

DYNAMICZNE LINIE WPŁYWU UGIĘĆ WIELOCZĘŚCIOWEGO PASMA
NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

RYSZARD SKARŻYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

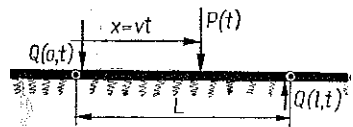
Praca niniejsza poświęcona jest zbadaniu ruchu wąskiego i płaskiego pasma na sprężystym podłożu obciążonego siłą skupioną P przemieszczającą się ze stałą prędkością V . Siła jest przyłożona do pasma na całej jego szerokości b . Pasma jest podzielone dylatacjami typu przegubowego, tzn. poprzecznymi krawędziami, wokół których obracają się względem siebie dwa sąsiadujące ze sobą elementy podczas ruchu obciążenia.

Zilustrowany na rys. 1 schemat może w pewnych warunkach być modelem nawierzchni komunikacyjnej (np. drogi startowej lotniska, szyny kolejowej lub nawierzchni kolei o napędzie odrzutowym, tzw. poduszkowej).

Badanie ruchu ustrojów na sprężystym podłożu wywołanego przemieszczającym się obciążeniem już od dawna zajmuje ważną pozycję w teorii konstrukcji. Zagadnieniem tym w przecie o nieskończonej długości zajmowali się S. TIMOSHENKO i J. T.

KENNEY [1 i 2]. Pewne rezultaty w tej dziedzinie uzyskano również dla płyt na sprężystym podłożu [3 i 4]. Bardziej ściśle rozwiązania uzyskano w szczególności dla prętów i płyt o brzegach nieswobodnych.

Bliższym rzeczywistości modelem nawierzchni komunikacyjnej wydaje się jednak układ płyt lub prętów o brzegach swobodnych lub połączonych wzajemnie przegubowymi krawędziami. Rozważania poniższe mogą być zatem potraktowane jako krok w kierunku uściślenia modelu.



Rys. 1

2. Sformułowanie zagadnienia

Wyprowadzenie równań ruchu układu elementów pasma wymaga uprzedniego określenia równań jednego z nich z warunkami brzegowymi sformułowanymi w sposób pozwalający na powiązanie całego zespołu wspólnym układem równań.

Pojedynczym elementem pasma jest zginana walcowo płyta lub pręt o ograniczonej długości L , sztywności zginania $D=EI$ lub w przypadku płyty $D=Ebh^3/12(1-\nu^2)$ i masie jednostki długości \bar{m} , spoczywający na lepko-sprężystym podłożu typu

Winklera o charakterystyce sprężystej k i współczynniku tłumienia η_θ (model Voigta).

Element obciążony jest siłami bezwładności, oddziaływaniem podłoża oraz dwiema powstałymi na skutek oddziaływania sąsiednich elementów siłami skupionymi $Q(0, t)$ i $Q(l, t)$ przyłożonymi do jego końców. Jeden z elementów pasma obciążony jest ponadto siłą skupioną $P(t)$ przemieszczającą się ze stałą prędkością v wzdłuż jego osi podłużnej.

Rozwiązanie tak sformułowanego zadania pomocniczego umożliwia rozwiązanie zagadnienia ruchu całego, wieloczęściowego pasma przez wykorzystanie faktu, że zarówno przemieszczenia jak i siły wzajemnego oddziaływania połączonych z sobą końców dwu sąsiednich elementów są sobie równe w każdej chwili.

3. Rozwiązanie zadania pomocniczego

Równanie różniczkowe ruchu elementu pasma ma jak wiadomo postać

$$(3.1) \quad c \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \zeta w + \eta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\bar{m}} q(x, t),$$

gdzie

$$c = \frac{D}{\bar{m}}, \quad \zeta = \frac{k}{\bar{m}}, \quad \eta = \frac{\eta_\theta}{\bar{m}}.$$

Rozwiązania poszukuje się przy warunkach początkowych

$$(3.2) \quad w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x)$$

i warunkach brzegowych

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0, & \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0, & \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a na równaniu (3.1) w odniesieniu do funkcji czasu i wykorzystaniu warunków (3.2) otrzymuje się

$$(3.4) \quad c \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + (p^2 + \eta p + \zeta) \bar{w} = \frac{1}{\bar{m}} \bar{q}(x, p) + (\eta + p) f_1(x) + f_2(x),$$

gdzie

$$\bar{w} = \int_0^\infty w(x, t) e^{-pt} dt, \quad \bar{q}(x, p) = \int_0^\infty q(x, t) e^{-pt} dt.$$

Rozwińmy funkcje \bar{w} , \bar{q} , f_1 i f_2 w szeregi według funkcji własnych $W_n(x)$, spełniających równanie

$$(3.5) \quad \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \alpha_n^4 W_n(x) = 0$$

oraz warunki brzegowe (3.3):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \bar{w}(x, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^*(p) W_n(x), & \bar{q}(x, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n^*(p) W_n(x), \\ f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}^* W_n(x), & f_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}^* W_n(x). \end{aligned}$$

Funkcja własna $W_n(x)$ ma postać

$$(3.7) \quad W_n(x) \approx \frac{1}{\gamma} \left\{ \operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2l} x + \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x - \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \pi}{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{2} \pi - (-1)^n} \left[\sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x + \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] \right\},$$

gdzie $1/\gamma$ oznacza czynnik normalizacyjny.

Przyjmując, że funkcja (3.7) jest ortogonalna, mnożymy obie strony równania (3.4) przez $W_n(x)$ i całkujemy od 0 do L . Wykorzystując ponadto równanie (3.5) otrzymujemy w wyniku zależność pomiędzy współczynnikami rozwinięcia funkcji (3.6):

$$(3.8) \quad A_n^* [\alpha^4 c + p^2 + \eta p + \zeta] = \frac{1}{\bar{m}} q_n^* + (\eta + p) f_{1n}^* + f_{2n}^*,$$

skąd

$$A_n^* = \frac{\frac{1}{\bar{m}} q_n^* + (\eta + p) f_{1n}^* + f_{2n}^*}{p^2 + \eta p + \zeta + \alpha^4 c}.$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$(3.9) \quad \zeta + \alpha_n^4 c = \omega_{0n}^2, \quad \frac{\eta}{2} = \varepsilon, \quad \sqrt{\omega_{0n}^2 - \varepsilon^2} = \omega_{1n}$$

i rozłóżmy mianownik wyrażenia (3.8) na czynniki pierwsze:

$$(3.10) \quad p^2 + 2\varepsilon p + \omega_{0n}^2 = (p - p_{1n})(p - p_{2n}),$$

gdzie

$$p_{1n} = -\varepsilon + i\omega_{1n} \quad \text{oraz} \quad p_{2n} = -\varepsilon - i\omega_{1n}.$$

Wówczas A_n^* przedstawimy w postaci

$$(3.11) \quad A_n^* = \frac{C_{1n}}{p - p_{1n}} + \frac{C_{2n}}{p - p_{2n}}.$$

Z porównania współczynników otrzymujemy

$$(3.12) \quad \begin{aligned} C_{1n} &= \frac{1}{2i\omega_{1n}} \left[\frac{1}{\bar{m}} q_n^* + (\varepsilon + i\omega_{1n}) f_{1n}^* + f_{2n}^* \right], \\ C_{2n} &= -\frac{1}{2i\omega_{1n}} \left[\frac{1}{\bar{m}} q_n^* + (\varepsilon - i\omega_{1n}) f_{1n}^* + f_{2n}^* \right]. \end{aligned}$$

Wykorzystując następnie pierwszy ze związków (3.6) otrzymuje się

$$(3.13) \quad \bar{w}(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{2i\omega_{1n}(p-p_{1n})} \left[\frac{1}{\bar{m}} q_n^* + (\varepsilon + i\omega_{1n}) f_{1n}^* + f_{2n}^* \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{2i\omega_{1n}(p-p_{2n})} \left[\frac{1}{\bar{m}} q_n^* + (\varepsilon - i\omega_{1n}) f_{1n}^* + f_{2n}^* \right].$$

Ponieważ współczynniki rozwinięcia funkcji (3.6) wynoszą

$$(3.14) \quad \begin{aligned} A_n^*(p) &= \int_0^1 \bar{w}(x, p) W_n(x) dx, & q_n^*(p) &= \int_0^1 \bar{q}(x, p) W_n(x) dx, \\ f_{1n}^* &= \int_0^1 f_1(x) W_n(x) dx, & f_{2n}^* &= \int_0^1 f_2(x) W_n(x) dx, \end{aligned}$$

przeło szereg (3.13) można napisać następująco:

$$(3.15) \quad \bar{w}(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{2i\omega_{1n}(p-p_{1n})} \int_0^1 \left[\frac{1}{\bar{m}} \bar{q}(u, p) + (\varepsilon + i\omega_{1n}) f_1(u) + f_2(u) \right] \times \\ \times W_n(u) du - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{2i\omega_{1n}(p-p_{2n})} \int_0^1 \left[\frac{1}{\bar{m}} \bar{q}(u, p) + (\varepsilon - i\omega_{1n}) f_1(u) + f_2(u) \right] W_n(u) du.$$

Wykonując na funkcji (3.15) odwrotną transformację Laplace'a i wykorzystując twierdzenie o splocie, otrzymuje się

$$(3.16) \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \int_0^t W_n(u) du \int_0^t \left[\frac{1}{\bar{m}} q(u, \tau) + (\varepsilon + i\omega_{1n}) f_1(u) + f_2(u) \right] \times \\ \times \frac{1}{2i} e^{p_{1n}(t-\tau)} d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \int_0^t W_n(u) du \int_0^t \left[\frac{1}{\bar{m}} q(u, \tau) + \right. \\ \left. + (\varepsilon - i\omega_{1n}) f_1(u) + f_2(u) \right] \frac{1}{2i} e^{p_{2n}(t-\tau)} d\tau.$$

Zważywszy, że

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2i} [e^{p_{1n}(t-\tau)} - e^{p_{2n}(t-\tau)}] &= e^{-\varepsilon\tau} e^{\varepsilon\tau} \sin \omega_{1n}(t-\tau), \\ \frac{1}{2i} [(\varepsilon + i\omega_{1n}) e^{p_{1n}(t-\tau)} - (\varepsilon - i\omega_{1n}) e^{p_{2n}(t-\tau)}] &= e^{\varepsilon\tau} e^{\varepsilon\tau} [\varepsilon \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \\ &+ \omega_{1n} \cos \omega_{1n}(t-\tau)]; \end{aligned}$$

wyrażenie (3.16) można uporządkować następująco:

$$(3.18) \quad w(x, t) = \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \int_0^l W_n(u) du \int_0^t e^{\epsilon \tau} q(u, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau + \\ + e^{-\epsilon t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \int_0^l W_n(u) du \int_0^t e^{\epsilon \tau} \{ [f_2(u) + \epsilon f_1(u)] \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \\ + \omega_{1n} f_1(u) \cos \omega_{1n}(t-\tau) \} d\tau.$$

Pierwszy wyraz wyrażenia (3.18) oznacza drgania wymuszone obciążeniem $q(x, t)$ drugi zaś drgania swobodne zależne tylko od warunków początkowych (3.2).

W sformułowanym przez nas zagadnieniu obciążenie wzbudzające $q(u, \tau)$ stanowią trzy siły skupione

$$(3.19) \quad q(u, \tau) = P(\tau) \delta(u - v\tau) + Q(0, \tau) \delta(u - 0) - Q(l, \tau) \delta(u - l), \quad \text{jeśli } 0 \leq v\tau \leq l; \\ q(u, \tau) = Q(0, \tau) \delta(u - 0) - Q(l, \tau) \delta(u - l), \quad \text{jeśli } v\tau > l,$$

gdzie $\delta(u - \xi)$ oznacza funkcję Diraca a v prędkość ruchu siły $P(\tau)$.

Zważywszy, że

$$\int_0^l \delta(u - \xi) W_n(u) du = W_n(\xi)$$

drgania wymuszone w wyrażeniu (3.18) możemy napisać następująco:

$$(3.20) \quad w_q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(0) W_n(x) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m} \omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon \tau} Q(0, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} W_n(l) W_n(x) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m} \omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon \tau} Q(l, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m} \omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon \tau} W_n(v\tau) P(v\tau, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$

Uzyskane w ten sposób rozwiązanie pomocniczego zadania ma postać dogodną dla sformułowania problemu brzegowego.

4. Rozwiązanie zagadnienia

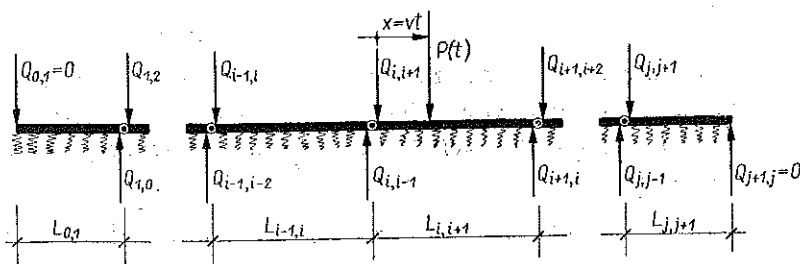
Po prawej stronie równania (3.20) znajdują się operatory całkowe, zawierające pod znakiem całki nieznanne funkcje czasu sił przegubowych $Q_{i, i-1}$, $Q_{i, i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, j$). Są one przedmiotem dalszych poszukiwań, od poznania ich bowiem zależy możliwość podania równań ruchu poszczególnych elementów przy dowolnych warunkach początkowych.

Na rys. 2 pokazano pasmo złożone z $j+1$ elementów połączonych przegubowymi krawędziami, których liczba wynosi j . Tej liczbie elementów odpowiada $2(i+1)$

sił przegubowych, z których dwie skrajne są równe zeru, pozostałe zaś parami sobie równe:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} Q_{0,1} &= 0, & Q_{1,0} &= Q_{1,2}, \dots, & Q_{i-1,i-2} &= Q_{i-1,i}, & Q_{i,i-1} &= Q_{i,i+1}, \\ & & Q_{i+1,i} &= Q_{i+1,i+2}, \dots, & Q_{j,j-1} &= Q_{j,j+1}, & Q_{j+1,j} &= 0. \end{aligned}$$

Ponadto przemieszczenia przegubowych krawędzi wspólnych dla obu sąsiadujących z sobą elementów są jednakowe.



Rys. 2

Aby łatwo było warunki te zapisać, wprowadza się następujące oznaczenia dla elementu $(i, i+1)$ ($i=1, 2, \dots, j$):

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n^2(0)}{\bar{m}\omega_{1n}} \stackrel{\text{df}}{=} \alpha_{i,i+1}(0, 0), & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(0) W_n(l)}{\bar{m}\omega_{1n}} \stackrel{\text{df}}{=} \alpha_{i,i+1}(0, l), \\ & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n^2(l)}{\bar{m}\omega_{1n}} \stackrel{\text{df}}{=} \alpha_{i,i+1}(l, l), \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad Q_{i,i+1} \stackrel{\text{df}}{=} e^{-st} \int_0^t e^{s\tau} Q_{i,i+1}(0, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau,$$

$$Q_{i+1,i} \stackrel{\text{df}}{=} e^{-st} \int_0^t e^{s\tau} Q_{i+1,i}(l, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau,$$

$$(4.4) \quad w_{i,i+1} \stackrel{\text{df}}{=} e^{-st} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(0)}{\omega_{1n}} \int_0^l W_n(u) du \int_0^t e^{s\tau} \{ [f_2(u) + \varepsilon f_1(u)] \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \omega_{1n} f_1(u) \cos \omega_{1n}(t-\tau) \} d\tau,$$

$$\omega_{i+1,i} \stackrel{\text{df}}{=} e^{-st} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(l)}{\omega_{1n}} \int_0^l W_n(u) du \int_0^t e^{s\tau} \{ [f_2(u) + \varepsilon f_1(u)] \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \omega_{1n} f_1(u) \cos \omega_{1n}(t-\tau) \} d\tau,$$

$$(4.5) \quad \beta_{i,i+1} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} W_n(0) \frac{e^{-st}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{s\tau} W_n(v\tau) P(v\tau, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau,$$

$$\beta_{i+1,i} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} W_n(l) \frac{e^{-st}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{s\tau} W_n(v\tau) P(v\tau, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$

Warunki równych przemieszczeń wspólnych brzegów mają postać

$$\begin{aligned}
 w_{10} + \alpha_{01}(0, l) Q_{01} - \alpha_{01}(l, l) Q_{10} &= w_{12} + \alpha_{12}(0, 0) Q_{12} - \alpha_{12}(l, 0) Q_{21}, \\
 w_{21} + \alpha_{12}(0, l) Q_{12} - \alpha_{12}(l, l) Q_{21} &= w_{23} + \alpha_{23}(0, 0) Q_{23} - \alpha_{23}(l, 0) Q_{32}, \\
 &\dots \\
 w_{i, i-1} + \alpha_{i-1, i}(0, l) Q_{i-1, i} - \alpha_{i-1, i}(l, l) Q_{i, i-1} &= \\
 &= w_{i, i+1} + \alpha_{i, i+1}(0, 0) Q_{i, i+1} - \alpha_{i, i+1}(l, 0) Q_{i+1, i} + \beta_{i, i+1}, \\
 (4.6) \quad w_{i+1, i} + \alpha_{i, i+1}(0, l) Q_{i, i+1} - \alpha_{i, i+1}(l, l) Q_{i+1, i} + \beta_{i+1, i} &= \\
 &= w_{i+1, i+2} + \alpha_{i+1, i+2}(0, 0) Q_{i+1, i+2} - \alpha_{i+1, i+2}(l, 0) Q_{i+2, i+1}, \\
 &\dots \\
 w_{j-1, j-2} + \alpha_{j-2, j-1}(0, l) Q_{j-2, j-1} - \alpha_{j-2, j-1}(l, l) Q_{j-1, j-2} &= \\
 &= w_{j-1, j} + \alpha_{j-1, j}(0, 0) Q_{j-1, j} - \alpha_{j-1, j}(l, 0) Q_{j, j-1}, \\
 w_{j, j-1} + \alpha_{j-1, j}(0, l) Q_{j-1, j} - \alpha_{j-1, j}(l, l) Q_{j, j-1} &= \\
 &= w_{j, j+1} + \alpha_{j, j+1}(0, 0) Q_{j, j+1} - \alpha_{j, j+1}(l, 0) Q_{j+1, j}.
 \end{aligned}$$

Równości (4.1) razem z warunkami (4.6) stanowią układ równań opisujący problem. Łączna ich liczba wynosi $2(j+1)$ i równa jest liczbie niewiadomych. Można ją zmniejszyć do j , jeżeli równości (4.1) uwzględni się w warunkach (4.6). Możliwe jest przy tym uproszczenie zapisu w wyrażeniach (4.3) przez pozostawienie tylko pierwszych indeksów odpowiadających numerom przegubowych krawędzi, do których siły Q_i są przyłożone:

$$(4.7) \quad Q_i \stackrel{\text{df}}{=} Q_{i, i \pm 1}, \quad i = 1, 2, \dots, j.$$

Należy również wykorzystać równości przemieszczeń dwu sąsiadujących obustronnie z każdą krawędzią i brzegowych przekrojów, gdy przyczyną ruchu są tylko drgania swobodne (4.4). Wprowadzając w wyrażeniach (4.4) odpowiednie odcięte otrzymuje się

$$(4.8) \quad w_{i, i-1} = w_{i, i+1}.$$

Jeżeli przyjmiemy ponadto, że pasmo składa się z identycznych elementów, to liczba współczynników w wyrażeniach (4.2) sprowadzi się do trzech

$$\begin{aligned}
 \alpha(0, 0) &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n^2(0)}{\bar{m}\omega_{1n}}, & \alpha(0, l) &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(0)W_n(l)}{\bar{m}\omega_{1n}}, \\
 (4.9) \quad \alpha(l, l) &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n^2(l)}{\bar{m}\omega_{1n}}.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając równości (4.1) i (4.8) oraz przyjmując wyrażenia (4.7) i (4.9) w warunkach (4.6) otrzymuje się następujący układ równań:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & -[\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_1 + \alpha(l, 0) Q_2 = 0, \\ & \alpha(0, l) Q_1 - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_2 + \alpha(l, 0) Q_3 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \alpha(0, l) Q_{i-2} - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_{i-1} + \alpha(l, 0) Q_i = 0, \\ & \alpha(0, l) Q_{i-1} - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_i + \alpha(l, 0) Q_{i+1} = \beta_{i, i+1}, \\ & \alpha(0, l) Q_i - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_{i+1} + \alpha(l, 0) Q_{i+2} = -\beta_{i+1, i}, \\ & \alpha(0, l) Q_{i+1} - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_{i+2} + \alpha(l, 0) Q_{i+3} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \alpha(0, l) Q_{j-2} - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_{j-1} + \alpha(l, 0) Q_j = 0, \\ & \alpha(0, l) Q_{j-1} - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_j = 0. \end{aligned}$$

Są to równania liniowe i zawierają j niewiadomych operatorów całkowych Q_i ($i=1, 2, \dots, j$) wg wzorów (4.3) i (4.7). Prawe strony równań (4.10) są odpowiednie dla przypadku obciążenia przemieszczającą się siłą $P(t)$ elementu pomiędzy krawędziami i oraz $i+1$. Przeprowadzenie pełnej analizy ruchu pasma wymaga rozwiązania $j+1$ układów równań liniowych typu (4.10), przy czym $(j+2)-g_i$ etap analizy dotyczy zanikających drgań swobodnych pasma po opuszczeniu go przez siłę $P(t)$.

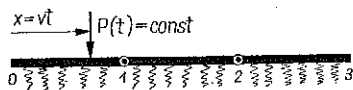
Należy nadmienić, że możliwe jest przyjęcie obciążenia składającego się z dowolnie wielu sił $P(t)$. W tym przypadku należy wyrażenie (3.20) uzupełnić dodatkowymi operatorami całkowymi typu (4.5), umieścić je odpowiednio po prawych stronach równań (4.10), analizę ruchu pasma zaś podzielić na odpowiednio więcej etapów w zależności od rozmieszczenia sił obciążenia.

Możliwe jest również zanalizowanie ruchu pasma o skrajnych brzegach nieswobodnych. W takim przypadku współczynniki tylko pierwszego i ostatniego z równań (4.10) uległyby pewnym zmianom.

W rozwiązaniu problemu uzyskuje się możliwość zastąpienia w wyrażeniach (3.20) operatorów Q_i liniową kombinacją operatorów β wg wzoru (4.5).

5. Przykład

Przeprowadzimy poniżej analizę ruchu pierwszego z trzech elementów pasma jak na rys. 3. Ruch wymuszony jest siłą $P = \text{const}$ przemieszczającą się bezpośrednio po badanym elemencie.



Rys. 3

Równania typu (4.10) dla tego przypadku mają postać

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & -[\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_1 + \alpha(l, 0) Q_2 = -\beta_{10}, \\ & \alpha(0, l) Q_1 - [\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)] Q_2 = 0, \end{aligned}$$

skąd po rozwiązaniu

$$(5.2) \quad Q_1 = \frac{\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)}{[\alpha(l, l) + \alpha(0, 0)]^2 - \alpha^2(0, l)} \beta_{10}$$

Warunki początkowe (3.2) mają postać

$$(5.3) \quad w(x, 0) = 0, \quad \dot{w}(x, 0) = 0,$$

co powoduje znikanie wyrażenia (4.4).

Po wprowadzeniu oznaczeń (4.3), (4.5), (4.7) i (4.9) oraz rezultatów (5.2) i (5.3) otrzymuje się poszukiwane równanie ruchu elementu (01) pasma (rys. 3):

$$(5.4) \quad w_{01}(x, t) = \frac{Pe^{-\epsilon t}}{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \frac{W_n^4(0)}{W_n^4(l) + W_n^2(l)W_n^2(0) + W_n^4(0)} \int_0^t W_n(v\tau) e^{\epsilon\tau} \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$

6. Pasma ciągle z podporami stałymi

Rozpatrzmy poniżej ruch elementu pasma, wymuszony momentem (parą sił) $M(x_0, t)$ przyłożonym w punkcie o odciętej x_0 . W tym celu wyrażenie (3.20) przekształcimy tak, aby określało ruch wymuszony dwiema siłami Q : — pierwszą $-Q(x_0, t)$ przyłożoną w punkcie o odciętej x_0 , drugą zaś $+Q(x_0 + \Delta x, t)$ przyłożoną w punkcie o odciętej $x_0 + \Delta x$:

$$(6.1) \quad w_q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x_0 + \Delta x) W_n(x) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon\tau} Q(x_0 + \Delta x, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x_0) W_n(x) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon\tau} Q(x_0, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$

Założymy następnie, że siły wzbudzające $Q(x_0, t)$ i $Q(x_0 + \Delta x, t)$ są identycznymi funkcjami czasu:

$$(6.2) \quad Q(x_0, t) = Q(x_0 + \Delta x, t)$$

oraz, że

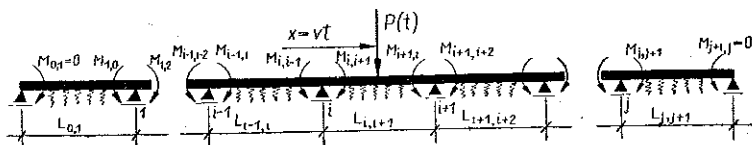
$$M(x_0, t) \stackrel{\text{df}}{=} Q(x_0, t) \Delta x.$$

Jeśli w wyrażeniu (6.1) pomnożymy prawą stronę przez $\Delta x/\Delta x$ i zastosujemy przejście graniczne, to

$$(6.3) \quad w_q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{W_n(x_0 + \Delta x) - W_n(x_0)}{\Delta x} W_n(x) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon\tau} Q(x_0, \tau) \Delta x \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$

Ostatecznie równanie (3.20) ruchu wymuszonego momentem $M(x_0, t)$ przyłożonym w punkcie o odciętej x_0 przyjmie postać

$$(6.4) \quad w_q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n'(x_0) W_n(x) \frac{e^{-\varepsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} M(x_0, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$



Rys. 4

Rezultat (6.4) umożliwia sformułowanie równania ruchu elementu $(i, i+1)$ pasm: ciągłego z podporami stałymi (rys. 4) i wyprowadzenie równań trzech momentów

$$(6.5) \quad w_{i,i+1}(x, t) = e^{-\varepsilon t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \int_0^t W_n(u) du \int_0^t e^{\varepsilon\tau} \{ [f_2(u) + \varepsilon f_1(u)] \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \omega_{1n} f_1(u) \cos \omega_{1n}(t-\tau) \} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} W_n'(0) W_n(x) \frac{e^{-\varepsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} M(0, \tau) \sin \omega_{1n} \times \\ \times (t-\tau) d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} W_n'(l) W_n(x) \frac{e^{-\varepsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} M(l, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \frac{e^{-\varepsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} W_n(v\tau) P(v, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.$$

Funkcja własna w tym przypadku ma postać

$$W_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

W ustroju tym analogicznie do równań (4.1) mamy

$$(6.6) \quad M_{01}=0, \quad M_{10}=M_{12}, \dots, M_{i,i-1}=M_{i,i+1}, \dots, M_{j+1,j}=0,$$

a suma kątów przypodporowych po obu stronach każdej z podpór jest równa zeru:

$$(6.7) \quad \varphi_{i,i-1}(t) + \varphi_{i,i+1}(t) = 0.$$

W celu znalezienia kątów (6.7) należy zróżniczkować równanie (6.5) względem x i podstawić odpowiednią wartość odciętej:

$$(6.8) \quad \varphi_{i,i+1}(t) = e^{-\varepsilon t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n'(0)}{\omega_{1n}} \int_0^t W_n(u) du \int_0^t e^{\varepsilon\tau} \{ [f_2(u) + \varepsilon f_1(u)] \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \omega_{1n} f_1(u) \cos \omega_{1n}(t-\tau) \} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} W_n'^2(0) \frac{e^{-\varepsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\varepsilon\tau} M(0, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(l) W'_n(0) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon\tau} M(l, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(0) \int_0^t \frac{e^{-\epsilon\tau}}{\bar{m}\omega_{1n}} e^{\epsilon\tau} W_n(v\tau) P(v\tau, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau, \\
 (6.9) \quad \varphi_{i, i-1}(t) = & e^{-\epsilon t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W'_n(l)}{\omega_{1n}} \int_0^l W_n(u) du \int_0^t e^{\epsilon\tau} \{ [f_2(u) + \epsilon f_1(u)] \sin \omega_{1n}(t-\tau) + \\
 & + \omega_{1n} f_1(u) \cos \omega_{1n}(t-\tau) \} d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} W'_n(0) W'_n(l) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon\tau} M(0, \tau) \sin \omega_{1n} \times \\
 & \times (t-\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} W_n'^2(l) \frac{e^{-\epsilon t}}{\bar{m}\omega_{1n}} \int_0^t e^{\epsilon\tau} M(l, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenia (4.2), (4.4), (4.5) i (4.9) oraz analogicznie do (4.3) i (4.7)

$$(6.10) \quad M_t \stackrel{df}{=} \begin{cases} e^{-\epsilon t} \int_0^t e^{\epsilon\tau} M_{i, i+1}(0, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau \\ e^{-\epsilon t} \int_0^t e^{\epsilon\tau} M_{i, i-1}(l, \tau) \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau, \end{cases}$$

a także analogicznie do (4.8)

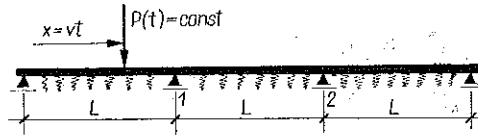
$$(6.11) \quad w'_{i, i-1} = w'_{i, i+1}.$$

Na podstawie tych oznaczeń równań (6.6) i warunków ciągłości pasma (6.7) otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 & [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_1 - \alpha'(l, 0) M_2 = 0, \\
 & -\alpha'(l, 0) M_1 + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_2 - \alpha'(l, 0) M_3 = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -\alpha'(l, 0) M_{i-2} + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_{i-1} - \alpha'(l, 0) M_i = 0, \\
 & -\alpha'(l, 0) M_{i-1} + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_i - \alpha'(l, 0) M_{i+1} = -\beta'_{i, i+1}, \\
 (6.12) \quad & -\alpha'(l, 0) M_i + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_{i+1} - \alpha'(l, 0) M_{i+2} = -\beta'_{i+1, i}, \\
 & -\alpha'(l, 0) M_{i+1} + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_{i+2} - \alpha'(l, 0) M_{i+3} = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -\alpha'(l, 0) M_{j-2} + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_{j-1} - \alpha'(l, 0) M_j = 0, \\
 & -\alpha'(l, 0) M_{j-1} + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_j = 0.
 \end{aligned}$$

7. Przykład

Znajdziemy równanie ruchu pierwszego z trzech przęseł pasma ciągłego (rys. 5) w chwili, gdy przęśło to jest bezpośrednio obciążone siłą $P = \text{const}$ przemieszczającą się ze stałą prędkością $v = \text{const}$.



Rys. 5

Równania typu (6.12) dla tego przypadku są następujące:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} & [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_1 - \alpha'(0, l) M_2 = \beta'_{10}, \\ & -\alpha'(l, 0) M_1 + [\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)] M_2 = 0. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu układu równań (7.1) znajdziemy

$$(7.2) \quad M_1 = \frac{\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)}{[\alpha'(l, l) + \alpha'(0, 0)]^2 - \alpha'^2(l, 0)} \beta'_{10}.$$

Warunki początkowe (3.2) są analogiczne do (5.3).

Po wprowadzeniu oznaczeń jak w wyrażeniu (5.4) otrzymuje się szukane równanie ruchu elementu (0, 1) pasma (rys. 5):

$$\begin{aligned} w_{01}(x, t) = & \\ = \frac{Pe^{-\sigma t}}{\bar{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x)}{\omega_{1n}} \cdot \frac{W_n'^4(0)}{W_n'^4(l) + W_n'^2(l)W_n'^2(0) + W_n'^4(0)} \int_0^t W_n(v\tau) e^{\sigma\tau} \sin \omega_{1n}(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail*, Proceeding of the Second International Congress for Applied Mechanics, Zürich 1926.
2. J. T. KENNEY, *Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech. 1, 1954.
3. В. А. Киселев, *Динамические поверхности влияния перемещений и внутренних сил ортотропных пластин на упругом основании с двумя коэффициентами постели*, Иссл. теории соор., 12, Госиздат, Москва 1963.
4. Э. А. Кричук, *Колебания плиты, лежащей на упругом с последствием основании, с учетом массы подвижной нагрузки*, Теория оболочек и пластин, Узд. Ак. Наук Армянской ССР, Ереван 1964.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ПРОГИБОВ СОСТАВНОЙ ПОЛОСЫ
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В настоящей работе выводятся уравнения движения полосы, состоящей из произвольного числа элементов, соединенных с собой шарнирно или неразрывно (на опорах) и покоящейся на упругом основании. Вдоль полосы перемещается нагрузка в виде одной силы или системы сосредоточенных сил.

Решение задачи получается методом обобщенного ряда Фурье собственных функций. В обеих системах решение сводится к системе линейных уравнений и иллюстрируется примером.

Принятая динамическая схема может быть моделью дорожного покрытия.

Summary

DYNAMIC LINES OF THE INFLUENCE OF BENDINGS OF A MULTIPARTIAL BAND
ON AN ELASTIC BASE

In this paper are derived the equations of motion of a compound band having an arbitrary number of elements connected with each other by articulated joints or in a continuous manner (on supports), and resting on an elastic base. Along the band a load is displaced in a form of a single force or a system of connected forces.

The solution of the problem is obtained by the method of generalized series of Fourier's eigenfunctions. In both structures, the solution is brought to set of linear equations and is illustrated by an example.

The accepted dynamic scheme can be a model for a communication surface.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 grudnia 1969 r.
