

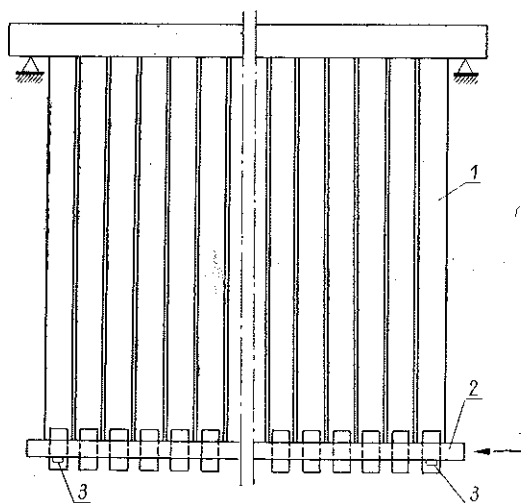
PRZYŚPIESZENIA DRGAŃ SKRĘTNYCH CIENKOŚCIENNEGO PRĘTA O PROFILU OTWARTYM

MARIAN S A R N A (WARSZAWA)

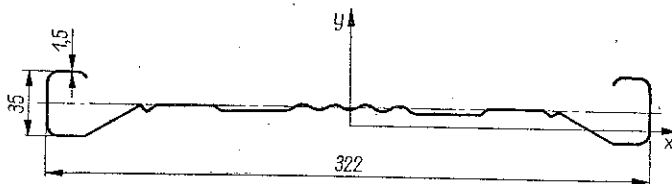
Wstęp

Doniosłą rolę w walce z ujemnymi skutkami cywilizacji technicznej naszego stulecia odgrywają odpylacze elektrostatyczne zapobiegając zanieczyszczeniu atmosfery ziemskiej. Jednym z etapów oczyszczania aerozoli za pomocą elektro-

filtrów jest usunięcie pyłu zgromadzonego na elektrodach zbiorczych elektrofiltru [1 i 2]. Elektrody zbiorcze stanowią zawieszone w rzędach profilowane pręty. Układ takich prętów przedstawiono na rys. 1, a profil przekroju poprzecznego pojedynczej elektrody-pręta na rys. 2. Usunięcie pyłu zebranego na elektrodach następuje wskutek wzbudzenia w nich drgań o odpowiednich wartościach przyśpieszeń. Wzbudzenie drgań realizowane jest przez osiowe uderzenie młotka przerzutowego w belkę 2, spoczywającą na wspornikach 3 (rys. 1). Belka ta zderzając się z poszczególnymi elektrodami pobudza je do drgań. Potrzeba poszukiwania optymalnych rozwiązań technicznych w sensie najefektywniejszego oddzielania pyłu od elektrod doprowadziła do badania ich przyśpieszeń.



Rys. 1



Rys. 2

Elektrody potraktujemy jako cienkościenne pręty o profilu otwartym z jedną płaszczyzną symetrii, dla których można stosować teorię WŁASOWA [3]. W niniejszej pracy będziemy badać przyspieszenia w cienkościennym pręcie na podstawie teorii propagacji fal, traktując wzbudzający impuls jako znany.

Oznaczenia

- $\zeta(z, t)$ przemieszczenie podłużne w pręcie [m],
 $\eta(z, t)$ przemieszczenie wzdłuż osi Oy rys. 2 [m],
 $\xi(z, t)$ przemieszczenie wzdłuż osi Ox rys. 2 [m],
 $\varphi(z, t)$ kąt skręcenia pręta [rad],
 ρ ciężar właściwy materiału $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,
 A pole powierzchni przekroju poprzecznego $[\text{m}^2]$,
 J_x, J_y momenty bezwładności przekroju poprzecznego $[\text{m}^4]$,
 J_ω wycinkowy moment bezwładności przekroju poprzecznego $[\text{m}^6]$,
 a_y współrzędna środka skręcania przekroju poprzecznego pręta [m],
 G moduł sprężystości przy skręcaniu $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$,
 J_s moment bezwładności czystego skręcania $[\text{m}^4]$,
 E moduł Younga $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$,
 ν współczynnik Poissona,

$$r^2 = \frac{J_x + J_y}{A} + a_y^2 [\text{m}^2], \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}.$$

Obok oznaczeń podano jednostki podstawowe w układzie SI.

1. Analiza równań ruchu

Równania drgań cienkościennego pręta o profilu otwartym i jednej płaszczyźnie symetrii mają zgodnie z teorią Własowa [3] postać

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & E_1 A \frac{\partial^2 \zeta(z, t)}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 \zeta(z, t)}{\partial t^2} = 0, \\
 & E_1 J_x \frac{\partial^4 \eta(z, t)}{\partial z^4} - \rho J_x \frac{\partial^4 \eta(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \eta(z, t)}{\partial t^2} = 0, \\
 & E_1 J_y \frac{\partial^4 \xi(z, t)}{\partial z^4} - \rho J_y \frac{\partial^4 \xi(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} + a_y \rho A \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = 0, \\
 & E_1 J_\omega \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^4} - \rho J_\omega \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} - G J_s \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + r^2 A \rho \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} + \\
 & \quad + a_y \rho A \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Równanie (1.1)₁ opisuje drgania podłużne pręta, równania (1.1)_{2, 3} drgania poprzeczne, przy czym drgania poprzeczne opisane równaniem (1.1)₃ są sprzężone z drganiami skrętnymi opisanymi równaniem (1.1)₄.

W usuwaniu osiadłej na elektrodach elektrofiltru warstwy pyłu istotne znaczenie mają przyspieszenia normalne do powierzchni środkowej pręta [4–6]. Wskazuje to, że najpierw należy badać drgania poprzeczne opisane równaniem (1.1)₂ i drgania skrętne. Ponieważ w elektrofiltrze mamy do czynienia ze wzbudzeniem drgań poprzecznych (1.1)₃, dających przyspieszenia styczne na większości użytecznej powierzchni elektrody, oraz ze wzbudzeniem drgań skrętnych (1.1)₄, które dają składową normalną przyspieszeń, zajmiemy się szczegółowo równaniem drgań skrętnych (1.1)₄.

Przyjmijmy, że równania (1.1)_{3, 4} mogą być traktowane jako słabo sprzężone. W dalszych rozważaniach sprzężenie to pominiemy, jak również w równaniu (1.1)₄ opuścimy ostatni wyraz. Wówczas otrzymujemy

$$(1.2) \quad \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^4} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + \frac{r^2 A}{J \omega} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie

$$a^2 = \frac{E_1}{\rho} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \quad k^2 = \frac{G J_s}{E_1 J_\omega} \left[\frac{1}{\text{m}^2} \right].$$

Uproszczenie takie wprowadzamy tu bez oszacowania popełnionego błędu, które może być przeprowadzone przy wykorzystaniu metody perturbacji [7].

2. Wybór metody rozwiązania równania

Równanie (1.2) możemy rozwiązywać metodą Fouriera przez rozdzielenie zmiennych [8 i 9] bądź sprawdzić problem do rozwiązania równania całkowego, czy też posłużyć się rachunkiem operatorowym. Przy poszukiwaniu przyspieszeń sposoby te są rachunkowo bardzo kłopotliwe.

Zastanówmy się nieco bliżej nad rozwiązaniem metodą Fouriera. Niechaj na brzegu pręta ($z=0$) dany będzie moment skręcający $M_k(t)$ [10, 11 i 12]. Moment ten możemy zastąpić obciążeniem rozłożonym na dowolnie małym odcinku pręta:

$$\begin{aligned} m(z, t) &\neq 0 & \text{dla } 0 \leq z \leq \lambda, \\ m(z, t) &= 0 & \text{dla } \lambda < z. \end{aligned}$$

Równanie (1.2) przejdzie wówczas w niejednorodne i łatwo jest wyznaczyć jego rozwiązanie w postaci szeregu Fouriera. W ten sposób otrzymuje się rozwiązanie odnoszące się do przedziału czasu, w którym $M_k(t) \neq 0$, czyli tam gdzie całka Duhamela jest różna od zera. Ponieważ moment $M_k(t)$ jest krótkotrwały (czas trwania impulsu jest taki, że zaburzenie nie obejmuje całego pręta) uzyskane tą drogą rozwiązanie obejmuje również tę część pręta, gdzie zaburzenie nie zdołało jeszcze dotrzeć. Wpływa to stąd, że metoda Fouriera rozwiązywania równania

(1.2) opiera się na założeniu, że mamy do czynienia z falą stojącą. Znalazienie przyspieszeń możliwe jest dopiero po wprowadzeniu do równania ruchu tłumienia materiałowego [12 i 13], ponieważ wówczas szereg opisujący przyspieszenia może być zbieżny. Konieczne jest przy tym uwzględnienie w obliczeniach dużej liczby wyrazów szeregu, co czyni metodę rachunkowo kłopotliwą i mało użyteczną. Nakłoniło to do poszukiwania innych sposobów rozwiązania problemu na gruncie teorii propagacji fal.

3. Wyjaśnienie charakteru równania (1.2)

Zobaczmy, czy równanie (1.2) dopuszcza rozwiązanie dla zagadnienia rozchodzenia się zaburzenia ze skończoną prędkością i czy można je rozwiązać posługując się teorią propagacji fal. W tym celu przedstawimy równanie (1.2) w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} = u(z, t), \quad \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = v(z, t), \quad \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = r(z, t),$$

$$\frac{\partial r(z, t)}{\partial z} = p(z, t), \quad \frac{\partial r(z, t)}{\partial t} = q(z, t).$$

Prawdziwe są również zależności:

$$(3.2) \quad \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\partial p(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial q(z, t)}{\partial z}.$$

Równanie (1.2) przybiera postać

$$(3.3) \quad \frac{\partial p(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial q(z, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial v(z, t)}{\partial t},$$

gdzie

$$a_1^2 = a^2 \frac{J_\omega}{r^2 A} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right].$$

Uzupełnijmy równanie (3.3) wyrażeniami różniczek zupełnych dla występujących w nim funkcji:

$$(3.4) \quad du(z, t) = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} dz + \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} dt, \quad dv(z, t) = \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} dz + \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} dt,$$

$$dp(z, t) = \frac{\partial p(z, t)}{\partial z} dz + \frac{\partial p(z, t)}{\partial t} dt, \quad dq(z, t) = \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} dz + \frac{\partial q(z, t)}{\partial t} dt.$$

W ten sposób otrzymano układ dwunastu równań o dwunastu niewiadomych [15], równoważny równaniu (1.2).

Niewiadomymi są następujące funkcje:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial z}, \quad \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Macierz układu równań ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k^2 & 0 & 0 & \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dz & dt & 0 & 0 & dp \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dz & dt & dq \\ 0 & 0 & dz & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & du \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dz & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dv \end{bmatrix}$$

Badany układ równań jest nieoznaczony, gdy wyznacznik główny oraz pozostałe wyznaczniki układu są równe zero. Przyrównanie głównego wyznacznika układu do zera wyznacza krzywe, wzdłuż których mogą wystąpić nieciągłości pochodnych $\varphi(z, t)$ dowolnego rzędu. Krzywe te zwane charakterystykami są następujące [16]:

$$(3.5) \quad dz = a dt, \quad dz = -a dt;$$

$$(3.6) \quad (dt)^2 = 0.$$

Z warunku zgodności układu (3.1) – (3.3) czyli z przyrównania pozostałych wyznaczników do zera mamy

$$-\frac{a^3}{a_1^2} du + \frac{a^2}{a_1^2} dv + a dp - r \left(k^2 a^2 dt - \frac{a^4}{a_1^2} \right) dt = dq \quad \text{dla } dz = a dt,$$

(3.7)

$$\frac{a^3}{a_1^2} du + \frac{a^2}{a_1^2} dv - a dp - r \left(k^2 a^2 - \frac{a^4}{a_1^2} \right) dt = dq \quad \text{dla } dz = -a dt.$$

Dla charakterystyk $(dt)^2 = 0$ układ równań jest spełniony tożsamościowo.

Ponieważ układ równań posiada charakterystyki (3.6) pozwalające rozprzestrzenić się zaburzeniu nieskończenie szybko, równanie (1.2) nie jest hiperboliczne lecz paraboliczne [17].

3.1. Wprowadzenie równań zastępczych. Powyższe rozważania wyjaśniają, że równanie (1.2) ma charakter paraboliczny. Postawmy wobec tego pytanie, czy można kosztem mniejszej dokładności rozwiązania tak przekształcić równanie (1.2), aby uwzględniło ono skończoną wartość prędkości rozchodzenia się zaburzeń. Aby ten problem rozwiązać, dodajmy i odejmijmy od równania (1.2) funkcję $\mathfrak{B} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2}$:

$$(3.8) \quad \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^4} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + \mathcal{G} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} - \\ - \mathcal{G} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2}.$$

Postawmy teraz następującą hipotezę: istnieje \mathcal{G} stała na płaszczyźnie zt fakcie, że w przybliżeniu można napisać

$$(3.9) \quad (k^2 + \mathcal{G}) \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Wobec powyższego (3.8) przyjmie postać

$$(3.10) \quad \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial t^2} = -\mathcal{G} \Theta(z, t),$$

gdzie

$$\Theta(z, t) = \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2}.$$

Równanie (1.2) zostało formalnie w sposób przybliżony zastąpione jednorodnym równaniem falowym (3.9) oraz równaniem telegraficznym (3.10). Fizycznie oznacza to, że siłę bezwładności skręcenia pręta $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2}$ zrównoważono zwiększoną siłą sprężystości odpowiadającą czystemu skręceniu.

3.2. Przesłanki dla wprowadzenia równań zastępczych. Zwróćmy obecnie uwagę na przesłanki, które usprawiedliwiają wysunięcie powyższej hipotezy.

Jeżeli użyć oznaczenia

$$\Theta_1(z, t) = \Theta(z, t) - k^2 \varphi(z, t),$$

to równanie (1.2) przyjmie postać

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 \Theta_1(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Theta_1(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \left(k^2 - \frac{r^2 A}{J_\omega} \right) \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2}.$$

W statyce dla momentu skręcającego dopuszczalne jest następujące przybliżenie:

$$\frac{M(z, t)}{E_1 J_\omega} = -\frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} + k^2 \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \approx \frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z},$$

jeśli tylko pręt jest na tyle krótki, że spełniona jest nierówność $kl < 0,5$ [18]. Jeżeli przenieść to przybliżenie na grunt dynamiki dla krótkotrwałych zaburzeń, tzn. gdy $kl_a < 0,5$, gdzie

$$l_a = a\tau, \quad l_a < l$$

oraz gdzie τ oznacza czas działania momentu $M(z, t)$, a l długość pręta, to równanie (3.11) przyjmuje postać

$$(3.12) \quad \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Theta(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2} \left(k^2 - \frac{r^2 A}{J_\omega} \right) \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2}.$$

Przy wyprowadzeniu równania (3.12) milcząco założyliśmy, że nierówności spełnione dla $\Theta(z, t)$ i $\varphi(z, t)$ będą prawdziwe dla ich pochodnych względem z i t . Zauważmy, że równania (3.12) i (3.10) mają podobną postać. Jeżeli w (3.12) byłoby można zastąpić pochodną $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2}$ przez $\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2}$, tzn. zastąpić siłę bezwładności siłą sprężystą, to zgodność obu równań będzie zupełna, a współczynnik \mathcal{B} przyjmie wartość $\mathcal{B} = \frac{r^2 A}{J_\omega} - k^2$. Oznaczając $\Theta_2(z, t) = \Theta(z, t) - \frac{r^2 A}{J_\omega} \varphi(z, t)$ równanie (1.2) przedstawimy w postaci

$$(3.13) \quad \frac{\partial^2 \Theta_2(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Theta_2(z, t)}{\partial t^2} = - \left(\frac{r^2 A}{J_\omega} - k^2 \right) \Theta(z, t).$$

Jeżeli spełniona jest nierówność $\Theta(z, t) \gg \varphi(z, t)$ (przy niezbyt dużym $r^2 A/J_\omega$), co geometrycznie oznacza, że krzywizna krzywej $\varphi(z, t)$ jako funkcji z jest duża w porównaniu z samą funkcją, i jeśli nierówność ta będzie prawdziwa dla pochodnych względem z i t , to wobec $\Theta_2(z, t) \approx \Theta(z, t)$ równanie (3.13) przyjmie postać (3.10). Innymi słowy spełnione będzie równanie

$$(3.14) \quad \frac{r^2 A}{J_\omega} \left[\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} \right] = 0,$$

to (3.13) przechodzi również w równanie (3.10), a parametr \mathcal{B} wynosi

$$\mathcal{B} = \frac{r^2 A}{J_\omega} - k^2.$$

3.3. Rozwiązanie równań (3.9) i (3.19) w obszarze I. Zastanówmy się nad rozwiązaniem układu równań (3.9) i (3.10). Przekształcając równanie (3.9) otrzymujemy

$$(3.15) \quad \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2 \frac{J_\omega}{r^2 A} (k^2 + \mathcal{B})} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Rozwiązania równań (3.15) i (3.10) powinny być zgodne, tzn. $\varphi(z, t)$ spełniające równanie (3.15) powinno również spełniać (3.10). Jeżeli dopuścimy istnienie nieciągłości pochodnych $\varphi(z, t)$, to mogą one mieć miejsce jedynie wzdłuż charakterystyk [16 i 19] i wówczas, aby między obu równaniami nie było sprzeczności, ich charakterystyki muszą się pokrywać, tzn. musi być

$$\mathcal{B} = \frac{r^2 A}{J_\omega} - k^2.$$

Oznacza to, że prędkości rozchodzenia się zaburzeń, opisane przez równania (3.10) i (3.15), są jednakowe. W przypadku gdyby pochodne $\varphi(z, t)$ każdego rzędu były ciągłe, mogłyby być $\mathcal{B} \neq \frac{r^2 A}{J_\omega} - k^2$.

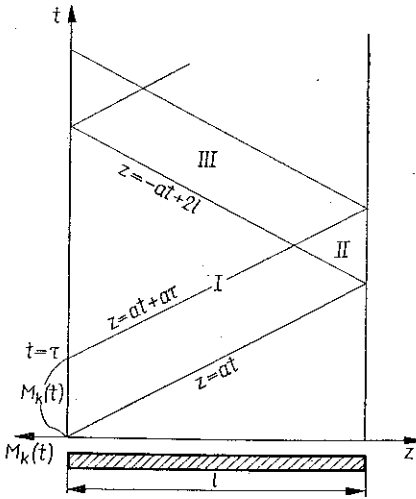
W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem, gdy prędkości rozchodzenia się zaburzeń będą dla obu równań jednakowe. Sprowadźmy równania (3.15) i (3.10) do postaci kanonicznej. Wprowadzając w tym celu nowe zmienne

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \xi &= z + at, & z &= \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ \eta &= z - at, & t &= \frac{1}{2}a(\xi - \eta), \end{aligned} \quad \text{albo}$$

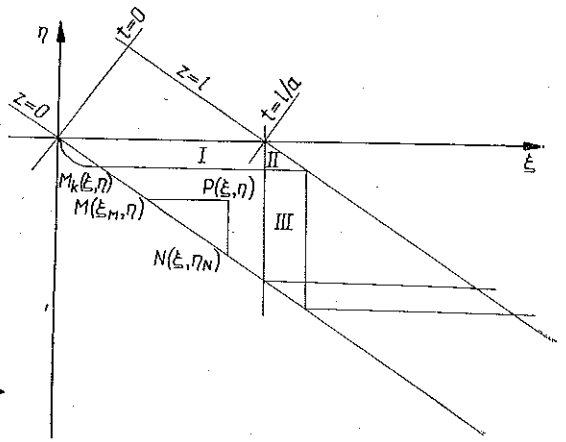
otrzymujemy

$$(3.17) \quad \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{g}{4} \Theta(\xi, \eta) = 0.$$

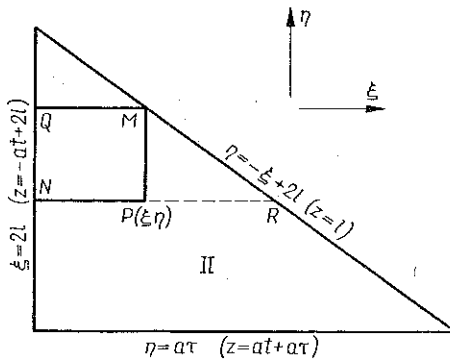
Na rys. 3 i 4 przedstawiono płaszczyzny zt oraz $\xi\eta$ podzielone charakterystykami na poszczególne obszary, w których będziemy poszukiwali rozwiązań obu równań.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Obszar I (rys. 3 i 4) określony jest nierównościami

$$0 \leq z \leq at, \quad 0 \leq z \leq -at + 2l.$$

Obszar II (rys. 3 i 4) określają nierówności

$$l \geq z \geq at + ar, \quad l \geq z \geq -at + 2l.$$

Niechaj na brzegu pręta $z=0$ dany będzie warunek dynamiczny w postaci momentu skręcającego $M_k(t)$ o czasie trwania τ :

$$\frac{M_k(t)}{E_1 J_\omega} = - \left[\frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0} + k^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0}.$$

Jeżeli moment skręcający przedstawimy w postaci przybliżonej [18], to przyjmie on postać

$$\frac{M_k(t)}{E_1 J_\omega} \approx - \left[\frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0}.$$

Drugi warunek brzegowy niechaj ma postać

$$[\Theta(z, t)]_{z=0} = 0,$$

co oznacza możliwość swobodnej deplanacji końca pręta. Równanie (3.18) rozwiążemy metodą funkcji rozwiązującej Riemana, którą tutaj jest funkcja Bessela rzędu zerowego [18]:

$$V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0(\sqrt{\vartheta(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}).$$

Rozwiązanie to w obszarze I przy warunkach brzegowych

$$[\Theta(\xi, \eta)]_{\eta=-\xi} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right]_{\eta=-\xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0} = - \frac{1}{2} \left[\frac{M_k \left[\frac{1}{2a} (\xi - \eta) \right]}{E_1 J_\omega} \right]_{\eta=-\xi}$$

ma postać

$$\Theta(\xi, \eta) = \int_M^N \left[\frac{\partial \Theta(\xi, \eta_0)}{\partial \xi} \right]_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta_0=\xi_0}} J_0(\sqrt{\vartheta(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) d\xi_0.$$

Przechodząc do zmiennych z i t otrzymujemy

$$(3.18) \quad \Theta(z, t) = - \frac{1}{2} \int_{-z+at}^{z+at} \left[\frac{M_k(\xi_0, \eta_0)}{E_1 J_\omega} \right]_{\eta_0=\xi_0} J_0(\sqrt{\vartheta[z^2 - (at - \xi_0)^2]}) d\xi_0.$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie to daje nieciągłość na charakterystyce $z=at$ przy wejściu do obszaru I (mimo ciągłości $M_k(t)$, a więc ϑ musi mieć wartość, przy której charakterystyki równań (3.17) pokrywają się. Równanie (3.17)₁ jest jednorodnym równaniem falowym. Z sensu fizycznego wynika, że $\varphi(z, t)$ oraz $\partial \varphi(z, t) / \partial z$ musi być wszędzie ciągłe, wobec czego mamy

$$[\varphi(z, t)]_{z=at} = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=at} = 0.$$

Dla początku pręta można zatem sformułować zagadnienie Picarda, tzn. $[\varphi(z, t)]_{z=0}$ lub $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0}$, określenie jednej funkcji determinuje drugą [19]. Jeżeli na początku pręta dane jest $[\varphi(z, t)]_{z=0} = 0$ albo $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0} = 0$, to otrzymujemy w obszarze I rozwiązanie zerowe niezgodne z (3.18). Innymi słowy, możemy w przybliżony sposób rozwiązać w obszarze I równanie drgań skrętnych pręta, który ma na końcu możliwość skreślenia i deplanacji przekroju poprzecznego.

Ponieważ nie znamy ani $[\varphi(z, t)]_{z=0}$, ani $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=0}$, to dokonamy następnego przybliżenia wykorzystując zgodność rozwiązań równań (3.17). Podstawiając do pierwotnej postaci (3.17)₁ za $\partial^2 \varphi(z, t) / \partial z^2$ wyrażenie (3.18) otrzymujemy

$$(3.19) \quad \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = a^2 \Theta(z, t),$$

a po scałkowaniu

$$\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = a^2 \int_{z/a}^t \Theta(z, t) dt + C(z).$$

Funkcję $C(z)$ wyznaczamy z warunku ciągłości:

$$\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{t=\frac{z}{a}} = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$(3.20) \quad \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = a^2 \int_{z/a}^t \Theta(z, t) dt.$$

Rozwiązanie to rozciągamy na cały obszar I. Podobnie możemy wyznaczyć $\varphi(z, t)$ wykorzystując warunek $[\varphi(z, t)]_{t=\frac{z}{a}} = 0$ albo po znalezieniu $\varphi(z, t)$ z (3.20) obrać jego wartość na charakterystyce $z = -at + 2l$ i dla znalezienia $\varphi(z, t)$ rozwiązać w I zadanie Darboux. Interesujące nas przyspieszenia w obszarze I opisuje wzór (3.19).

3.4. Rozwiązanie równań (3.9) i (3.10) w obszarze II. Rozwiązanie równań (3.17) w obszarze II (rys. 5) rozpoczniemy od rozwiązania (3.7)₁. Z (3.20) możemy na charakterystyce $z = -at + 2l$ ($\xi = 2l$) przyjąć dla obszaru II $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=-at+2l} = \varphi_1(t)$ a tym samym $[\varphi(z, t)]_{z=-at+2l} = \varphi_0(t)$ jest już określone. Wobec tego na końcu pręta $z = l$ ($\xi = -\eta + 2l$) można przyjąć tylko $[\varphi(z, t)]_{z=l} = \varphi_2(t)$ lub $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=l} = \varphi_3(t)$ czyli problem sprowadzić do zagadnienia Picarda. Innymi słowy, pręt musi posiadać zamocowanie bez możliwości skreślenia ze swobodną deplanacją bądź bez deplanacji z możliwością skreślenia.

Weźmy pod uwagę pręt zamocowany w następujący sposób:

$$[\varphi(z, t)]_{z=l} = \varphi_2(t) = 0 \quad \text{lub} \quad [\varphi(\xi, \eta)]_{\eta=-\xi+2l} = 0.$$

Dołączając warunek na charakterystyce $z = -at + 2l$

$$[\varphi(z, t)]_{z=-at+2l} = \varphi_0(t) \quad \text{lub} \quad [\varphi(\xi, \eta)]_{\xi=2l} = \varphi_0 \left[\frac{1}{2a} (2l - \eta) \right],$$

otrzymujemy rozwiązanie równania (3.17)₁ w postaci [19]

$$\varphi(P) = \varphi(N) + \varphi(M) - \varphi(Q)$$

lub inaczej

$$(3.21) \quad \varphi(\xi, \eta) = \varphi_0 \left[\frac{1}{2a} (2l - \eta) \right] - \varphi_0 \left[\frac{1}{2a} \xi \right].$$

Wracając do zmiennych z i t mamy

$$(3.22) \quad \varphi(z, t) = \varphi_0 \left[\frac{1}{2a} (2l - z + at) \right] - \varphi_0 \left[\frac{1}{2a} (z + at) \right].$$

Z (3.22) możemy znaleźć $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=l} = \varphi_3(t) \neq 0$ oraz $\left[\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} \right]_{z=l} = \Theta_0(t) = 0$ i $\left[\frac{\partial^3 \varphi(z, t)}{\partial z^3} \right]_{z=l} = \Theta_1(t) \neq 0$. Zažadajmy dla $z=l$ zgodności warunków brzegowych dla równań (3.17). Przyjmują one postać

$$\left[\Theta_0 \left[\frac{1}{2a} (\xi - \eta) \right] \right]_{\eta=-\xi-2l} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right]_{\eta=-\xi+2l} = \frac{1}{2} \left[\Theta_1 \left[\frac{1}{2a} (\xi - \eta) \right] \right]_{\eta=-\xi+2l}.$$

Rozwiązując teraz (3.16)₂ jako równanie typu telegraficznego otrzymujemy (rys. 5)

$$(3.23) \quad \Theta(\xi, \eta) = \left[\int_{\bar{K}}^M \frac{\partial \Theta(\xi, \eta_0)}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0} J_0(\sqrt{\vartheta(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) d\xi_0 =$$

$$= \int_{-\eta+2l}^{\xi} \Theta_1 \left[\frac{1}{a} (\xi_0 - l) \right] J_0(\sqrt{\vartheta(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) d\xi_0.$$

Dla zmiennych z, t rozwiązanie przyjmuje postać

$$(3.24) \quad \Theta(z, t) = \int_{-z+at+2l}^{z+at} \Theta_1 \left[\frac{1}{2a} (\xi_0 - l) \right] J_0(\sqrt{\vartheta(z - at - \xi_0)(z - at + \xi_0 - 2l)}) d\xi_0.$$

Równanie (3.17)₂ można rozwiązać nieco inaczej, mianowicie z (3.22) znaleźć $\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} = f(z, t)$ i wstawić do równania (3.17)₂. Otrzymamy wówczas niejednorodne równanie falowe o postaci

$$(3.25) \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\vartheta}{4} F(\xi, \eta).$$

Rozwiązanie tego równania przy wyżej danych warunkach typu Cauchy'ego ma postać [19]

$$(3.26) \quad \Theta(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \int_R^M \left\{ \frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\eta \right\} - \frac{\vartheta}{4} \int_{RMP} \int F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\eta+2l}^{\xi} \Theta_l \left[\frac{1}{a} (\xi_0 - l) \right] d\xi_0 - \frac{\vartheta}{4} \int_{RMP} \int F(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Wstawiając (3.24) lub (3.26) do (3.19) znajdujemy przyśpieszenia w obszarze II. Będą to oczywiście wyrażenia przybliżone. W obszarze II można by w sposób formalny znaleźć przyśpieszenia z rozwiązania (3.22). Wydaje się, że uwzględnienie równania (3.17)₂ pozwoli uzyskać rozwiązanie dokładniejsze.

Postępując w powyższy sposób nie uzyskamy w obszarze II (oprócz $z=l$) ilościowej zgodności rozwiązań równań (3.17). Rozwiązywanie równań (3.17) w obszarze II można rozpocząć od rozwiązania (3.17)₂ przy następujących warunkach:

$$[\Theta(z, t)]_{z=l} = 0,$$

$$\left[\frac{M(z, t)}{E_1 J_\omega} \right]_{z=l} = - \left[\frac{\partial \Theta(z, t)}{\partial z} \right]_{z=l} + k^2 \left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=l}.$$

Oznaczają one, że pręt ma na końcu swobodę deplanacji przy ograniczonym skręceniu. Zakładając, że $\left[\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right]_{z=l} = \varphi_3(t)$ jest chwilowo znane, możemy dla (3.17)₁ rozwiązać w obszarze II zagadnienie Picarda, a dla (3.17)₂ zagadnienie Cauchy'ego. Różniczkując rozwiązanie równania (3.17)₁ i przyrównując je do rozwiązania równania (3.17)₂ otrzymamy dla wyznaczenia $\varphi_3(t)$ skomplikowane równanie różniczkowo-całkowe typu Volterry, którego nie będziemy przytaczać. Rozwiązanie tego równania wyznaczyłoby $\varphi_3(t)$, a tym samym pozwoliłoby znaleźć w II interesujące nas przyśpieszenia.

Wydaje się, że wobec trudności określenia $[M(z, t)]_{z=l}$ ten sposób rozwiązania układu równań w obszarze II nie ma praktycznego znaczenia. W obszarze I, gdzie jest dane $M_k(t)$, sposób ten wyeliminowałby przybliżone rozwiązanie równania (3.17)₁. Należy zaznaczyć, że drugi warunek brzegowy napisany w powyższej postaci jest odstępstwem od przybliżeń przyjętych na wstępie wobec krótkiego czasu trwania wzbudzenia. W obszarze II praktyczne znaczenie ma rozwiązanie przy końcu utwierdzonym bez możliwości skręcenia przy swobodnej deplanacji.

3.6. Rozwiązanie równań (3.9) i (3.10) w obszarze III. W obszarze III (rys. 3 i 4) należy rozpocząć rozwiązanie zagadnienia od równania (3.17)₁ (zadanie Darboux). Z tego rozwiązania możemy obliczyć przyśpieszenia w obszarze III. Uwzględnienie równania (3.17)₂ wymagałoby dania na charakterystykach $z = -at + 2l$, $z = at + at$, $\Theta(z, t)$ lub $\partial \Theta(z, t) / \partial z$ oraz sprowadzenia (3.17)₂ do równania niejednorodnego podobnie jak to zrobiono w obszarze II. Wobec przybliżeń jakie uczyniono w obszarze II i III można oczekiwać, że obliczone tam przyśpieszenia będą mało dokładne.

4. Przykład

Dla ilustracji przytoczymy wyniki obliczeń przeprowadzonych dla cienkościennego pręta o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 2.

Charakterystyki tego pręta są następujące:

$$A = 5,61 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5,61 \text{ cm}^2,$$

$$a_x = -9,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = -9,9 \cdot 10^{-2} \text{ cm},$$

$$J_s = 291,85 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 = 291,85 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^4,$$

$$J_x = 50,61 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 = 5,061 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = 752 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 752 \text{ cm}^4,$$

$$J_\omega = 358,188 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6 = 358,188 \text{ cm}^6,$$

$$r^2 = 134,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 134,9 \text{ cm}^2,$$

$$k^2 = \frac{GJ_s}{E_1 J_\omega} = 31,33 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 3,133 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2.$$

Zgodnie z uwagami zawartymi w p. 3.2 moment skręcający będziemy traktowali jako krótkotrwały, gdy $l_a < 89,36$ cm. Oznacza to, że czas jego trwania powinien być ograniczony w sposób następujący:

$$\tau < \frac{0,5}{ak} = \frac{0,5}{5 \cdot 10^5 \cdot 5,595 \cdot 10^{-3}} = 1,787 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

Znajdźmy przyspieszenia w obszarze I dla $z = 1$ cm i przy momencie skręcającym w formie prosfokątnego impulsu:

$$[M_k(z, t)]_{z=0} = -M_0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq 10^{-4} \text{ s},$$

$$[M_k(z, t)]_{z=0} = 0 \quad \text{dla} \quad 10^{-4} \text{ s} < t.$$

Ze wzoru (3.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= \frac{1}{2} \frac{M_0}{E_1 J_\omega} \int_{-z+at}^{z+at} J_0(\sqrt{\vartheta [z^2 - (at - \xi_0)^2]}) d\xi_0 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_0}{773,198 \cdot 10^7} \int_{-z+at}^{z+at} J_0(\sqrt{2,1128 [z^2 - (at - \xi_0)^2]}) d\xi_0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\vartheta = \frac{r^2 A}{J_\omega} - k^2 = 2,1128 - 3,133 \cdot 10^{-3} \approx 2,1128 \text{ m}^{-2}.$$

Ażeby obliczyć całkę występującą w powyższym wzorze, skorzystamy z przedstawienia funkcji Bessela w postaci szeregu [19]:

$$J_0(\sqrt{2,1128 [1 - (5 \cdot 10^5 t - \xi_0)^2]}) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{2,1128 [1 - (5 \cdot 10^5 t - \xi_0)^2]}\right)^2}{(1!)^2} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{2,1128 [1 - (5 \cdot 10^5 t - \xi_0)^2]}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{2,1128 [1 - (5 \cdot 10^5 t - \xi_0)^2]}\right)^6}{(3!)^2} + \dots$$

Ponieważ argument funkcji Bessela ma być nieujemny, możemy napisać

$$\max \sqrt{2,1128 [1 - (5 \cdot 10^5 t - \xi_0)^2]} = \sqrt{2,1128}.$$

Dla maksymalnej wartości argumentu szereg funkcji Bessela przyjmuje postać

$$J_0(\sqrt{2,1128}) = 1 - 0,5282 + 0,0697 - 0,0040 + \dots$$

Uwzględniając dwa wyrazy szeregu mamy

$$[\theta(z, t)]_{z=1} = 30,5096 \cdot 10^{-12} M_0 \int_{-1+5 \cdot 10^5 t}^{1+5 \cdot 10^5 t} d\xi_0 +$$

$$+ 34,1568 \cdot 10^{-12} M_0 \int_{-1+5 \cdot 10^5 t}^{1+5 \cdot 10^5 t} (5 \cdot 10^5 t - \xi_0)^2 d\xi_0.$$

Ostatecznie po przeprowadzeniu całkowania i podstawieniu do wzoru (3.20) otrzymujemy

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} \right]_{z=1} = 20,947 M_0 [s^{-2}];$$

M_0 należy wstawić w jednostkach Ncm. Otrzymany wzór opisuje przyspieszenie obrotowe dla $z=l$ cm oraz $2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \leq t \leq 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Podobnie można dokonać obliczenia przyspieszeń w każdym miejscu obszaru I.

4.1. Podsumowanie. Przedstawiony przybliżony sposób analizy równania drgań skrętnych cienkościennego pręta pozwolił znaleźć przyspieszenia przy jednym końcu swobodnym, na którym został dany moment skręcający, podczas gdy drugi nie miał możliwości skręcania przy swobodnej deplanacji lub bez deplanacji miał możliwość swobodnego skręcania. W obszarze I rozwiązano najpierw równanie (3.17)₂ a (3.17)₁ rozwiązano w sposób przybliżony. W obszarze II rozwiązano wprawdzie (3.17)₁ korzystając z przybliżonego rozwiązania w I.

W obszarze III rozwiązanie przebiega w zasadzie podobnie jak w II.

Literatura cytowana w tekście

1. I. JUDA, *Zwalczanie zapyłania*, Warszawa 1962.
2. J. LUTYŃSKI, *Elektrostatyczne odpylanie gazów*, WNT, Warszawa 1965.
3. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Гос. изд. физ. мат. лит., Москва 1959.
4. WAYNE T. SPROULI, *Fundamentals of electrode rapping in industrial precipitators*, J. air pollution contr. assoc., 2 (1965).
5. E. M. KOSCHANY, *Grundlagenuntersuchungen zur Abreinigung von Niederschlags Elektroden von Elektrofiltern*, Staub 7/1968.
6. K. RÜCKELSCHAUSEN, *Über die Beseitigung von Staubansätzen auf technischen glatten Oberflächen Hochschule Stuttgart 1957* (Dissertation).
7. P. M. MORSE, H. FESBACH, *Methods of Theoretical Physics*, Part II, Mc Graw-Hill Boock Comp., Nev York 1953.
8. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.
9. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach statych*, PWN, Warszawa 1966.
10. С. Д. Пономарев, *Расчеты на прочность в машиностроении*, 3, Гос. изд. физ. мат. лит., Москва 1958.
11. Г. С. Батуев, *Соударение массивных тел при упруго-пластических деформациях в зоне контакта*, Расчеты на прочность, Машиностроение, вып. 10, Москва 1964.
12. W. GOLDSMITH, *Impact, the theory and physical behaviour of colliding solids*, London 1960.
13. F. EIRICH, *Rheology, Theory and Applications*, Academic Press Ind, Publishers New York 1956.
14. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, Warszawa 1968.
15. Д. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, 2, Гос. изд. мех. теорет. лит., Москва-Ленинград 1951.
16. X. A. Рахматулин, Ю. А. Демьянов, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Гос. изд. физ. мат. лит., Москва 1961.
17. И. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Москва 1948.
18. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji*, PWN, Warszawa 1965.
19. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, PWN, Warszawa 1963.

Резюме

УСКОРЕНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

В работе, на основе теории распространения волн, предлагается приближенным способом, решение уравнения крутильных колебаний тонкостенного стержня с одной плоскостью симметрии, при кратковременном действии определенного крутящего момента на одном конце. Определено ускорение, вызванное крутильным движением стержня, а также краевые условия, при которых можно найти приближенное решение.

Summary

ACCELERATIONS OF TWISTING VIBRATIONS IN A THIN-WALLED ROD WITH OPEN PROFILE

In this paper is given an approximate method of solving the equations of twisting vibration in a thin-walled rod having one plane of symmetry and with a short-term action of a determined torque on one of its ends. The acceleration caused by the twisting motion of the rod is established; and the boundary conditions determined for which the approximate solution can be found.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1970 r.
