

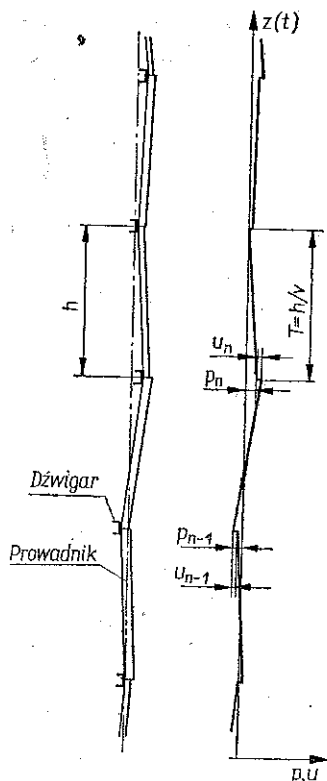
## DRGANIA PRZYPADKOWE OSCYLATORA HARMONICZNEGO WYWOŁANE PEWNYM PRAWIE STACJONARNYM PROCESEM LOSOWYM

ANDRZEJ TYLIKOWSKI i STANISŁAW KAWUŁOK (GLIWICE)

W pracy zanalizowano drgania układu mechanicznego o jednym stopniu swobody, towarzyszące jednostajnemu ruchowi tego układu po podłożu składającym się z prostoliniowych odcinków, których końce położone są przypadkowo. Model ten jest przybliżeniem drgań naczynia górniczego urządzenia wyciągowego, wywołanych przypadkowymi nierównościami przewodników szybowych [1 i 3]. Budowa wyznaczonej funkcji korelacyjnej podłoża wskazuje, że analizowany proces nierówności podłoża jest niestacjonarnym procesem losowym. Wykazano jednak, że proces ten należy do klasy tzw. procesów prawie stacjonarnych, jak również wyznaczono zastępczą stacjonarną funkcję korelacyjną tego procesu. Wariancję przemieszczenia oscylatora wyznaczono na podstawie analizy spektralnej procesów stacjonarnych.

### 1. Wprowadzenie

Naczynie wyciągowe górniczego urządzenia wyciągowego prowadzone jest w szybie wzdłuż przewodników szybowych za pomocą przewodnic, toczących się po przewodnikach. Przewodniki podparte są za pomocą poziomych belek, zwanych dźwigarami szybowymi, zamocowanych w obmurzu szybowym. Ponieważ dźwigary szybowe rozmieszczone są w linii pionowej z pewnym przybliżeniem, przeto ciąg przewodników nie jest prostoliniowy. Dla celów praktycznych wykonuje się pomiary odchyłek  $p$  przewodników od pionu (rys. 1). Odchyłki te mierzone są na wysokości każdego dźwigara. Przyjmuje się, że pomiędzy dźwigarami przewodniki są proste, załamania występują tylko na wysokości dźwigarów. Oprócz takich załamania ze względu na niedokładność wykonania profili



Rys. 1

walcowanych w przewodnikach na stykach dwóch kolejnych profili występować mogą uskoki  $u$ . Drogę, wzdłuż której prowadzone jest naczynie wyciągowe, można więc w pierwszym przybliżeniu przyjąć jako linię łamaną z uskokami na załamaniach. Do dalszej analizy przyjęto, że wielkości  $p_n$  odchyłek dźwigarów od pionu i wielkości uskoków  $u_n$  są nieskorelowanymi ze sobą zmiennymi losowymi o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa.

Naczynie wyciągowe zawieszono na linie i poruszające się wzdłuż przewodników — ze względu na zdeterminowany ruch w kierunku pionowym — posiada pięć stopni swobody. W ogólnym przypadku jego ruch jako ciała sztywnego można opisać układem pięciu równań, odpowiadającym pięciu drganiom wzajemnie ze sobą sprzężonym. Jeżeli jednak środek masy naczynia pokrywa się ze środkiem sprężystości układu naczynie-przewodniki (co praktycznie ma miejsce), to drgania odpowiadające poszczególnym stopniom swobody mają charakter niezależny [2]. Dzięki temu dla zanalizowania wpływu nierówności przewodników szybowych na drgania naczynia wyciągowego wystarczy rozpatrzyć ruch oscylatora harmonicznego, wymuszony procesem losowym, zdefiniowanym powyżej.

## 2. Wyznaczenie funkcji korelacyjnej nierówności przewodników prawie stacjonarnego procesu losowego

Założono, że zaburzający proces losowy  $z(t)$  można aproksymować odcinkami funkcją liniową czasu dla  $0 < t < T$  o przypadkowych współrzędnych początku  $p_n + u_n$  i końca  $p_{n+1}$ . W przedziale tym

$$z_n(t) = p_n + u_n + \frac{p_{n+1} - p_n - u_n}{T} t.$$

W dalszej części rozważań zakładać się będzie, że dla każdego  $n$ ,  $p_n$  i  $u_n$  są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi o wartościach średnich równych zeru (założenie to nie zmniejsza ogólności rozważań) i wariancjach  $\sigma_p^2$  i  $\sigma_u^2$ . Funkcja korelacyjna tak zdefiniowanego procesu dla  $t_1, t_2 \in (0, T)$  przedstawia się wzorem

$$K_z^{(1)}(t_1, t_2) = E \left[ \left( p_n + u_n + \frac{p_{n+1} - p_n - u_n}{T} t_1 \right) \left( p_n + u_n + \frac{p_{n+1} - p_n - u_n}{T} t_2 \right) \right],$$

gdzie  $E$  jest operatorem uśredniania po przestrzeni probabilistycznej. Po prostych przekształceniach otrzymać można wzór

$$(2.1) \quad K_z^{(1)}(t_1, t_2) = (\sigma_p^2 + \sigma_u^2) \left( 1 - \frac{t_1}{T} \right) \left( 1 - \frac{t_2}{T} \right) + \sigma_p^2 \frac{t_1 t_2}{T^2}.$$

Powyższa formuła ma miejsce jedynie, gdy  $t_1$  i  $t_2$  należą do tego samego przedziału.

Przy założeniu, że czasy  $t_1, t_2 \in (0, T)$ , lecz opisują przebieg procesu w dwu kolejnych przedziałach, funkcja korelacyjna ma postać

$$K_z^{(2)}(t_1, t_2) = E \left[ \left( p_{n-1} + u_{n-1} + \frac{p_n - p_{n-1} - u_{n-1}}{T} t_1 \right) \left( p_n + u_n + \frac{p_{n+1} - p_n - u_n}{T} t_2 \right) \right]$$

lub po przekształceniach

$$(2.2) \quad K_z^{(2)}(t_1, t_2) = \sigma_p^2 \frac{t_1}{T} \left(1 - \frac{t_2}{T}\right).$$

Analogicznie można wykazać, że funkcja korelacyjna w pozostałych przypadkach, gdy  $k$  różni się od 1 o 2 lub więcej, jest równa zeru:

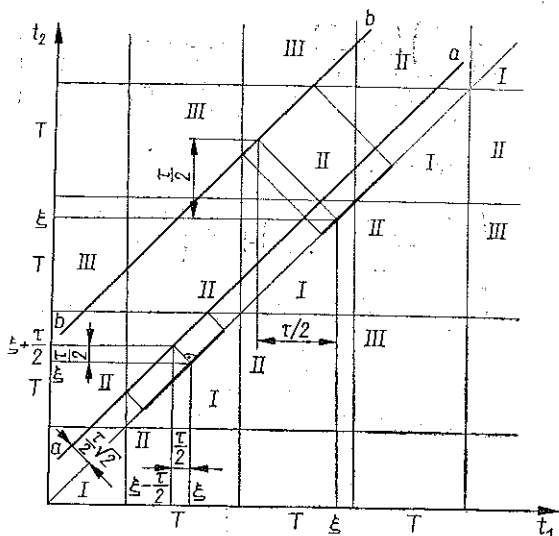
$$(2.3) \quad K_z^{(3)}(t_1, t_2) = E[z_k(t_1)z_l(t_2)] = 0.$$

Z budowy zależności (2.1), (2.2) i (2.3) wynika, że tak zdefiniowany proces ma charakter niestacjonarny. Jakkolwiek analiza drgań układu mechanicznego pod wpływem tego niestacjonarnego zaburzenia jest możliwa, to jednak prowadzi ona do bardzo żmudnych i długich rachunków. Ze względu na znaczne uproszczenie w analizie stacjonarnych procesów stochastycznych korzystną może być aproksymacja pewnych procesów niestacjonarnych procesami stacjonarnymi.

KAMPE DE FERIET [4] zdefiniował pewną klasę procesów losowych zwanych procesami prawie stacjonarnymi. Proces stochastyczny drugiego rzędu o danej funkcji korelacyjnej  $K(t_1, t_2)$  jest procesem prawie stacjonarnym, jeżeli dla każdego  $\tau$  istnieje granica

$$(2.4) \quad R(\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_{|\tau|/2}^{\alpha-|\tau|/2} K\left(\xi - \frac{\tau}{2}, \xi + \frac{\tau}{2}\right) d\xi;$$

$R(\tau)$  jest zastępczą stacjonarną funkcją korelacyjną tego procesu.



Rys. 2

W celu przekonania się, czy proces nierówności przewodników, tj. czy proces losowy drugiego rzędu (skończona funkcja korelacyjna), opisany funkcjami korelacyjnymi (2.1)–(2.3) jest procesem prawie stacjonarnym, należy zbadać, czy granica (2.4) istnieje dla każdego  $\tau$ .

Jeżeli  $0 \leq |\tau| \leq T$ , to droga całkowania w (2.4) na płaszczyźnie  $t_1, t_2$  przebiega przez obszary typu I i II, w których podcałkowa funkcja korelacyjna określona jest odpowiednio przez (2.1) i (2.2), mianowicie w obszarze I:  $\tau/2 \leq \xi \leq T - \tau/2$  oraz w obszarze II:  $T - \tau/2 \leq \xi \leq T + \tau/2$ .

Na rys. 2 droga całkowania oznaczona jest symbolem  $a-a$ . Funkcja korelacyjna w tym obszarze ma postać

$$(2.5) \quad R_1(\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left[ \int_I K^{(1)} \left( \xi - \frac{\tau}{2}, \xi + \frac{\tau}{2} \right) d\xi + \int_{II} K^{(2)} \left( \xi - \frac{\tau}{2}, \xi + \frac{\tau}{2} \right) d\xi \right].$$

Wykorzystanie wzoru

$$(2.6) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\text{entier } \frac{\alpha}{T}}{\frac{\alpha}{T}} = 1$$

oraz faktu, że całki po obszarze I i II powtarzają się we wzorze, pozwala sprowadzić wyznaczenie  $R_1(\tau)$  do obliczenia całek następujących:

$$R_1(\tau) = \frac{1}{T} \int_{|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} (\sigma_p^2 + \sigma_u^2) \left( 1 - \frac{\xi + \frac{\tau}{2}}{T} \right) \left( 1 - \frac{\xi - \frac{\tau}{2}}{T} \right) + \\ + \sigma_p^2 \frac{\left( \xi - \frac{\tau}{2} \right) \left( \xi + \frac{\tau}{2} \right)}{T^2} d\xi + \int_{T-|\tau|/2}^{T+|\tau|/2} \sigma_p^2 \frac{\xi - \frac{\tau}{2}}{T} \left( 2 - \frac{\xi + \frac{\tau}{2}}{T} \right) d\xi.$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymano

$$(2.7) \quad R_1(\tau) = \frac{\sigma_p^2 + \sigma_u^2}{T^3} \left( \frac{T^3}{6} - \frac{T^2|\tau|}{2} + \frac{|\tau|^3}{6} \right) + \frac{\sigma_p^2}{T^3} \left( \frac{T^3}{3} + \frac{T^2|\tau|}{2} - T\tau^2 + \frac{|\tau|^3}{3} \right).$$

W podobny sposób dla  $T \leq |\tau| \leq 2T$  droga całkowania przebiega przez obszary typu II i III. Na rys. 2 jest ona oznaczona przez  $b-b$ . Ze względu na (2.3) całkowanie odbywa się na odcinkach drogi zawartej w obszarze II, to jest w przedziale  $|\tau|/2 \leq \xi \leq 2T - |\tau|/2$ . Tak więc stacjonarna funkcja korelacyjna w tym obszarze ma postać

$$R_2(\tau) = \frac{1}{T} \int_{|\tau|/2}^{2T-|\tau|/2} \sigma_p^2 \frac{\xi - \frac{\tau}{2}}{T} \left( 2 - \frac{\xi + \frac{\tau}{2}}{T} \right) d\xi$$

lub po wykonaniu całkowania

$$(2.8) \quad R_2(\tau) = \frac{\sigma_p^2}{T^3} \left( \frac{4}{3} T^3 - 2T^2|\tau| + T|\tau|^2 - \frac{|\tau|^3}{6} \right).$$

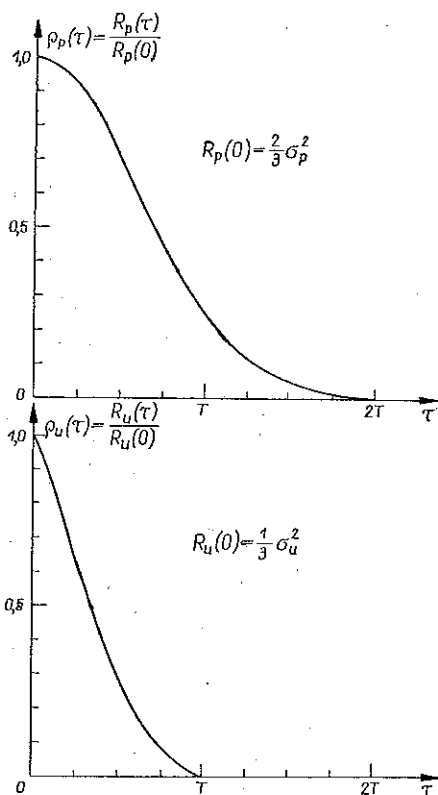
W pozostałym przedziale  $|\tau| \geq 2T$  droga całkowania przebiega przez obszary typu III, gdzie funkcja korelacyjna jest równa zero, a zatem

$$(2.9) \quad R_3(\tau) = 0.$$

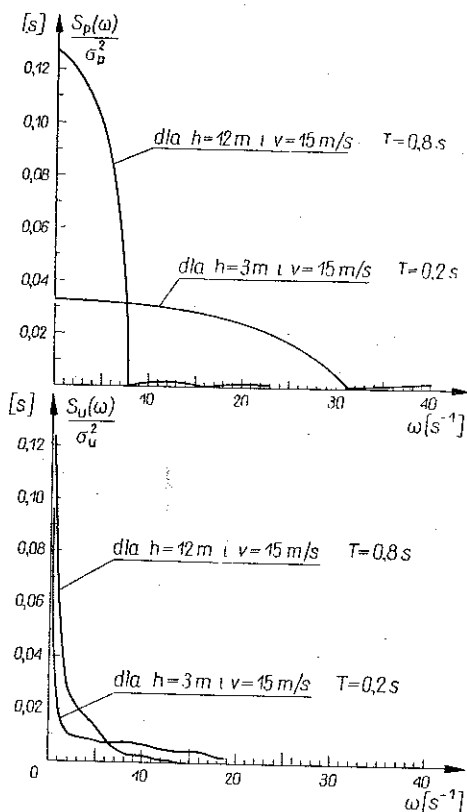
Z powyższej analizy wynika, że proces nierówności przewodników jest procesem prawie stacjonarnym o stacjonarnej funkcji korelacyjnej, określonej za pomocą wzorów (2.7)–(2.9).

Na rys. 3 przedstawiono przykładowo typowe wykresy funkcji korelacyjnych  $R_p(\tau)$  i  $R_u(\tau)$ , gdzie

$$R(\tau) = R_p(\tau) + R_u(\tau).$$



Rys. 3



Rys.4

Wykorzystując zastępczą funkcję korelacyjną wyznaczyć można gęstość spektralną tego procesu, potrzebną do analizy drgań przypadkowych układu, określoną wzorem

$$(2.10) \quad S_z(\omega) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Po uwzględnieniu (2.7)–(2.9) w transformacie (2.10) gęstość spektralna rozpatrywanego procesu prawie stacjonarnego przedstawia się wzorem

$$(2.11) \quad S_z(\omega) = \frac{1}{\pi T^3 \omega^4} \left[ 8\sigma_p^2 \sin \frac{4\omega T}{2} + \sigma_u^2 \left( \frac{T^2}{2} \omega^2 + 1 - T\omega \sin \omega T - \cos \omega T \right) \right].$$

Na rys. 4 przedstawiono gęstość spektralną  $S_p(\omega)$  i  $S_u(\omega)$ . Gęstości te przedstawiono w przedziale  $0,40 S^{-1}$  ze względu na fakt, że w praktycznych układach częstość drgań własnych nie przekracza  $20 S^{-1}$ .

### 3. Analiza spektralna przemieszczeń oscylatora

Ruch układu mechanicznego o masie  $m$ , stałej sprężystej  $c$ , współczynnika tarcia wiskotycznego  $\alpha$ , wywołany wymuszeniem kinematycznym  $z(t)$  można opisać w nieruchomym układzie  $x$  równaniem

$$(3.1) \quad m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = cz + \alpha\dot{z}.$$

Ruch ten można również rozpatrywać w ruchomym układzie  $x_w$ , gdzie spełnia równanie

$$(3.2) \quad m\ddot{x}_w + \alpha\dot{x}_w + cx_w = -m\ddot{z}.$$

Wprowadzając oznaczenia  $\alpha/m = 2\beta$ ,  $k^2 = c/m$  równania (3.1) i (3.2) przybierają postać

$$(3.3) \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + k^2x = k^2z + 2\beta\dot{z}, \quad \ddot{x}_w + 2\beta\dot{x}_w + k^2x_w = -\ddot{z}.$$

Jeżeli zaburzenie wejściowe, wymuszenie kinematyczne  $z(t)$ , ma charakter procesu stacjonarnego lub prawie stacjonarnego o danej gęstości spektralnej  $S_z(\omega)$ , przy czym działanie tego procesu trwa nieskończenie długo, to wyjściowe procesy przemieszczenia  $x(t)$  i  $x_w(t)$  są również stacjonarnymi procesami losowymi o gęstościach spektralnych równych iloczynowi wejściowej gęstości spektralnej  $S_z(\omega)$  i kwadratu modułu charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej układu, tj. mają postać [5]

$$(3.4) \quad S_x(\omega) = |G_1(\omega)|^2 S_z(\omega)$$

oraz

$$(3.5) \quad S_{x_w}(\omega) = |G_2(\omega)|^2 S_z(\omega),$$

gdzie odpowiednie kwadraty modułów charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych równań (3.3) mają postać

$$|G_1(\omega)|^2 = \frac{k^4 + 4\beta^2\omega^2}{(\omega^2 - k^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad |G_2(\omega)|^2 = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - k^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

Wariancję przemieszczenia  $x$  i przemieszczenia względnego  $x_w$  oblicza się wykonując całkowanie wyrażeń (3.4) lub (3.5) w przedziale  $(-\infty, +\infty)$ . Praktycznie

całki te obliczono za pomocą teorii residuów. I tak wariancja przemieszczenia względnego

$$(3.6) \quad \sigma_{x_w}^2 = \frac{\sigma_p^2}{2T^3 \beta k^2 \sqrt{k^2 - \beta^2}} \left[ \sqrt{k^2 - \beta^2} (3 - e^{-T\beta} \cos \sqrt{k^2 - \beta^2} T + \right. \\ \left. + e^{-T\beta} \cos 2\sqrt{k^2 - \beta^2} T) + \beta (e^{-2T\beta} \sin 2\sqrt{k^2 - \beta^2} T - 4e^{-T\beta} \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} T) \right] + \\ + \frac{\sigma_u^2}{2T^3 \beta k^2 \sqrt{k^2 - \beta^2}} \left[ -T^2 k e^{-T\beta} \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} T + \left( \frac{1}{2} T^2 (k^2 - 2\beta^2) + 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-T\beta} \cos \sqrt{k^2 - \beta^2} T \right) \sqrt{k^2 - \beta^2} + \beta (T^2 \beta \sqrt{k^2 - \beta^2} - e^{-\beta T} \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} T) \right].$$

Wariancja przemieszczenia bezwzględnego określona jest za pomocą wzoru, w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$(3.7) \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{2\beta k^5 \sqrt{k^2 - \beta^2} T^3} \left\{ \sigma_p^2 \left\{ A (3 - 4e^{-T\beta} \cos \sqrt{k^2 - \beta^2} T + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-2T\beta} \cos 2\sqrt{k^2 - \beta^2} T) + B (4e^{-T\beta} \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} T - e^{-2T\beta} \sin 2\sqrt{k^2 - \beta^2} T) \right\} + \right. \\ \left. + \sigma_u^2 \left\{ A \left[ \frac{1}{2} T^2 (k^2 - 2\beta^2) + 1 - e^{-T\beta} ((T\beta + 1) \cos \sqrt{k^2 - \beta^2} T + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{k^2 - \beta^2} T \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} T) \right] + B [-T^2 \beta \sqrt{k^2 - \beta^2} + \right. \\ \left. \left. + e^{-T\beta} ((T\beta + 1) \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} - \sqrt{k^2 - \beta^2} T \cos \sqrt{k^2 - \beta^2} T) \right] \right\} \right\} + \frac{\sigma_u^2}{3},$$

$$A = [4\beta^2(k^2 - 2\beta^2) + k^4] \cos 5\varphi + 8\beta^3 \sqrt{k^2 - \beta^2} \sin 5\varphi,$$

$$B = -[4\beta^2(k^2 - 2\beta^2) + k^4] \sin 5\varphi + 8\beta^3 \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos 5\varphi,$$

$$\varphi = \arctg \frac{\beta}{\sqrt{k^2 - \beta^2}}.$$

Wzory (3.6) i (3.7) stanowią rozwiązanie drgań oscylatora, wywołanych przypadkowym prawie stacjonarnym wymuszeniem kinematycznym przewodników w ramach teorii korelacyjnej. Metoda jak i rozwiązanie tego zadania mogą być zastosowane również do innych zagadnień technicznych (jak np. urządzenia transportowe), w których występują tego rodzaju zaburzenia losowe.

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. KNOP, *Zagadnienie sił działających na zbrojenie szybowe w czasie ruchu naczyń wydobywczych*, Praca doktorska AGH, Kraków 1964.
2. Я. Г. Исполов, *Некоторые вопросы динамики шахтного подъема*, Динамика и прочность машин, Труды Ленинградского Политехнического Института, № 252, 24-33.

3. M. ZAWAWA, *Zagadnienia stochastyczne w dynamice maszyn*, Zeszyty naukowe AGH, Elektryfikacja i mechanizacja górnictwa i hutnictwa, Zeszyt nr 32, Kraków 1968.
4. KAMPE DE FERIET, F. N. FRENKIEL, *Correlations and spectra for non-stationary random functions*, Math. of Comp. 16 (1962), 1 - 21.
5. I. I. GICHMAN, A.W. SKOROCOD, *Wstęp do teorii stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968, 195 - 202.

## Резюме

**СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА,  
ВЫЗВАННЫЕ НЕКОТОРЫМ СТАЦИОНАРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ**

Проводится анализ влияния неравенства ствольных проводников, на колебания подъемного сосуда, рассматриваемого в качестве гармонического осциллятора. Определяется корреляционная функция неравенства направляющих стволов, которая, как известно, является в общем нестационарным случайным процессом. В дальнейших рассуждениях, эта функция приближена к почти стационарному процессу, в смысле дефиниции Кампе де Ферие. Для так принятого процесса определяется спектральная плотность.

Для гармонического осциллятора, подверженного кинематическому вынуждению, получается спектральная плотность и дисперсия исходной функции (перемещения) с подвижной и неподвижной системой отсчета.

## Summary

**RANDOM VIBRATIONS OF A HARMONIC OSCILLATOR CAUSED BY A CERTAIN  
ALMOST-STATIONARY RANDOM PROCESS**

In this paper is analysed the influence of unevenness of the shaft guides upon the vibrations of a hoisting vessel considered to be a harmonic oscillator. The correlation function of the unevenness of the guides is determined, and appears, in general, to be a non-stationary random process. In the further considerations, that function is approximated by an almost stationary process, as understood by the Kempe de Feriet definition. The spectral density is calculated for the process thus assumed.

The spectral density and variance of the initial function (of radiation) has been obtained for a harmonic oscillator subjected to kinematic forcing in a mobile and immobile system of reference.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA  
W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1969 r.*