

**BEZPOŚREDNIE WYZNACZANIE SKŁADOWYCH NAPRĘŻENIA METODĄ
CHARAKTERYSTYK NA PODSTAWIE SAMYCH ISOCHROM**

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

W pracy [1] W. SZCZEPIŃSKI rozwiązał problem wyznaczania pełnego stanu naprężenia na podstawie samego obrazu izochrom. Otrzymał on układ równań różniczkowych cząstkowych na dwie funkcje $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ oraz φ , gdzie σ_1, σ_2 oznaczają naprężenia główne, a kąt φ daje kierunek większego z nich. Układ rozwiązuje się przez całkowanie wzdłuż charakterystyk. Znając rozwiązania p i φ , a z doświadczenia⁽¹⁾ $m = \sigma_1 - \sigma_2$, można określić stan naprężenia w każdym punkcie pokrytego siatką charakterystyk obszaru, w szczególności składowe $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ tensora naprężeń w dowolnym układzie współrzędnych x, y .

W pracy niniejszej przedstawiamy równania, które na podstawie znajomości izochrom pozwalają bezpośrednio wyznaczyć składowe tensora naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ bez szukania jego wartości głównych.

W tym celu posłużymy się wzorem

$$(1) \quad m^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2$$

oraz układem równań równowagi

$$(2) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma_1, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma_2.$$

Rozwiązujemy równość (1) względem τ_{xy} :

$$(3) \quad \tau_{xy} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2},$$

a następnie przez wstawienie (3) do (2) dostajemy hiperboliczny quasi-liniowy układ równań różniczkowych cząstkowych na dwie funkcje σ_x i σ_y :

$$(4) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\pm 2 \sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\pm 2 \sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{m (\partial m / \partial y)}{\pm 2 \sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} - \gamma_1 = 0,$$

⁽¹⁾ Wartości naprężeń podajemy w jednostkach stałej modelowej.

$$(4) \quad -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{m(\partial m / \partial x)}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} - \gamma_2 = 0.$$

Układ ten posiada dwie rodziny charakterystyk:

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2} + m}{\sigma_x - \sigma_y}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2} - m}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Wzdłuż charakterystyk zachodzą następujące związki różniczkowe

$$(6) \quad \left\{ \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4[m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2]} + \frac{m}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} - \frac{1}{2} \right\} \frac{d\sigma_x}{dx} + \\ + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4[m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2]} \frac{d\sigma_y}{dx} + M + N \frac{dy}{dx} = 0, \\ \left\{ \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4[m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2]} - \frac{m}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} - \frac{1}{2} \right\} \frac{d\sigma_x}{dx} + \\ + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4[m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2]} \frac{d\sigma_y}{dx} + M + N \frac{dy}{dx} = 0,$$

gdzie

$$M = \gamma_1 \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \gamma_2 + m(\partial m / \partial y)}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y) m(\partial m / \partial x)}{4[m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2]}, \\ N = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) m(\partial m / \partial y)}{4[m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2]} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \gamma_1}{\pm 2\sqrt{m^2 - (\sigma_x - \sigma_y)^2}}.$$

Znacznie prostsze równania uzyskamy, jeżeli (zamiast τ_{xy}) wyrugujemy jedną ze składowych diagonalnych tensora, np. σ_x :

$$(7) \quad \sigma_x = \sigma_y \pm \sqrt{m^2 - 4\tau_{xy}^2}.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$(8) \quad \sigma_y \equiv \sigma, \quad \tau_{xy} \equiv \tau.$$

Po skorzystaniu z (7) układ (2) przyjmuje postać

$$(9) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{4\tau}{\pm \sqrt{m^2 - 4\tau^2}} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\tau}{\pm \sqrt{m^2 - 4\tau^2}} \frac{\partial m}{\partial x} - \gamma_1 = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \gamma_2 = 0,$$

której odpowiadają następujące równania charakterystyk:

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = \alpha \equiv \frac{\pm 2\tau + m}{\sqrt{m^2 - 4\tau^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta \equiv \frac{\pm 2\tau - m}{\sqrt{m^2 - 4\tau^2}};$$

α, β z definicji oznaczają prawe strony równań (10).

Wzdłuż charakterystyk spełnione są równania

$$(11) \quad \frac{\pm 2\tau + m}{\sqrt{m^2 - 4\tau^2}} \frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\tau}{dx} - \gamma_2 + \left[\frac{-4\tau\gamma_2 + m \frac{\partial m}{\partial x}}{\pm \sqrt{m^2 - 4\tau^2}} - \gamma_1 \right] \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\pm 2\tau - m}{\sqrt{m^2 - 4\tau^2}} \frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\tau}{dx} - \gamma_2 + \left[\frac{-4\tau\gamma_2 + m \frac{\partial m}{\partial x}}{\pm \sqrt{m^2 - 4\tau^2}} - \gamma_1 \right] \frac{dy}{dx} = 0.$$

Zarówno równania (6) jak i znacznie od nich prostsze (11) w połączeniu z równaniem (1) pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie składowych tensora naprężenia w przyjętym układzie współrzędnych. Łatwo sprawdzić posługując się zależnościami

$$(12) \quad \tau_{xy} = \frac{m}{2} \sin 2\varphi,$$

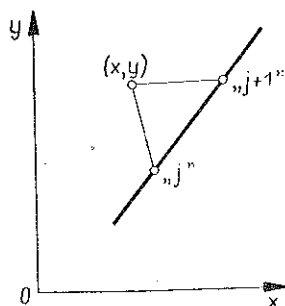
$$\sigma_x - \sigma_y = m \cos 2\varphi,$$

że sens fizyczny charakterystyk (5) lub (10) jest identyczny z sensem charakterystyk równań wyprowadzonych w pracy [1], tzn. tworzą one kąt 45° z trajektoriami naprężeń głównych.

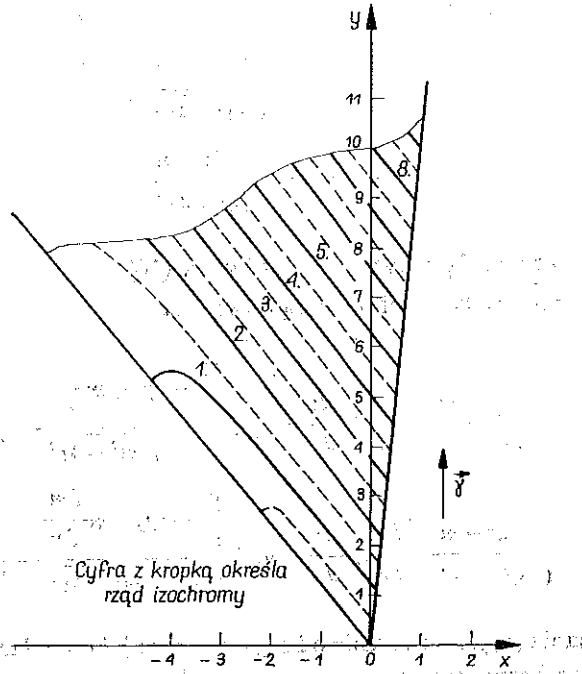
Równania (11) dowodzą ponadto, że do rozdzielania naprężeń wystarczy prócz funkcji m tylko jej jedna pochodna cząstkowa, w naszym wypadku $\partial m / \partial x$; równania w pracy [1] oraz układ (6) niniejszej pracy wymagają podania obu pochodnych cząstkowych $\partial m / \partial x$ i $\partial m / \partial y$. Jest możliwe, że w pewnych przypadkach wykorzystanie obu pochodnych cząstkowych zapewni większą dokładność obliczeń. Natomiast, jeśli chodzi o pracochłonność, bardziej wskazane jest rozdzielanie naprężeń za pomocą układu (11) zwłaszcza wtedy, gdy wartości pochodnych znajdujemy przez różniczkowanie graficzne.

Znak przed pierwiastkiem w równaniach (3) i (7) ustalamy na podstawie wartości brzegowych.

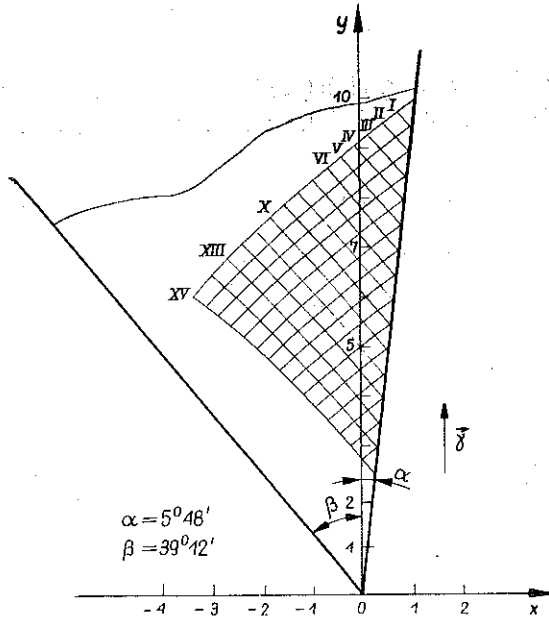
Równania (10) i (11) przedstawimy w formie różnicowej, potrzebnej w obliczeniach numerycznych.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Przypuśćmy, że w dwóch punktach, np. brzegowych j oraz $j+1$ o współrzędnych (x_j, y_j) , (x_{j+1}, y_{j+1}) , znamy funkcje σ i τ , których wartości są odpowiednio równe σ_j, τ_j oraz σ_{j+1}, τ_{j+1} . Współrzędne punktu przecięcia się charakterystyk przechodzących przez j i $j+1$, a należących do różnych rodzin, są (rys. 1) następujące:

$$(13) \quad x = \frac{y_{j+1} - y_j - \alpha_{j+1} x_{j+1} + \beta_j x_j}{\beta_j - \alpha_{j+1}},$$

$$y = y_j + \beta_j (x - x_j).$$

Funkcje poszukiwane przyjmują w punkcie (x, y) wartości

$$(14) \quad \sigma = \frac{h1 - 2h + \tau_j - \tau_{j+1} + \beta_j \sigma_j - \alpha_{j+1} \sigma_{j+1}}{\beta_j - \alpha_{j+1}}$$

$$\tau = h1 + \tau_j - \beta_j (\sigma - \sigma_j),$$

Tablica

Rzadek	x	y	$\gamma^{-1} \sigma_y$ numer.	$\gamma^{-1} \tau_{xy}$ numer.	$\gamma^{-1} \sigma_y$ teoret.	$\gamma^{-1} \tau_{xy}$ teoret.
I	0,0291	2,7724	-2,2536	-0,1989	-2,2510	-0,2007
	0,0799	3,2729	-2,6982	-0,2444	-2,6961	-0,2459
	0,1307	3,7733	-3,1429	-0,2898	-3,1410	-0,2911
	0,1815	4,2735	-3,5875	-0,3352	-3,5859	-0,3363
	0,2323	4,7738	-4,0321	-0,3805	-4,0307	-0,3814
	0,2831	5,2739	-4,4768	-0,4257	-4,4753	-0,4266
	0,3339	5,7741	-4,9214	-0,4710	-4,9202	-0,4718
	0,3847	6,2742	-5,3660	-0,5162	-5,3649	-0,5170
	0,4355	6,7743	-5,8106	-0,5615	-5,8097	-0,5621
	0,4863	7,2743	-6,2552	-0,6067	-6,2544	-0,6073
	0,5371	7,7744	-6,6999	-0,6519	-6,6990	-0,6525
	0,5879	8,2745	-7,1445	-0,6971	-7,1437	-0,6976
	0,6387	8,7745	-7,5891	-0,7423	-7,5884	-0,7428
	0,6895	9,2746	-8,0337	-0,7875	-8,0331	-0,7880
0,7403	9,7746	-8,4783	-0,8327	-8,4777	-0,8331	
VI	-1,1137	4,0558	-2,3262	-0,0537	-2,3118	-0,0658
	-1,0585	4,5720	-2,7851	-0,1032	-2,7730	-0,1130
	-1,0048	5,0834	-3,2397	-0,1513	-3,2292	-0,1595
	-0,9520	5,5919	-3,6916	-0,1987	-3,6824	-0,2057
	-0,8997	6,0985	-4,1418	-0,2454	-4,1336	-0,2516
	-0,8477	6,6037	-4,5908	-0,2919	-4,5834	-0,2974
	-0,7960	7,1081	-5,0390	-0,3381	-5,0323	-0,3430
	-0,7445	7,6117	-5,4866	-0,3841	-5,4804	-0,3886
	-0,6931	8,1147	-5,9337	-0,4299	-5,9280	-0,4341
	-0,6418	8,6173	-6,3805	-0,4757	-6,3752	-0,4755
XIII	-2,7870	5,6275	-2,1807	0,1866	-2,1534	0,1532
	-2,7093	6,2134	-2,7133	0,1218	-2,6898	0,0967
	-2,6406	6,7692	-3,2150	0,0643	-3,1946	0,0441
XIV	-3,0342	5,8247	-2,1303	0,2259	-2,1020	0,1880
	-2,9516	6,4288	-2,6818	0,1752	-2,6571	0,1293
XV	-3,2833	6,0128	-2,0705	0,2670	-2,0415	0,2239

przy czym

$$1h = \gamma_2(x - x_j) + \left[\frac{4\tau_j \gamma_2 - m_j (\partial m / \partial x)_j}{\pm \sqrt{m_j^2 - 4\tau_j^2}} - \gamma_1 \right] (y - y_j),$$

$$2h = \gamma_2(x - x_{j+1}) - \left[\frac{4\tau_{j+1} \gamma_2 - m_{j+1} (\partial m / \partial x)_{j+1}}{\pm \sqrt{m_{j+1}^2 - 4\tau_{j+1}^2}} - \gamma_1 \right] (y - y_{j+1}).$$

Przydatność wzorów (13) i (14) sprawdziliśmy rozwiązując znane z teorii zagadnienie klina nieskończonego pod ciężarem własnym. Klin o przyjętych proporcjach (rys.3) ma następujące rozwiązanie teoretyczne [2]:

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \sigma_x &= 0,070319x - 0,016317y, \\ \frac{1}{\gamma} \sigma_y &= -0,848817x - 0,803030y, \\ \frac{1}{\gamma} \tau_{xy} &= -0,196970x - 0,070319y. \end{aligned}$$

Na podstawie (1) i (5) obliczyliśmy kształt izochrom (rys. 2), a następnie znaleźliśmy wg (13) i (14) rozwiązanie przybliżone układu (9). Rysunek 3 przedstawia zbudowaną metodą numeryczną siatkę charakterystyk.

W podanej tabelicy zamieszczono wyniki obliczeń dla I, VI, XIII—XV rzędka zbudowanej siatki, porównane ze ścisłym rozwiązaniem teoretycznym. Widzimy bardzo dobrą zgodność rozwiązania «numerycznego» i analitycznego. Maksymalny błąd względny największej ze składowych naprężenia nie przekracza w żadnym punkcie 2%.

Przytoczony przykład wykazuje zatem skuteczność proponowanej metody rozdzielania naprężeń.

Literatura cytowana w tekście

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Method of characteristics in computations of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci., tech., 12 (1964), 619.
2. M. PIGEAUD, *Résistance des matériaux et élasticité*, 2, 3 éd. Gauthier-Villars, Paris 1950.

Резюме

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ ТОЛЬКО ОДНИХ ИЗОХРОМ

Путем подстановки в дифференциальные уравнения равновесия функции известной из поляризационного оптического измерения, описывающей поведение разности главных напряжений, получается система двух дифференциальных уравнений с частными производными для двух составляющих тензора напряжений; эта система может быть решена методом характеристик. При этом оказывается, что характеристики имеют физический смысл, иден-

тичный с характеристиками уравнений, введенными В. Щепинским. В методе, предлагаемом для определения искомых составляющих напряжений, достаточно знание изохром $m(x, y)$ и только их одной частной производной, например $\partial m/\partial x$.

Метод проверяется сравнивая решение, полученное этим методом, с аналогичным решением теоретическим.

Summary

DIRECT DETERMINATION OF THE STRESS COMPONENTS BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS ON THE BASIS OF ISOCHROMES ONLY

By substituting into the differential equations of equilibrium the function describing the difference of principal stresses, known from photo-elastic measurement, we obtain a set of two partial differential equations for the two components of the stress tensor; that set of equations can be solved by means of the method of characteristics. It is found that the characteristics possess physical sense identical with the characteristics of the equations derived by W. Szczepiński. In the method suggested for finding the components of stress sought for, it suffices to know the isochromes $m(x, y)$, and only one partial derivative-e.g., $\partial m/\partial x$.

The method has been verified by comparing it for the solution of a certain problem obtained by means of it with that known from the theory.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 marca 1970 r.