, co jest na ogół niewykonalne. Zlinearyzujemy więc wyprowadzone równania na \bar{U} , \bar{W} przez rozwinięcie ich w szereg w otoczeniu przybliżonych wartości U^* , W^* . Wykorzystując układ równań nieliniowych otrzymamy przybliżoną wartość \bar{U} , \bar{W} . Wartości U , W rzędu aproksymacji $m+1$ otrzymamy przez podstawienie otrzymanych wartości \bar{U} , \bar{W} do wzoru (2.15). Powtarzając tę procedurę dokładność przybliżonych wartości U^* , W^* może być sukcesywnie zwiększana.

Zatem jeśli podstawimy (2.15) do (2.11) – (2.14) i pominiemy wyrazy wyższych rzędów dla \bar{U} i \bar{W} , to otrzymamy następujące zależności:

$$(2.16) \quad E_x = E_x^* + 2 \left(\frac{d\bar{U}}{d\xi} - \frac{3}{8} \frac{1}{\alpha^2} \eta \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} \right), \quad E_\theta = E_\theta^* - \bar{W};$$

$$(2.17) \quad S_x = S_x^* + 2I_a^* \frac{d\bar{U}}{d\xi} - I_b^* \bar{W} - \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha^2} I_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2},$$

$$S_\theta = S_\theta^* + 2J_a^* \frac{d\bar{U}}{d\xi} - J_b^* \bar{W} - \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha^2} J_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2};$$

$$(2.18) \quad n_x = n_x^* + P_a^* \frac{d\bar{U}}{d\xi} - \frac{1}{2} P_b^* \bar{W} - \frac{3}{8} \frac{1}{\alpha^2} P_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2},$$

$$n_\theta = n_\theta^* + Q_a^* \frac{d\bar{U}}{d\xi} - \frac{1}{2} Q_b^* \bar{W} - \frac{3}{8} \frac{1}{\alpha^2} Q_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2};$$

$$(2.19) \quad m_x = m_x^* + \frac{1}{2} F_a^* \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{4} F_b^* \bar{W} - \frac{3}{16} \frac{1}{\alpha^2} F_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2},$$

$$m_\theta = m_\theta^* + \frac{1}{2} G_a^* \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{4} G_b^* \bar{W} - \frac{3}{16} \frac{1}{\alpha^2} G_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2}.$$

Wielkości E_x^* , E_θ^* , ..., M_θ^* są określone z równań (2.11) – (2.14) przez zastąpienie w nich U i W przez odpowiednie przybliżone wartości U i W rzędu m . I_a^* , I_b^* , ..., G_c^* są funkcjami U^* i W^* i określone są następująco:

$$(2.20) \quad I_a^* = \left[\frac{2(1-n)}{3n} \frac{2E_x^* + E_\theta^*}{(E_e^*)^2} + \frac{2}{2E_x^* + E_\theta^*} \right] S_x^*,$$

$$I_b^* = \left[\frac{2(1-n)}{3n} \frac{2E_\theta^* + E_x^*}{(E_e^*)^2} + \frac{1}{2E_x^* + E_\theta^*} \right] S_\theta^*,$$

$$I_c^* = I_a^* \eta;$$

$$(2.21) \quad J_a^* = \left[\frac{2(1-n)}{3n} \frac{2E_x^* + E_\theta^*}{(E_\theta^*)^2} + \frac{1}{2E_x^* + E_\theta^*} \right] S_\theta^*,$$

$$J_b^* = \left[\frac{2(1-n)}{3n} \frac{2E_\theta^* + E_x^*}{(E_e^*)^2} + \frac{2}{2E_\theta^* + E_x^*} \right] S_x^*,$$

$$J_c^* = J_a^* \eta;$$

$$(2.22) \quad P_a^* = \int_{-1}^1 I_a^* d\eta, \quad P_b^* = \int_{-1}^1 I_b^* d\eta, \quad P_c^* = \int_{-1}^1 I_c^* d\eta,$$

$$Q_a^* = \int_{-1}^1 J_a^* d\eta, \quad Q_b^* = \int_{-1}^1 J_b^* d\eta, \quad Q_c^* = \int_{-1}^1 J_c^* d\eta;$$

$$(2.23) \quad F_a^* = P_c^*, \quad F_b^* = \int_{-1}^1 I_b^* \eta d\eta, \quad F_c^* = \int_{-1}^1 I_c^* \eta d\eta,$$

$$G_a^* = Q_c^*, \quad G_b^* = \int_{-1}^1 J_b^* \eta d\eta, \quad G_c^* = \int_{-1}^1 J_c^* \eta d\eta.$$

Ponieważ (2.18) i (2.19) są liniowymi funkcjami \bar{U} i \bar{W} , to podstawienie ich do równania równowagi (2.10) prowadzi do układu równań różniczkowych na \bar{U} i \bar{W} :

$$(2.24) \quad P_a^* \frac{d\bar{U}}{d\xi} - \frac{1}{2} P_b^* \bar{W} - \frac{3}{8} \frac{1}{\alpha^2} P_c^* \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + (n_x^* - \mu) = 0,$$

$$(2.24) \quad \underset{[c.d.]}{Q_a^*} \frac{d\bar{U}}{d\xi} - \frac{1}{2} Q_b^* \bar{W} - \frac{3}{8} \frac{1}{\alpha^2} Q_c^* \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \\ + \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(F_a^* \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{2} F_b^* \bar{W} - \frac{3}{8} \frac{1}{\alpha^2} F_c^* \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right) + \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 m_x^*}{d\xi^2} + \eta_\theta - 1 \right) = 0.$$

Warunki brzegowe dla powyższych równań są następujące:
dla końca podpartego

$$(2.25) \quad \xi=0, \bar{U} = \frac{d\bar{W}}{d\xi} = 0; \quad \xi=1, \bar{W} = m_x = 0;$$

dla końca zamocowanego

$$(2.25') \quad \xi=0, \bar{U} = \frac{d\bar{W}}{d\xi} = 0; \quad \xi=1, \bar{W} = \frac{d\bar{W}}{d\xi} = 0.$$

Na mocy (2.19) ostatnie równanie (2.25') może być zapisane również w postaci

$$(2.25'') \quad \left[m_x^* + \frac{1}{2} F_a^* \frac{d\bar{U}}{d\xi} - \frac{1}{4} F_b^* \bar{W} - \frac{3}{16} \frac{1}{\alpha^2} F_c^* \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right]_{\xi=1} = 0.$$

Aby rozwiązać powyższe równania numerycznie, pokryjmy oś ξ jednowymiarową siatką o przedziale $g=1/N$ (N jest liczbą podziału odcinka $0 \leq \xi \leq 1$) i zastąpmy pochodne przez zwykłe różnice środkowe [15]. Błąd wynikający z przybliżenia różnicami skończonymi jest rzędu g^2 . Zatem równania (2.24) wraz z warunkami brzegowymi (2.25) sprowadzają się do $2N+3$ układu równań liniowych na wielkość \bar{U}_i ($i=1, 2, \dots, N+2$) i \bar{W}_i ($i=0, 1, \dots, N-1, N+2$) dających się przedstawić w następującej postaci macierzowej:

$$(2.26) \quad AX=B,$$

gdzie \bar{U}_i i \bar{W}_i są wartościami \bar{U} i \bar{W} w punktach $\xi=ig$. Symbole A , X i B oznaczają odpowiednio macierz współczynników, wektor-kolumnę szukanych wielkości i stały wektor. Dla zwięzłości wzorów na te wielkości nie przytaczamy. Całki w równaniach (2.13), (2.14), (2.22) i (2.23) zostały obliczone według reguły Simpsona przy podziale grubości powłoki na 10 równoodległych odcinków. Błędy numerycznego całkowania są proporcjonalne do $(1/N)^5$ i są dużo mniejsze niż w metodzie różnic skończonych.

Jeśli powłoka jest dostatecznie długa, to w szczególności środkowa jej część jest wolna od wpływu charakteru końców powłoki. Zatem dla tej części powłoki można otrzymać rozwiązania w postaci zamkniętej:

dla powłoki o końcach otwartych

$$(2.27) \quad \frac{\sigma_x}{\left(\frac{pa}{h}\right)} = 0, \quad \frac{\sigma_\theta}{\left(\frac{pa}{h}\right)} = 1, \quad \frac{\sigma_c}{\left(\frac{pa}{h}\right)} = 1, \\ \frac{w}{ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n} = -1, \quad \frac{u}{al \left(\frac{pa}{h}\right)^n} = -\frac{1}{2} \frac{x}{l}, \\ \frac{M_x}{pah} = \frac{M_\theta}{pah} = 0, \quad \frac{N_x}{pa} = 0, \quad \frac{N_\theta}{pa} = 1;$$

dla powłoki o końcach zamkniętych

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\left(\frac{pa}{h}\right)} &= \frac{1}{2}, & \frac{\sigma_\theta}{\left(\frac{pa}{h}\right)} &= 1, & \frac{\sigma_e}{\left(\frac{pa}{h}\right)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{w}{ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n} &= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}, & \frac{u}{lk \left(\frac{pa}{h}\right)^n} &= 0, \\ \frac{M_x}{pah} = \frac{M_\theta}{pah} &= 0, & \frac{N_x}{pa} &= \frac{1}{2}, & \frac{N_\theta}{pa} &= 1. \end{aligned}$$

3. Metoda obliczeń

Jeśli wartości \bar{U}_i i \bar{W}_i dla dobrze postawionego problemu były określone z (2.26) z uwzględnieniem m -tych aproksymacji U_i^* , W_i^* , to $m+1$ przybliżenie U_i i W_i może być dane za pomocą wzorów

$$(2.28) \quad U_i = U_i^* + \lambda \bar{U}_i, \quad W_i = W_i^* + \lambda \bar{W}_i,$$

gdzie λ ($0 < \lambda \leq 1$) jest parametrem relaksacji, wprowadzonym dla uniknięcia rozbieżności rozwiązania. Tak więc jeśli wykorzystamy otrzymane w ten sposób \bar{U}_i i \bar{W}_i jako U^* i W^* w (2.16) – (2.23), to z (2.24) otrzymamy znowu nowe wartości \bar{U}_i i \bar{W}_i . Zatem $(m+2)$ -gie przybliżenia U_i i W_i są określone z (2.28). Z kolei powtarzamy procedurę iteracyjną aż będzie spełniony następujący warunek dla odpowiednio dobranej małej wartości δ :

$$(2.29) \quad \text{Max} \left\{ \frac{\bar{U}_i}{U_i^*}, \frac{\bar{W}_i}{W_i^*}; \quad i=0, 1, \dots, N+2 \right\} \leq \delta.$$

Celem rozpoczęcia obliczeń danej powłoki należy dobrać wartości pierwszego przybliżenia rozwiązania wyżej wspomnianych równań. Wartości te oczywiście mogą być dowolne dopóty, dopóki są one na tyle bliskie dokładnemu rozwiązaniu, aby poprzedzający proces iteracyjny był zbieżny. Jak łatwo zauważyć z równań (2.12), (2.17), (2.20) i (2.21) równanie (2.24) po podstawieniu $n=1$ i $U^*=W^*=0$ prowadzi do rozwiązania dla przypadku liniowego, a więc może być użyte jako pierwsze przybliżenie rozwiązania dla $n>1$.

Dalsze obliczenia były przeprowadzone dla $n=1, 2, 3, 4$ i 5 dla powłok zamocowanych z końcami otwartymi, a rozwiązanie dla $n=m$ było wykorzystane jako pierwsza aproksymacja rozwiązania dla $n=m+1$. Warunek (2.29) z wartościami $\lambda=1$, $\delta=10^{-7}$ był spełniony w każdym przypadku przez zastosowanie kilkakrotnie wyżej opisanej iteracji.

Poprzednio H. B. KELLER i E. L. REISS wykorzystywali technikę kolejnych iteracji połączoną z metodą różnic skończonych dla analizy kilku geometrycznie nieliniowych problemów takich, jak na przykład duże ugięcia sprężystej płyty koło-

wej lub przegięcia powłok kulistych o małej wyniosłości [34 i 35]. Zaprezentowana tu metoda jest odpowiednikiem ich metody zastosowanej do zagadnień fizycznie nieliniowych. W naszym przypadku można było oczywiście bezpośrednio zastąpić nieliniowe równania różniczkowe równaniami różnicowymi i rozwiązać otrzymany układ nieliniowych równań algebraicznych i transcendentálnych dowolną metodą numeryczną. Jednakże w naszej metodzie procedura analityczna jest uproszczona; po pierwsze przez linearyzację składowych naprężenia wyrażonych przez przemieszczenia rozwinięte w otoczeniu ich odpowiedniej wartości przybliżonej, po drugie przez podstawienie tych przemieszczeń do równań równowagi i w końcu wyprowadzenie w każdym punkcie siatki układu jednoczesnych równań liniowych względem małych przyrostów przemieszczenia. Przedstawiona metoda obliczeń może być więc interpretowana w pewnym sensie, jako odmiana metody Newtona dla nieliniowych równań w postaci uwikłanej [16]. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że przedstawiona metoda jest bardzo użytecznym i wszechstronnym narzędziem do rozwiązywania nieliniowych zagadnień płyt i powłok.

4. Wyniki numeryczne i ich dyskusja

Obliczenia numeryczne przeprowadzone były dla wykładnika pełzania $n=1, 2, 3, 4$ i 5 w przypadku zamocowanych powłok kołowo-walcowych o parametrach $\alpha=\pi$ i $\alpha=2\pi$ z końcami swobodnymi [14]. Przedstawimy tu niektóre wybrane wyniki dla $n=1, 3$ i 5 . Opisana wyżej procedura została zaprogramowana w języku FORTRAN IV, a obliczenia otrzymano w podwójnej precyzji (13 bitów) na maszynie cyfrowej HITAC-5020E na Uniwersytecie Tokijskim. Program składa się z około

Tablica 2. Wyniki numeryczne w przypadku $n=1$ i odpowiednie wartości analityczne

		(a) $\alpha=\pi$					
$2x/l$		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$ak \left(\frac{pa}{h} \right)^n$	Numeryczne $g=1/25$	-1,086	-1,050	-0,919	-0,646	-0,259	0
	Numeryczne $g^*=1/50$	-1,086	-1,050	-0,918	-0,646	-0,256	0
	Analityczne [14]	-1,086	-1,050	-0,918	-0,646	-0,255	0
$\frac{Mx}{pah}$	Numeryczne $g=1/25$	-0,0285	-0,0391	-0,0607	-0,0580	0,0399	0,3307
	Numeryczne $g=1/50$	-0,0288	-0,0393	-0,0610	-0,0580	0,0408	0,3319
	Analityczne [14]	-0,0288	-0,0393	-0,0610	-0,0580	0,0409	0,3333
		(b) $\alpha=2\pi$					
$2x/l$		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$ak \left(\frac{pa}{h} \right)^n$	Numeryczne $g=1/25$	-0,997	-1,003	-1,031	-1,018	-0,651	0
	Numeryczne $g=1/50$	-0,996	-1,004	-1,032	-1,018	-0,644	0
	Analityczne [14]	-0,996	-1,004	-1,032	-1,018	-0,641	0
$\frac{Mx}{pah}$	Numeryczne $g=1/25$	0,0012	0,0025	-0,0018	-0,0366	-0,0606	0,3230
	Numeryczne $g=1/50$	0,0013	0,0026	-0,0018	-0,0375	-0,0608	0,3308
	Analityczne [14]	0,0013	0,0026	-0,0018	-0,0377	-0,0609	0,3333

68 tysięcy słów w przypadku $g=1/50$, a czas obliczeń wynosił przykładowo około 120 sekund w przypadku powłoki $\alpha=2\pi$ i $n=1, \dots, 5$.

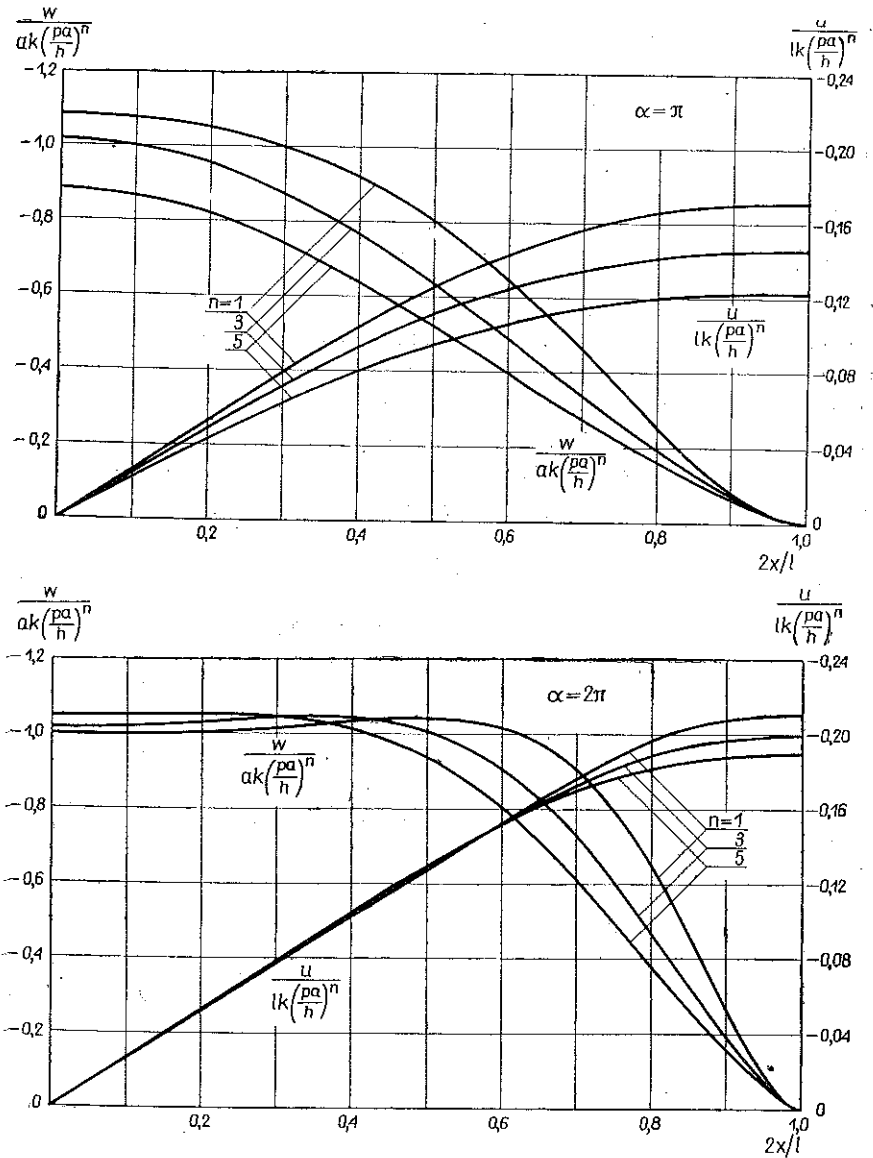
Jak już wspominaliśmy, zastąpienie równań różniczkowych (2.24) przez odpowiednie równania różnicowe prowadzi do błędów rzędu g^2 (g jest przedziałem podziału różnicowego). Dlatego też w obliczeniach błędy te były oszacowane przez porównanie wyników otrzymanych przy kroku całkowania $g=1/25$ oraz $g=1/50$. Tablica 2 przedstawia wyniki numeryczne dla przypadku liniowego $n=1$ dla kroku $g=1/25$ i $g=1/50$ wraz z odpowiednim rozwiązaniem ścisłym [14]. Różnica między wynikami dla $g=1/25$ i $g=1/50$ jest mniejsza niż 1,6% dla wielkości $w/ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ i 2,3% w przypadku M_x/pah , a z kolei wyniki dla $g=1/50$ pokrywają się z rozwiązaniem analitycznym z dokładnością 0,4% dla $w/k \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ i 0,8% dla M_x/pah . Ponieważ stwierdzono, że rozbieżność między wynikami dla $g=1/25$ i $g=1/50$ w przypadku $n=3$ i $n=5$ jest mniejsza niż dla $n=1$, uznano wyniki dla $g=1/50$ wystarczająco dokładne dla celów praktycznych. Stąd też wszystkie obliczenia zostały przeprowadzone dla przedziału różnicowego $g=1/50$.

Wyniki numeryczne dla każdej wartości n pokazane są na rys. 14–19.

Chociaż stan odkształcenia i naprężenia w długich kołowych rurach przy pominięciu efektu końców jest określony za pomocą wzoru (2.27) odpowiedni stan odkształcenia w powłoce $\alpha=\pi$ wykazuje, co jest dobrze widoczne z rys. 14a, znaczne odchylenie od stanu (2.27) nawet w środkowej części powłoki. Warto zauważyć, że wartość $w/ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ w przekroju $2x/l=0$ w przypadku $n=5$ jest około 12% mniejsza niż otrzymana ze wzoru (2.27), podczas gdy odpowiednie wartości dla $n=1$ i $n=3$ są większe od (2.27) w przybliżeniu o 9% i 2%. Z drugiej strony, w powłoce $\alpha=2\pi$ (rys. 14b) maksymalne wartości $w/ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ są od około 4% ($n=1$) do 5% ($n=5$) większe niż dla długich rur kołowych, a punkty maksymalnych wartości przesuwają się ze wzrostem n w kierunku środka powłoki. Chociaż wartości $w/ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ w środku powłoki prawie pokrywają się z wartością (2.27) w przypadku $n=1$, to dla $n=3$ i $n=5$ są około 2% ($n=3$) i 5% ($n=5$) większe niż (2.27). Można więc wyciągnąć interesujący z punktu widzenia projektowania na pełzanie wniosek, że wpływ zamocowanego końca przeważa w szerszym obszarze, gdy wykładnik pełzania n wzrasta. Wartość $u/lk \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ w przypadku $\alpha=2\pi$ prawie pokrywa się z (2.27) dopóty, dopóki $0 \leq 2x/l \leq 0,6$.

Rozkład M_x/pah i N_0/pa jest pokazany na rys. 15a i 15b. W powłoce $\alpha=\pi$ wartość N_0/pa w przypadku $n=1$ w punkcie $2x/l=0$ jest około 8% większa niż (2.27), podczas gdy w przypadku $n=3$ i $n=5$ jest większa odpowiednio około 1% i 4%. Jak widać z rys. 15b maksymalne wartości N_0/pa dla powłoki $\alpha=2\pi$ są około 4% ($n=1$) lub 2% ($n=3$) i 1% ($n=5$) większe niż dla długiej kołowej rury. Jednakże porównując M_x/pah i N_0/pa można zauważyć, że centralna część powłoki $\alpha=2\pi$

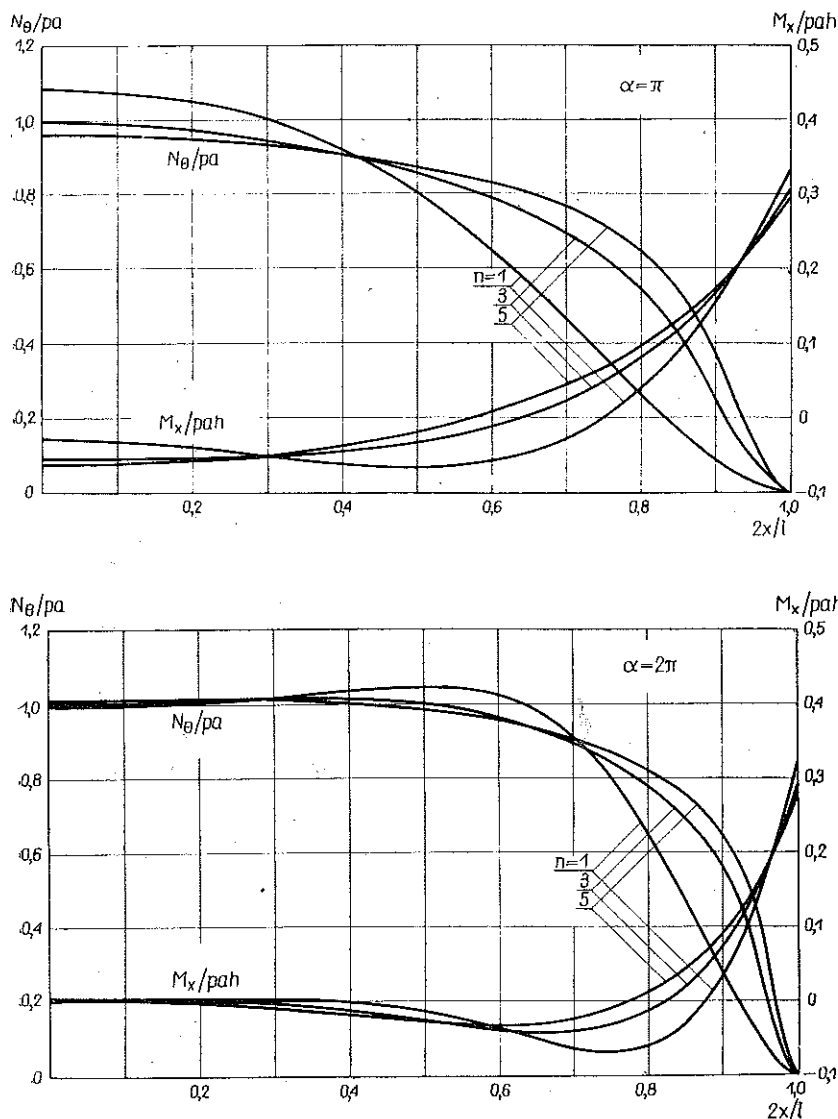
jest prawie w stanie naprężeń obwodowych opisanym wzorem (2.27). Z rys. 15 można zauważyć, że rozkłady M_x/pah i N_θ/pa stają się na ogół bardziej równomierne w kierunku osiowym, a efekt końców przeważa w szerszym zakresie, gdy n wzrasta.



Rys. 14. Rozkład przemieszczeń dla różnych wartości n

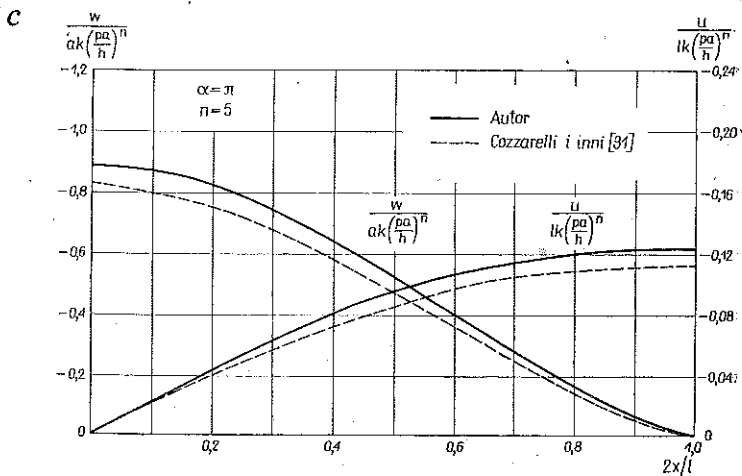
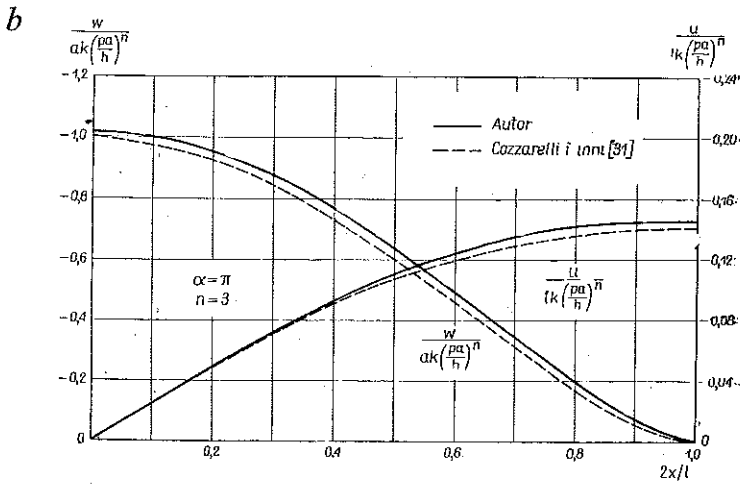
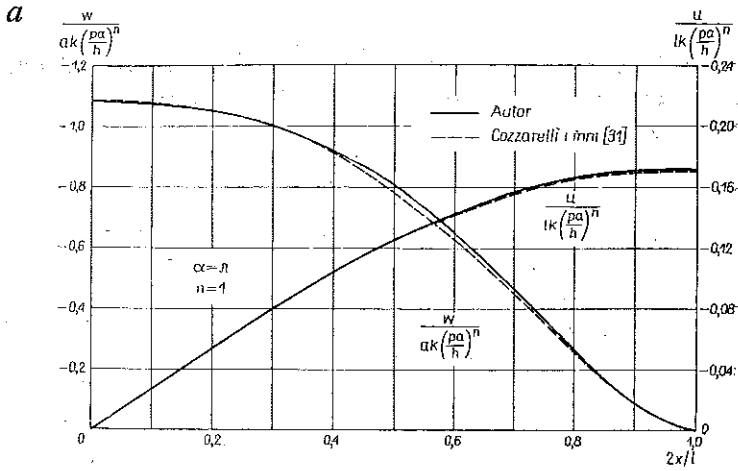
Na rys. 16 – 19 przedstawiono porównanie otrzymanych wyników z odpowiednimi rozwiązaniami dla powłok sandwiczowych. Linie przerywane reprezentują wyniki dla powłok sandwiczowych zaczerpnięte z pracy COZZARELLEGO i in. [31]. Korelację

między powłoką pełnościanną i sandwiczową wynikającą z warunku, aby zachowanie się obydwu powłok pokrywało się w stanie membranowym i czysto momentowym, zawdzięczamy RABOTNOWOWI [26].

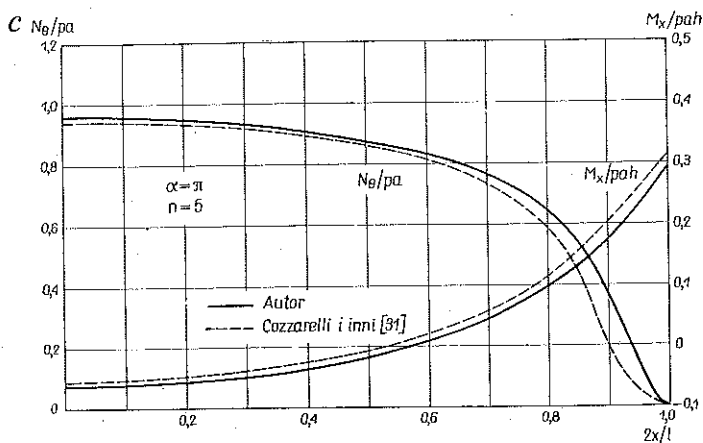
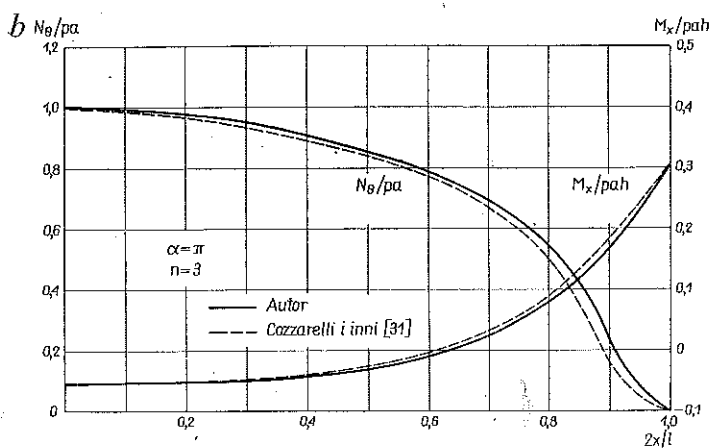
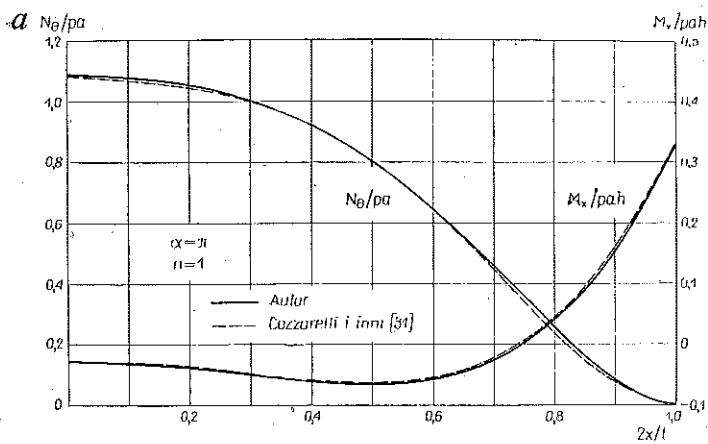


Rys. 15. Rozkład momentu gnącego i siły membranowej dla różnych wartości n

Wyniki dla powłoki cylindrycznej $\alpha = \pi$ są pokazane na rys. 16 i 17. Choć w przypadku $n=1$ rozwiązanie dla powłoki sandwiczowej powinno pokrywać się ściśle z rozwiązaniem dla powłoki pełnościennej, to jednak z rys. 16a daje się zauważyć rozbieżność wyników rzędu 3%, co można tłumaczyć błędem reprodukcji linii przerywanych z pracy [31] w połączeniu z błędem obliczeń, który można zauważyć

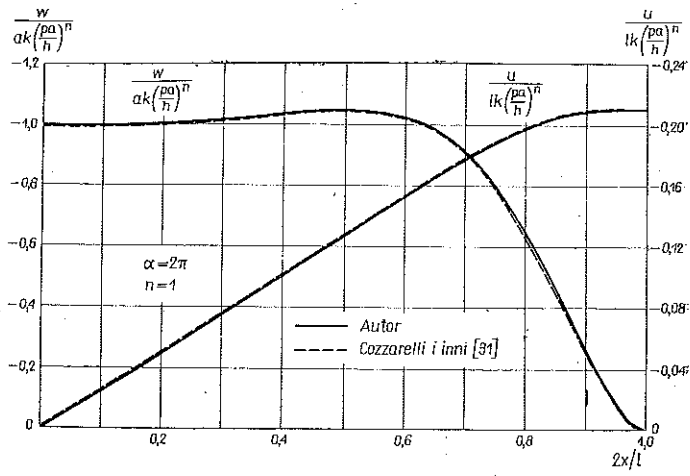


Rys. 16. Rozkład przemieszczeń ($\alpha = \pi$)

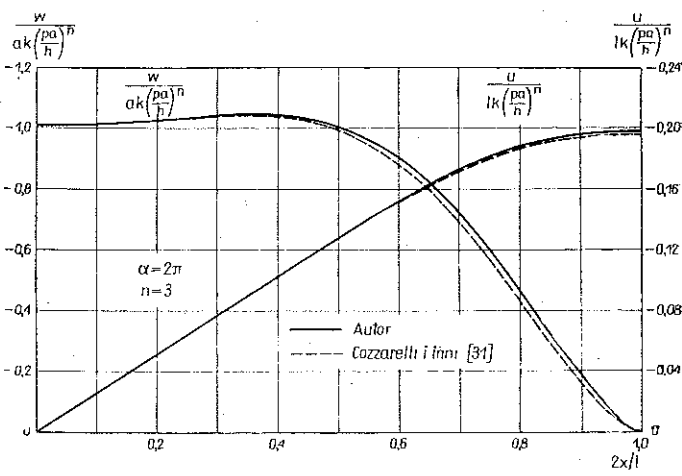


Rys. 17. Rozkład momentu giącego i siły membranowej ($\alpha = \pi$)

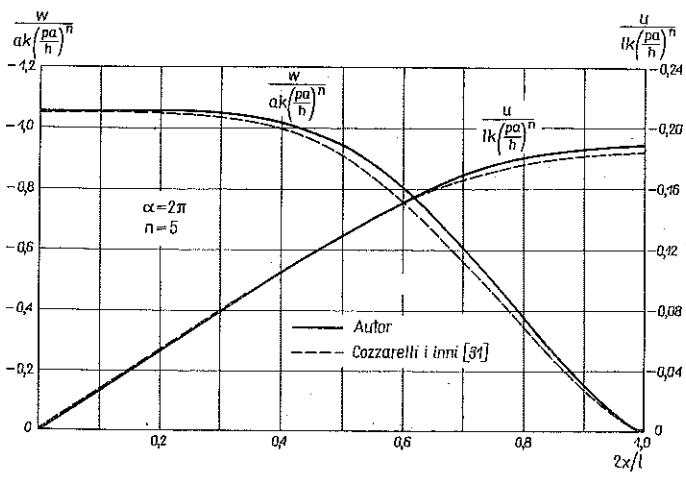
a



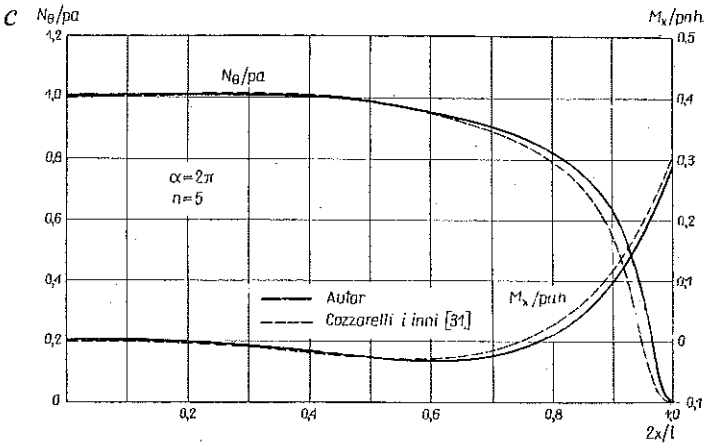
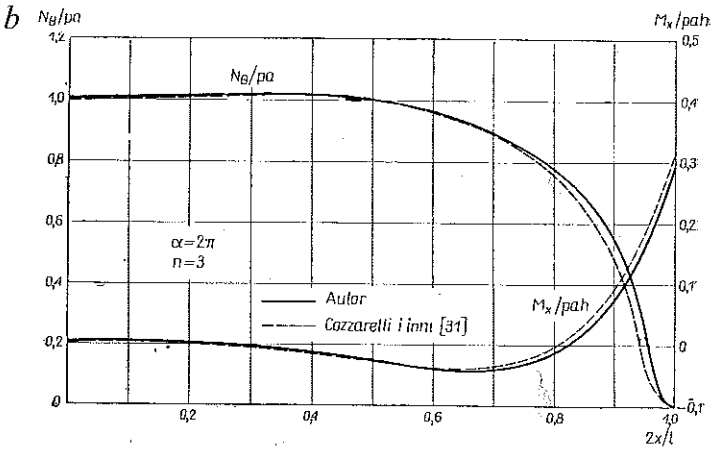
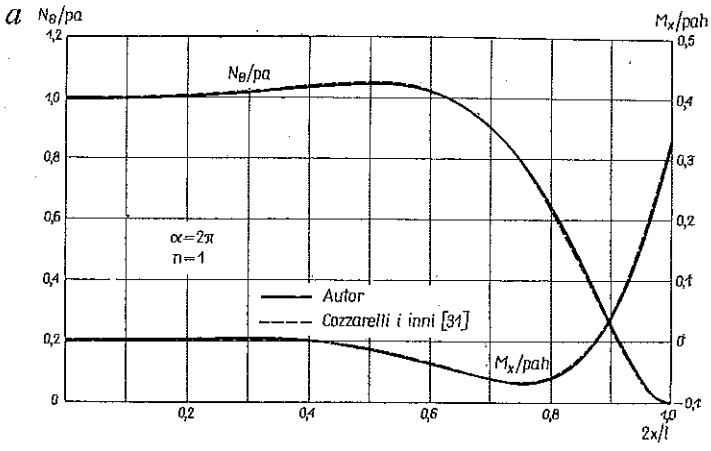
b



c



Rys. 18. Rozkład przemieszczenia ($\alpha = 2\pi$)



Rys. 19. Rozkład momentu gnącego i siły membranowej ($\alpha = 2\pi$)

w tablicy 2. W przypadku $n=3$ i $n=5$ pokazane na rys. 16b i 16c maksymalne wartości $w/ak \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ i $u/lk \left(\frac{pa}{h}\right)^n$ są większe od odpowiednich wartości COZZARELLEGO i in. [31] w przybliżeniu o 1% ($n=3$) 5% ($n=5$).

Podobny efekt można zaobserwować z rys. 17 odnośnie składowych momentu gnącego i siły membranowej z tą różnicą, że linie przerywane dla M_x/pah dają większe wartości niż linie ciągłe. Chociaż rozbieżność między linią ciągłą i przerywaną jest mniejsza niż w części środkowej i w bliskim sąsiedztwie zamocowanego końca, gdzie siła membranowa (część środkowa) i moment gnący (blisko końca) dominują nad sobą niezależnie, jest ona dość znaczna w przedziale $0,85 \leq 2x/l \leq 0,05$, gdzie efekt M_x/pah i N_0/pa można porównać. Jest oczywiste, że taki charakter wpływa ze wspomnianego już założenia, że zachowanie się modelu sandwiczowego pokrywa się z powłoką rzeczywistą jedynie w stanie membranowym i czysto zgięciowym w przypadku $n \neq 1$. Różnica maksymalnych wartości dla tych dwóch teorii wynosi odpowiednio 1% ($n=1$), 2% ($n=3$) i 4% ($n=5$) dla M_x/pah i 0,4% ($n=1$), 0,7% ($n=3$) i 1,5% ($n=5$) dla N_0/pa .

Podobne rezultaty dla powłoki $\alpha = 2\pi$ są przedstawione na rys. 18 i 19. Na rys. 18 odwrotnie niż na rys. 16 linie ciągłe i przerywane pokrywają się z sobą w przedziale $2x/l \leq 0,4$, co znowu potwierdza fakt, że te części powłoki, jak na rys. 15b, są w stanie naprężeń obwodowych.

Na podstawie rys. 19 różnice maksymalnych wartości M_x/pah i N_0/pa między powłoką pełnościenną i sandwiczową wynoszą odpowiednio od 3% ($n=1$) do 10% ($n=5$) i od 0,1% ($n=3$) do 0,5% ($n=5$). Znowu jak poprzednio nie pokrywają się linie ciągłej i przerywanej jest bardzo znaczne w przedziale $0,85 \leq 2x/l \leq 0,95$.

5. Wnioski

Zaproponowana została metoda numeryczna do rozwiązywania problemów ustalonego stanu pełzania powłok kołowo-walcowych, poddanych ciśnieniu wewnętrznemu, będąca połączeniem metody różnic skończonych i metody kolejnych przybliżeń. Przyjęto warunek plastyczności Misesa, stowarzyszone prawo płynięcia i potęgowe prawo pełzania. Jako przykłady numeryczne rozważone zostały zamocowane powłoki kołowo-walcowe z otwartymi końcami o dwóch różnych długościach. Dla ustalonego stanu pełzania szczegółowo zbadano stan deformacji i naprężenia. Okazało się, że zaproponowana metoda jest stateczna i otrzymano poprawne wyniki po kilku iteracjach względem czasu rozpoczynając od rozwiązania sprężystego. Metoda ta może być więc efektywnym narzędziem do rozwiązywania bardziej złożonych problemów ustalonego stanu pełzania płyt i powłok. Przedyskutowano efekt nieliniowości związku naprężenie-prędkość pełzania oraz wpływ zamocowania końca powłoki.

Wyniki numeryczne porównano z istniejącymi rozwiązaniami COZZARELLEGO i in. [31] dla powłok sandwichowych. Pokazano, że dla rozważanych w tej pracy powłok różnice maksymalnych wartości przemieszczeń, momentu gnącego i siły membranowej między powłoką pełnościenną i sandwichową wynoszą mniej niż 3% ($n=1$), 5% ($n=3$) i 10% ($n=5$), chociaż wyraźne różnice występują lokalnie w pobliżu zamocowanego końca, gdzie siła membranowa i moment gnący stanowią wielkości porównywalne. Model sandwichowy przyjmowany przez Cozzarellego może dać zatem dobre ilościowe i jakościowe oszacowanie stanu odkształcenia pełzania w pełnościennej powłoce walcowej. Jednakże w przypadkach, gdy stan naprężenia jest daleki od stanu membranowego lub czysto momentowego, takich jak powłoka walcowa, która jest dosyć krótka bądź poddana złożonemu działaniu siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego, lub powłoki kulistej o małej wyniosłości, gdzie efekty momentu gnącego są tak samo znaczne jak siły membranowej, założenie powłoki sandwichowej nie zawsze prowadzi do dobrego przybliżenia pełnościennej powłoki rzeczywistej, w szczególności dla dużych wartości wykładnika pełzania n . Słuszność teorii pełzania dla konstrukcji sandwichowych w tych przypadkach jest sprawą nadal otwartą.

Część tej pracy była przygotowana w czasie pobytu autora w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w roku akademickim 1969/1970. Autor tą drogą wyraża podziękowanie Polskiej Akademii Nauk za zaproszenie.

DODATEK I: Macierze A , $X(t)$ i $B(t)$

$$B(t) = \begin{bmatrix} (1-\nu^2)\mu + \frac{1}{2}Q_0 \\ \vdots \\ (1-\nu^2)\mu + \frac{1}{2}Q_N \\ \hline (1-\nu^2)P + \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (F_1 - 2F_0 + F_{-1}) + \frac{1}{2}R_0 \right\} \\ \vdots \\ (1-\nu^2)P + \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (F_{N-1} - 2F_{N-2} + F_{N-3}) + \frac{1}{2}R_{N-2} \right\} \\ (1-\nu^2)P + \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (F_N - 2F_{N-1} + F_{N-2}) + \frac{1}{2}R_{N-1} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\sqrt{3}}{1-\nu^2} \alpha^2 g^2 F_N \right\} \\ (1-\nu^2)P + \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} \frac{1}{\alpha^2 g^2} (F_{N+1} - 2F_N + F_{N-1}) + \frac{1}{2}R_N + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\sqrt{3}}{1-\nu^2} \alpha^2 g^2 F_N \right\} \end{bmatrix}$$

14. S. P. TIMOSHENKO and S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York 1959.
15. G. E. FORSYTHE and W. R. WASOW, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley, New York 1966.
16. A. RALSTON and H. S. WILF, *Mathematical Methods for Digital Computers*, John Wiley, New York 1960.
17. YU. N. RABOTNOV, *Creep of Constructional Elements*, Nauka (1966).
18. E. T. ONAT and H. YÜKSEL, Proc. 3rd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., ASME, New York 1958, 625.
19. M. P. BIENIEK and A.M. FREUDENTHAL, *J. Aerospace Sci.*, 1, 27 (1960), 763.
20. V. I. ROZENBLUM, *Prikl. Math. Mekh.*, 1, 27 (1963), 154.
21. C. R. CALLADINE, Proc. Symp. Nuclear Reactor Containment Building and Pressure Vessels, Butterworth 1960, 411.
22. C. R. CALLADINE, *Nonclassical Shell Problems*, North-Holland, 1964, 384.
23. C. R. CALLADINE and D. C. DRUCKER, *Quart. Appl. Math.*, 20 (1962), 79.
24. I. G. TEREGULOV, *Prikl. Math. Mekh.*, 26 (1962), 492.
25. I. G. TEREGULOV, *Izv. AN SSSR, Mekh. i Mashinostr.*, No. 6, 1963, 169.
26. YU. N. RABOTNOV, *Prikl. Math. Mekh.*, 1, 27 (1963), 154.
27. YU. N. RABOTNOV, *Applied Mechanics*, Proc. 11th Internat. Cong. Appl. Mech., Springer, 1966, 415.
28. YU. M. VOLCHOV, *Izv. AN SSSR, Mekh. i Mashinostr.*, No. 5, 1966, 118.
29. A. E. GEMMA, *J. Aerospace Sci.*, 12, 27 (1960), 953.
30. A. E. GEMMA, *J. Aerospace Sci.*, 3, 29 (1962), 352.
31. F. A. COZZARELLI, S. A. PATEL and B. VENKATRAMAN, *AIAA J.*, 7, 3 (1965), 1298.
32. T. P. BRYNE and A. C. MACKENZIE, *J. Mech. Eng. Sci.*, 8 (1966), 216.
33. N. J. HOFF, *Quart. Appl. Math.*, 1, 12 (1954), 49.
34. H. B. KELLER and E. L. REISS, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 3, 11 (1958), 273.
35. H. B. KELLER and E. L. REISS, *J. Aerospace Sci.*, 10, 26 (1959), 643.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К ЗАДАЧАМ ПОЛЗУЧЕСТИ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Применяется метод конечных разностей к вопросам ползучести цилиндрических оболочек, подверженных внутреннему давлению. На основании расчетов выясняются некоторые характерные свойства ползучести оболочек.

В первой части работы анализируется переходное состояние ползучести цилиндрических оболочек. Принимается степенный закон ползучести и теории Мизеса-Мизеса, Трески-Мизеса и Трески-Трески. Предполагается упрочнение материала, зависящее от деформации и упрочнение, зависящее от времени. Деформированное состояние и напряжения анализируются для разных геометрий и для разных величин внутреннего давления. Обсуждаются подробно различия между отдельными теориями ползучести и двумя гипотезами упрочнения. Вычисления проводились как для постоянного, так и для переменного во времени внутреннего давления.

Вторая часть работы касается установившейся ползучести круговых цилиндрических оболочек, на основе степенного закона ползучести типа Мизеса-Мизеса. Предложено метод последовательных приближений, в сочетании с методом конечных разностей. Исследовались подробно влияние геометрии оболочки и показателя ползучести на деформированное и напряженное состояния. Результаты, полученные в работе сравниваются с известными решениями для сэндвичевой оболочки и обсуждается правильность предположения сэндвичевых конструкций.

Summary

THE APPLICATION OF THE FINITE DIFFERENCE METHOD OF CREEP DEFORMATION
IN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

The numerical approach to creep deformation in pressurized circular cylindrical shells is developed by way of the finite difference method, and some features of the deformation in the shells are elucidated.

In Part I of the paper, the transient creep analysis of circular cylindrical shell is developed on the basis of the power creep law and the creep theories of Mises-Mises, Tresca-Mises and Tresca-Tresca type. Use is made of the strain-hardening hypotheses. The creep deformation and the associated state of stress is investigated for various shell geometries and various magnitudes of internal pressure. The difference between the creep theories and hardening hypotheses as applied to the present problem is also discussed. Calculations are performed for constant as well as variable internal pressures.

Part II is concerned with the analysis of the steady-state creep of a circular cylindrical shell according to the power creep law and the creep theory of Mises-Mises type. An iterative procedure combined with the finite-difference method is proposed. The effect of shell geometry and the creep exponent on the state of stress and rate of deformation is investigated. The rigorous results obtained are also compared with the previous solution on the basis of a sandwich shell, and the validity of the assumption of sandwich construction is discussed.

Praca została złożona w Redakcji 1 kwietnia 1970 r.
