

STANY KRYTYCZNE NIERÓWNOMIERNIE OGRZANYCH PERFOROWANYCH PŁYT
KOLISTYCH

PIOTR KLEMM (ŁÓDŹ)

W pracy omówiono problem stateczności wstępnie wygiętej kolistej płyty perforowanej, do której prostopadle odbywa się ruch ciepła. Jako jednorodny model takich płyt przyjęto ośrodek włóknisty o biegunowej siatce i odpowiednio postulowanych równaniach fizycznych. Zagadnienie rozpatrzono w ramach teorii geometrycznie nieliniowej lecz liniowej fizycznie (pominięto wpływ zmian temperatury na stałe materiałowe). Rozwiązanie przeprowadzono metodą energetyczną wyznaczając parametry charakteryzujące stany krytyczne płyty. Przedstawiono wykresy, porównując otrzymane wyniki z podanymi w pracy [5] dla płyty kolistej nieperforowanej.

1. Podstawowe równania zagadnienia

Opierając się na ogólnych wzorach wyprowadzanych w [1] zestawiono poniżej podstawowe równania kontynualnej teorii drugiego rzędu perforowanej płyty wstępnie wygiętej. Równania równowagi dla kołowo-symetrycznego przypadku wyboczenia mają postać

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (rp^{rr})_{,r} - p^{\varphi\varphi} &= 0, \\ (m^{r\varphi})_{,r} + \frac{1}{r}(m^{r\varphi} - m^{\varphi r}) - \hat{p}^r &= 0, \\ (\hat{p}^r)_{,r} + \frac{1}{r}\hat{p}^r + (w_{,rr} + \bar{w}_{,rr})p^{rr} + \frac{1}{r}(w_{,r} + \bar{w}_{,r})p^{\varphi\varphi} + f &= 0, \end{aligned}$$

gdzie występujące wielkości p^{rr} i $p^{\varphi\varphi}$ są odpowiednio radialnymi i obwodowymi naprężeniami tarczowymi, \hat{p}^r gęstościami sił poprzecznych, $m^{r\varphi}$ i $m^{\varphi r}$ gęstościami momentów zginających kolejno w przekroju obwodowym i promieniowym, oraz f gęstościami obciążeń działających prostopadle do płaszczyzny płyty (w dalszych rozważaniach przyjęto $f \equiv 0$).

Składowe stanu odkształcenia przedstawimy w postaci sum

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \gamma_{rr} &= \dot{\gamma}_{rr} + \alpha_r \dot{T}, \\ \gamma_{\varphi\varphi} &= \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} + \alpha_t \dot{T}, \\ \kappa_{r\varphi} &= \dot{\kappa}_{r\varphi} + \alpha_r \dot{T} \delta^{-1}, \\ \kappa_{\varphi r} &= \dot{\kappa}_{\varphi r} + \alpha_t \dot{T} \delta^{-1}, \quad \gamma_r = \dot{\gamma}_r, \end{aligned}$$

w których $\overset{\circ}{\gamma}_{rr}$ i $\overset{\circ}{\gamma}_{\varphi\varphi}$ są odkształceniami powierzchni środkowej płyty wywołanej działaniem pola naprężeń⁽¹⁾, $\kappa_{r\varphi}$, $\kappa_{\varphi r}$ — zmianami krzywizn w kierunku promieniowym i obwodowym tej powierzchni oraz $\overset{\circ}{\gamma}_r$ lokalnym, niezależnym od ugięcia kątem obrotu, α_r i α_t są współczynnikami rozszerzalności termicznej w kierunku promieniowym i obwodowym. Rozkład temperatury T na grubości płyty został przedstawiony funkcją liniową

$$(1.3) \quad T = \overset{\circ}{T} + z \overset{\circ}{T} \delta^{-1}, \quad \overset{\circ}{T} = \text{const}, \quad \overset{\circ}{T} = \text{const}, \quad -\delta/2 \leq z \leq \delta/2.$$

Odształcenie γ_{rr} i $\gamma_{\varphi\varphi}$ oraz ugięcie w i wstępne wygięcie \bar{w} powiązane są następującym warunkiem zgodności odkształcenia:

$$(1.4) \quad (r\gamma_{\varphi\varphi})_{,r} - \gamma_{rr} = -\frac{1}{2} (w_{,r})^2 - w_{,r} \bar{w}_{,r}.$$

Równania fizyczne przyjętego modelu płyty wielo-otworowej mają budowę [2 i 6] następującą:

$$(1.5) \quad p^{rr} = \frac{E_r \delta}{1 - \nu_r \nu_\varphi} (\gamma_{rr} + \nu_\varphi \gamma_{\varphi\varphi}), \quad p^{\varphi\varphi} = \frac{E_\varphi \delta}{1 - \nu_r \nu_\varphi} (\gamma_{\varphi\varphi} + \nu_r \gamma_{rr}),$$

$$m^{r\varphi} = \frac{E_r \delta^3}{12 (1 - \nu_r \nu_\varphi)} (\kappa_{r\varphi} + \nu_\varphi \kappa_{\varphi r}), \quad m^{\varphi r} = \frac{E_\varphi \delta^3}{12 (1 - \nu_r \nu_\varphi)} (\kappa_{\varphi r} + \nu_r \kappa_{r\varphi}),$$

$$\hat{p}^r = \frac{E_r \delta^3}{b_r^2} \gamma_r,$$

gdzie

$$E_r \equiv E a_\varphi / l_\varphi, \quad \nu_r \equiv \nu a_\varphi / l_\varphi,$$

$$E_\varphi \equiv E a_r / l_r, \quad \nu_\varphi \equiv \nu a_r / l_r,$$

$$b_r = l_r - a_r,$$

przy czym E i ν oznaczają stałe materiałowe.

Wyrażenie na energię potencjalną ϵ rozpatrywanego przez nas jednorodnego modelu płyty perforowanych ma postać

$$(1.6) \quad \epsilon = \pi \int_{r_1}^{r_2} [(p^{rr} \gamma_{rr} + p^{\varphi\varphi} \gamma_{\varphi\varphi}) + (m^{r\varphi} \kappa_{r\varphi} + m^{\varphi r} \kappa_{\varphi r}) + \hat{p}^r \gamma_r] r dr.$$

Podstawiając prawe strony (1.2) i (1.5) do (1.6) oraz wprowadzając zmienną bezwymiarową $\rho = \frac{r}{r_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \leq \rho \leq 1 \right)$ otrzymujemy

$$(1.7) \quad \epsilon = \frac{\pi (r_2)^2 E_r \delta}{(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \int_a^1 [(\overset{\circ}{\gamma}_{rr})^2 + \nu_\varphi \overset{\circ}{\gamma}_{\varphi\varphi} \overset{\circ}{\gamma}_{rr} + 2 \overset{\circ}{\gamma}_{rr} \alpha_r \overset{\circ}{T} + \nu_\varphi (\overset{\circ}{\gamma}_{rr} + \overset{\circ}{\gamma}_{\varphi\varphi}) \alpha_r \overset{\circ}{T} +$$

$$+ (1 + \nu_\varphi) (\alpha_r \overset{\circ}{T})^2] \rho d\rho + \frac{\pi (r_2)^2 E_\varphi \delta}{(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \int_a^1 [(\overset{\circ}{\gamma}_{\varphi\varphi})^2 + \nu_r \overset{\circ}{\gamma}_{rr} \overset{\circ}{\gamma}_{\varphi\varphi} + 2 \gamma_{\varphi\varphi} \alpha_t \overset{\circ}{T} +$$

(1) Składowe wszystkich wektorów i tensorów występujących w tej pracy są ich składowymi fizycznymi.

$$\begin{aligned}
 & + \nu_r (\dot{\gamma}_{rr} + \dot{\gamma}_{\varphi\varphi}) \alpha_t \dot{T} + (1 + \nu_r) (\alpha_t \dot{T})^2 \rho d\rho + \frac{\pi (r_2)^2 E_r \delta^3}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \int_a^1 [(\dot{\kappa}_{r\varphi})^2 + \\
 & + \nu_\varphi \dot{\kappa}_{\varphi r} \dot{\kappa}_{r\varphi} + 2\kappa_{r\varphi} \alpha_r \dot{T} \delta^{-1} + \nu_\varphi (\dot{\kappa}_{r\varphi} + \dot{\kappa}_{\varphi r}) \alpha_r \dot{T} \delta^{-1} + (1 + \nu_\varphi) (\alpha_r \dot{T})^2 \delta^{-2}] \rho d\rho + \\
 & + \frac{\pi (r_2)^2 E_\varphi \delta^3}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \int_a^1 [(\dot{\kappa}_{\varphi r})^2 + \nu_r \dot{\kappa}_{\varphi r} \dot{\kappa}_{r\varphi} + 2\dot{\kappa}_{\varphi r} \alpha_t \dot{T} \delta^{-1} + \nu_r (\dot{\kappa}_{\varphi r} + \dot{\kappa}_{r\varphi}) \alpha_t \dot{T} \delta^{-1} + \\
 & + (1 + \nu_r) (\alpha_t \dot{T})^2 \delta^{-2}] \rho d\rho + \frac{\pi (r_2)^2 E_r \delta^3}{b_r^2} \int_a^1 (\dot{\gamma}_r)^2 \rho d\rho,
 \end{aligned}$$

gdzie $a = r_1/r_2$.

Wyraźmy następnie promieniowe i obwodowe naprężenia p^{rr} i $p^{\varphi\varphi}$ powierzchni środkowej płyty przez funkcje naprężeń $\Phi = \Phi(\rho)$:

$$(1.8) \quad \rho p^{rr} = \frac{\Phi_{,\rho}}{(r_2)^2}, \quad p^{\varphi\varphi} = \frac{\Phi_{,\rho\rho}}{(r_2)^2}.$$

Odształcenia γ_{rr} i $\gamma_{\varphi\varphi}$ wyrażamy przez Φ zgodnie z prawem Hooke'a, wykorzystując związek (1.5):

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_{rr} &= \frac{1}{(r_2)^2 \delta E_r} \left(\frac{1}{\rho} \Phi_{,\rho} - \nu_r \Phi_{,\rho\rho} \right), \\ \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{(r_2)^2 E_\varphi \delta} \left(\Phi_{,\rho\rho} - \nu_\varphi \frac{1}{\rho} \Phi_{,\rho} \right). \end{aligned}$$

Dla krzywizn w kierunku promieniowym i obwodowym mamy wzory

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \dot{\kappa}_{r\varphi} &= \frac{1}{(r_2)^2} (w_{,\rho} - \gamma_\rho), \\ \dot{\kappa}_{\varphi r} &= \frac{1}{(r_2)^2 \rho} (w_{,\rho} - \gamma_\rho). \end{aligned}$$

Podstawmy teraz prawe strony (1.9) i (1.10) do (1.7). Po prostych przekształceniach, dochodzimy do następującego wyrażenia na energię potencjalną omawianego układu:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \epsilon &= \frac{\pi}{(1 - \nu_r \nu_\varphi) (r_2)^2 \delta} \int_a^1 \left[\left(\frac{\Phi_{,\rho}}{\rho} \right)^2 \left(\frac{1}{E_r} - \frac{\nu_\varphi^2}{E_\varphi} \right) - \frac{\Phi_{,\rho} \Phi_{,\rho\rho}}{\rho} \left(\frac{2\nu_r}{E_r} - \frac{\nu_\varphi}{E_\varphi} - \frac{\nu_r \nu_\varphi^2}{E_\varphi} \right) + \right. \\ & + (\Phi_{,\rho\rho})^2 \left(\frac{\nu_r^2}{E_r} - \frac{\nu_r \nu_\varphi}{E_\varphi} \right) + \left(\frac{\Phi_{,\rho}}{\rho} \right)^2 \left(\frac{\nu_\varphi^2}{E_\varphi} - \frac{\nu_r \nu_\varphi}{E_r} \right) - \frac{\Phi_{,\rho} \Phi_{,\rho\rho}}{\rho} \left(\frac{2\nu_\varphi}{E_\varphi} - \frac{\nu_r}{E_r} - \frac{\nu_\varphi \nu_r^2}{E_r} \right) + \\ & + (\Phi_{,\rho\rho})^2 \left(\frac{1}{E_\varphi} - \frac{\nu_r^2}{E_r} \right) \rho d\rho + \frac{\pi \dot{T}}{(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \int_a^1 \left[\Phi_{,\rho} \left(2\alpha_r - \alpha_t \nu_r \nu_\varphi - \alpha_r \frac{E_r}{E_\varphi} \nu_\varphi^2 \right) + \right. \\ & \left. + \rho \Phi_{,\rho\rho} \left(2\alpha_t - \alpha_r \nu_r \nu_\varphi - \alpha_t \frac{E_\varphi}{E_r} \nu_r^2 \right) + \Phi_{,\rho} \left(\alpha_r \nu_\varphi - 2\alpha_t \nu_\varphi + \alpha_t \frac{E_\varphi}{E_r} \nu_r \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \Phi_{,\rho\rho} \left(\alpha_r v_\varphi \frac{E_r}{E_\varphi} - 2\alpha_r v_r + \alpha_t v_r \right) d\rho + \frac{\pi (r_2)^2 E_r \delta (1+v_\varphi) \alpha_r^2 \hat{T}^2}{(1-v_r v_\varphi)} \int_a^1 \rho d\rho + \\
& + \frac{\pi (r_2)^2 E_\varphi \delta (1+v_r) \alpha_t^2 \hat{T}^2}{(1-v_r v_\varphi)} \int_a^1 \rho d\rho + \frac{\pi \delta^3}{12 (1-v_r v_\varphi) (r_2)^2} \int_a^1 \left\{ E_r [(w_{,\rho} - \gamma_\rho)_{,\rho}]^2 + \right. \\
& + \frac{(E_r v_\varphi + E_\varphi v_r)}{\rho} [(w_{,\rho} - \gamma_\rho)_{,\rho} (w_{,\rho} - \gamma_\rho)] + E_\varphi \left[\frac{1}{\rho} (w_{,\rho} - \gamma_\rho) \right]^2 \left. \right\} \rho d\rho + \\
& + \frac{\pi \delta^2 \hat{T}}{12 (1-v_r v_\varphi)} \int_a^1 [(2E_r \alpha_r + E_r v_\varphi \alpha_r + E_\varphi v_r \alpha_t) \rho (w_{,\rho} - \gamma_\rho)_{,\rho} + \\
& + (E_r v_\varphi \alpha_r + 2E_\varphi \alpha_t + E_\varphi v_r \alpha_t) (w_{,\rho} - \gamma_\rho)] d\rho + \frac{\pi (r_2)^2 \delta \hat{T}^2}{12 (1-v_r v_\varphi)} \int_a^1 [E_r (1+v_\varphi) \alpha_r^2 + \\
& + E_\varphi (1+v_r) \alpha_t^2] \rho d\rho + \frac{\pi (r_2)^2 E_r \delta^3}{b_r^2} \int_a^1 (\gamma_\rho)^2 \rho d\rho.
\end{aligned}$$

W dalszym ciągu pracy ograniczamy się do płyt wielo-otworowych, wstępnie wygiętych, w których $a_\varphi/l_\varphi = a_r/l_r = \text{const}$ oraz

$$(1.12) \quad E' \equiv E_r = E_\varphi, \quad v' \equiv v_r = v_\varphi, \quad \alpha_t = \alpha_r.$$

Przy tych założeniach wyrażenie (1.11) sprowadzimy do prostej postaci

$$\begin{aligned}
(1.13) \quad \epsilon = & \frac{\pi}{(r_2)^2 E' \delta} \int_a^1 \left[(\Phi_{,\rho\rho})^2 - \frac{2v'}{\rho} \Phi_{,\rho} \Phi_{,\rho\rho} + \left(\frac{\Phi_{,\rho}}{\rho} \right)^2 \right] \rho d\rho + \\
& + \frac{\pi E' \delta^3}{12 (1-(v')^2) (r_2)^2} \int_a^1 \left\{ [(w_{,\rho} - \gamma_\rho)_{,\rho}]^2 + \frac{2v'}{\rho} (w_{,\rho} - \gamma_\rho)_{,\rho} (w_{,\rho} - \gamma_\rho) \right\} + \\
& + \left[\frac{1}{\rho} (w_{,\rho} - \gamma_\rho) \right]^2 \left. \right\} \rho d\rho + 2\pi \alpha_t \hat{T} [\Phi_{,\rho}(1) - a\Phi_{,\rho}(a)] + \\
& + \frac{\pi (r_2)^2 E' \delta \alpha_t^2 \hat{T}^2}{(1-v')} (1-a^2) + \frac{\pi \delta^2 \hat{T} \alpha_t E'}{6 (1-v')} \{ [w_{,\rho}(1) - \gamma_\rho(1)] - [w_{,\rho}(a) - \gamma_\rho(a)] a \} + \\
& + \frac{\pi (r_2)^2 \delta \hat{T}^2 \alpha_t^2}{12 (1-v')} (1-a^2) E' + \frac{\pi (r_2)^2 E' \delta^3}{b_r^2} \int_a^1 (\dot{\gamma})^2 \rho d\rho.
\end{aligned}$$

Funkcje Φ , w i \bar{w} są powiązane warunkiem nierozdzielności (1.4). Zgodnie z (1.2) i (1.9) otrzymamy

$$\begin{aligned}
(1.14) \quad \left(\frac{\rho}{\delta E_\varphi} \Phi_{,\rho\rho} \right)_{,\rho} - \left[\frac{1}{\rho \delta E_r} + \left(\frac{v_\varphi}{\delta E_\varphi} \right)_{,\rho} \right] \Phi_{,\rho} = \\
= -\frac{1}{2} (w_{,\rho})^2 - w_{,\rho} \bar{w}_{,\rho} - \rho \alpha_t \hat{T}_{,\rho} + (\alpha_r - \alpha_t) \hat{T}.
\end{aligned}$$

Wykorzystując przyjęcia (1.12) powyższy warunek zgodności odkształceń napiszemy w prostszej postaci

$$(1.15) \quad \left[\frac{1}{\rho} (\rho \Phi_{, \rho}),_{, \rho} \right]_{, \rho} = - \frac{\delta E'}{\rho} \left[\frac{1}{2} (w_{, \rho})^2 + w_{, \rho} \bar{w}_{, \rho} \right] - \delta E' \alpha_t \dot{T}_{, \rho},$$

co dla $\dot{T} = \text{const}$ sprowadza się do znanego wzoru (por. [3]).

Dalsze rozważania przeprowadzimy dla płyt podpartych na obwodzie w sposób przegubowo nieprzesuwny korzystając z wyrażenia na energię ϵ i warunku nierozdzielności odkształceń (1.4) oraz przekształconego równania (1.1)₃ mającego postać

$$(1.16) \quad \dot{\gamma}_{\rho} R^r + \Phi_{, \rho} (w_{, \rho} + \bar{w}_{, \rho}) \frac{1}{(r_2)^3} \rho = \frac{c}{r_2 \rho}$$

gdzie

$$R^r \equiv \frac{E_r \delta^3}{(b_r)^2},$$

$$c = r_2(a) [\dot{\beta}^r(a) + p^{rr}(a) w_{, \rho}(a) (r_2)^{-1}] = r_2 [\dot{\beta}^r(1) + p^{rr}(1) w_{, \rho}(1) (r_2)^{-1}] = \text{const}.$$

2. Przykład rozwiązania

Zagadnienie rozwiążemy w sposób przybliżony korzystając z metody energetycznej, przedstawionej przez WATERSA, stosowanej szeroko w teorii płyt cienkich (np. w monografii [3]). Wykorzystajmy wyrażenie znane w teorii liniowej:

$$(2.1) \quad w = w_0(1 - 2\alpha\rho^2 + \beta\rho^4),$$

przy czym w_0 oznacza nieznaną ugięcie w środku płyty. Załóżmy ponadto, że powierzchnię środkową wstępnie wygiętej płyty można z dostateczną dokładnością przedstawić za pomocą funkcji

$$(2.2) \quad \bar{w} = \bar{w}_0(1 - 2\alpha\rho^2 + \beta\rho^4).$$

Symbol $\bar{w}_0 = \text{const}$ oznacza tu strzałkę wstępnego wygięcia płyty oraz

$$(2.3) \quad \alpha \equiv \frac{3 + \nu'}{5 + \nu'}, \quad \beta \equiv \frac{1 + \nu'}{5 + \nu'}.$$

Podstawiając (2.1) i (2.2) do (1.15), otrzymamy

$$(2.4) \quad \left[\frac{1}{\rho} (\rho \Phi_{, \rho}),_{, \rho} \right]_{, \rho} = -8E' \delta (w_0^2 + 2w_0 \bar{w}_0) (\beta^2 \rho^5 - 2\alpha\beta\rho^3 + \alpha^2 \rho).$$

Całkując dwukrotnie (2.4) dochodzimy do wzoru

$$(2.5) \quad \Phi_{, \rho} = -\delta E' (w_0^2 + 2w_0 \bar{w}_0) \left(\frac{\beta^2}{6} \rho^7 - \frac{2\alpha\beta}{3} \rho^5 + \alpha^2 \rho^3 \right) + C_1 \rho + C_2 \frac{1}{\rho}.$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczmy z warunków brzegowych

$$(2.6) \quad [p^{\rho\rho}]_{\rho=a} = \left[\frac{1}{\rho} (r_2)^2 \Phi_{,\rho} \right]_{\rho=a} = 0,$$

$$[w_\rho]_{\rho=1} = [[r_2 \rho \gamma_{\varphi\varphi}]_{\rho=1} = 0,$$

gdzie w_ρ jest przemieszczeniem radialnym. Korzystając z powyższych warunków brzegowych oraz ze związków (1.2) i (1.9) otrzymamy

$$(2.7) \quad C_1 = \delta E' (w_0^2 + 2w_0 \bar{w}_0) \left\{ \alpha^2 [(3-v') + (1+v') a^4] - \frac{2\alpha\beta}{3} [(5-v') + (1+v') a^6] + \frac{\beta^2}{6} [(7-v') + (1+v') a^8] \right\} [(1-v') + (1+v') a^2]^{-1} - (r_2)^2 \delta E' \alpha_t \hat{T} [(1-v') + (1+v') a^2]^{-1},$$

$$C_2 = \delta E' (w_0^2 + 2w_0 \bar{w}_0) a \left\{ \alpha^2 [(1-v') a^3 - (3-v')] - \frac{2\alpha\beta}{3} [(1-v') a^5 - (5-v')] + \frac{\beta^2}{6} [(1-v') a^7 - (7-v')] \right\} [(1-v') + (1+v') a^2]^{-1} + (r_2)^2 \delta E' \alpha_t \hat{T} a^2 [(1-v') + (1+v') a^2]^{-1}.$$

Znając funkcję w i $\Phi_{,\rho}$ możemy z równania (1.16) wyznaczyć nieznaną funkcję $\dot{\gamma}_\rho$:

$$(2.8) \quad \dot{\gamma}_\rho = -\frac{1}{R' (r_2)^3 \rho} \Phi_{,\rho} (w_{,\rho} + \bar{w}_{,\rho}).$$

Korzystając następnie ze wzoru (1.13) możemy określić energię jako funkcję nieznanego dotąd ugięcia płyty w_0 . Z warunku ekstremum funkcji ϵ wynika równanie

$$(2.9) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial w_0} = 0$$

wiążące parametry w_0, \bar{w}_0, \hat{T} i \hat{T} . Powyższe równanie napiszemy od razu dla przypadku $v' = 0,3, r_1/r_2 = 0,1$. Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.10) \quad \xi \equiv \frac{w_0}{\delta}, \quad \bar{\xi} \equiv \frac{\bar{w}_0}{\delta},$$

$$\theta \equiv \frac{\alpha_t \hat{T} (r_2)^2}{\delta^2}, \quad \vartheta \equiv \frac{\alpha_t \hat{T} (r_2)^2}{\delta^2}$$

otrzymamy

$$(2.11) \quad 3,464 (\xi^3 + 3\xi^2 \bar{\xi} + 2\xi \bar{\xi}^2) - 0,358 (\xi + \bar{\xi}) \theta - 0,223 v + 0,528 \xi + (6\xi^5 + 30\xi^4 \bar{\xi} + 52\xi^3 \bar{\xi}^2 + 36\xi^2 \bar{\xi}^3 + 8\xi \bar{\xi}^4) 0,274 \frac{b_r^2}{(r_2)^2} + (4\xi^3 + 9\xi^2 \bar{\xi} + 4\xi \bar{\xi}^2) 0,200 \left(\frac{b_r}{r_2} \right)^2 - 0,0463 (2\xi + \bar{\xi}) \theta \left(\frac{b_r}{r_2} \right)^2 -$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & -0,004(4\xi^3 + 12\xi^2\bar{\xi} + 10\xi\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}^3)\theta\left(\frac{b_r}{r_2}\right)^4 - 1,073(4\xi^3 + 12\xi^2\bar{\xi} + \\ & \text{[c.d.]} \quad + 10\xi\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}^3)\theta\left(\frac{b_r}{r_2}\right)^2 - 0,042(3\xi^2 + 6\xi\bar{\xi} + 2\bar{\xi}^2)\vartheta\left(\frac{b_r}{r_2}\right)^2 + \\ & + 2,442(\xi + \bar{\xi})\theta^2\left(\frac{b_r}{r_2}\right)^2 + 0,006(\xi + \bar{\xi})\theta^2\left(\frac{b_r}{r_2}\right)^4 + 0,032\theta\vartheta\left(\frac{b_r}{r_2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

W przypadku rozpatrywania powyższego zagadnienia w ramach teorii skrępowanych obrotów (tj. gdy $b_r \rightarrow 0$, $\gamma_p \rightarrow 0$ [1]), równanie (2.11) upraszcza się do postaci

$$(2.12) \quad (\xi + \bar{\xi})^3 + 3p(\xi + \bar{\xi}) + 2q = 0,$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{aligned} p &= 0,050 - 0,333\bar{\xi}^2 - 0,034\theta, \\ q &= -0,076\bar{\xi} - 0,032\vartheta. \end{aligned}$$

Dalszą analizę rozpatrywanej płyty przeprowadzimy w sposób podobny jak w pracy [5] wykorzystując równania (2.12) oraz (2.13). Załóżmy, że dla płyty o danym wstępnym ugięciu parametry θ i ϑ zmieniają się w sposób ciągły od zera począwszy. W sposób ciągły zmieniać się będzie wyróżnik równania (2.12). W zależności od znaku powyższego wyróżnika rozpatrujemy trzy możliwości:

- 1) $D > 0$, tj. istnieje jeden stan równowagi (równanie (2.12) ma jeden pierwiastek rzeczywisty);
- 2) $D < 0$, tj. istnieją trzy stany równowagi (równanie (2.12) ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste);
- 3) $D = 0$, tj. pojawiają się stany krytyczne.

Zestawiając możliwe wykresy trójmianu sześciennego (2.12) można wyróżnić dwa rodzaje stanów krytycznych dla perforowanej płyty kolistej przy $\gamma_p = 0$. Pierwszy rodzaj jest równoznaczny z możliwością rozdzielenia się stanu równowagi (przy $D < 0$) na trzy formy. Dla $D \leq 0$ wszystkie trzy położenia równowagi leżą dowolnie blisko siebie. Stan ten zachodzi, gdy $p = q = 0$. Drugi rodzaj stanu krytycznego odpowiada pojawieniu się dodatkowej postaci równowagi, nie leżącej w bezpośrednim otoczeniu postaci pierwotnej. Nowa postać równowagi może rozdzielać się na dwie, które dla małych ujemnych wartości wyróżnika znajdują się obok siebie. Powyższy typ stanów krytycznych zachodzi dla $q^2 + p^3 = 0$ przy $p < 0$.

Z warunku $q = 0$ dla stanów krytycznych pierwszego rodzaju otrzymamy

$$(2.14) \quad \vartheta_{kr} = -2,44\bar{\xi}.$$

Oznacza to, że różnica temperatur ma powodować wygięcie przeciwne do wstępnego (ruch ciepła zachodzi w kierunku wstępnego wygięcia). Dla płyt płaskich ogrzanych nierównomiernie nie ma stanów krytycznych pierwszego rodzaju. Z (2.12) otrzymamy teraz

$$(2.15) \quad \xi = -\bar{\xi}$$

lub dla $\xi \neq \bar{\xi}$

$$(2.16) \quad \xi = -\bar{\xi} \pm \sqrt{-3p}.$$

Związek (2.15) oznacza, że wygięta wstępnie płyta perforowana może zachować płaską postać równowagi. Dla $p > 0$ jest to jedyna postać równowagi, dla $p < 0$ możliwe są dalsze dwie postacie równowagi. Stan krytyczny zachodzi dla $p = 0$, skąd otrzymamy wartość krytyczną parametru

$$(2.17) \quad \theta_{kr} = 1,48 - 9,60\bar{\xi}^2.$$

Z (2.17) wynika, że dla płyty o wstępnym wygięciu $|\bar{\xi}| > 0,392$ zachowanie stateczności płaskiej postaci równowagi wymaga albo obniżenia temperatury powierzchni środkowej (gdyż $\theta_{kr} < 0$), albo wprowadzenia naciągu wstępnego. Warunkiem koniecznym pojawienia się stanów krytycznych drugiego rodzaju jest $p < 0$, tj.

$$(2.18) \quad \theta > 1,48 - 9,60\bar{\xi}^2.$$

Powyższy warunek jest spełniony dla dowolnego przyrostu temperatury powierzchni środkowej, jeżeli $|\bar{\xi}| > 0,392$. Dla ujemnych p otrzymamy dla ϑ dwie różne wartości krytyczne:

$$(2.19) \quad \vartheta_{kr} = -2,44\bar{\xi} \pm 31,10p\sqrt{-p},$$

przy czym dla $p = 0$ otrzymujemy (2.14). Podstawiając (2.19) do (2.13)₂ otrzymamy $q = \pm p\sqrt{-p}$.

Rozwiązanie równania (2.12) ma postać

$$(2.20) \quad \xi = -\bar{\xi} + 2\sqrt{-p}, \quad \xi = -\bar{\xi} - \sqrt{-p}.$$

Położenie (2.20) oraz wartości ϑ_{kr} określone za pomocą wzoru (2.19) odpowiadają górnemu i dolnemu stanowi krytycznemu.

Z powyższych rozważań wynika, że stany pierwszego rodzaju określone są dwoma parametrami krytycznymi (2.14) i (2.17). Stany drugiego rodzaju charakteryzuje górna i dolna wartość parametru (2.19). W przypadku płyty nie mającej wstępnego wygięcia zachodzą tylko stany krytyczne drugiego rodzaju przy spełnionym warunku $\theta > 1,48$.

Przeprowadzając podobne obliczenia dla stosunku $r_1/r_2 = 0,4$ oraz zachowując wartości parametrów $\nu' = 0,3$, $a_r/l_r = a_\varphi/l_\varphi = \text{const}$, otrzymujemy zależności dla p i q w postaci [por. (2.12) i (2.13)]

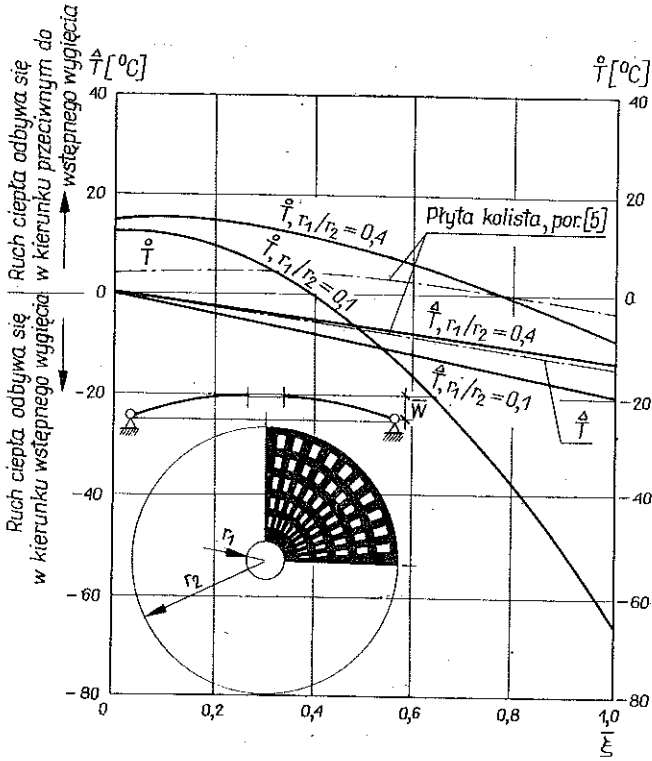
$$p = -0,333\bar{\xi}^2 - 0,116\theta + 0,196,$$

$$q = -0,294\bar{\xi} - 0,165\vartheta.$$

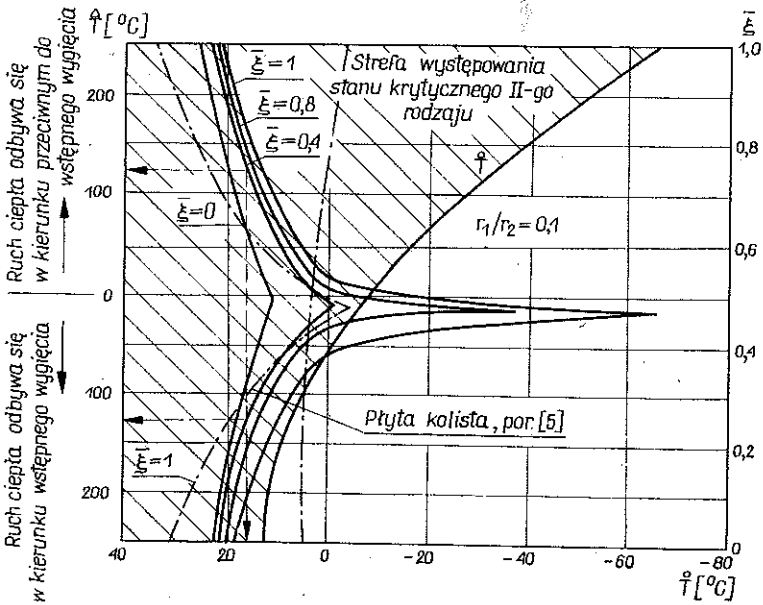
Ostatecznie dla stanu krytycznego pierwszego rodzaju uzyskujemy następujące wartości parametrów krytycznych:

$$\vartheta_{kr} = -1,781\bar{\xi},$$

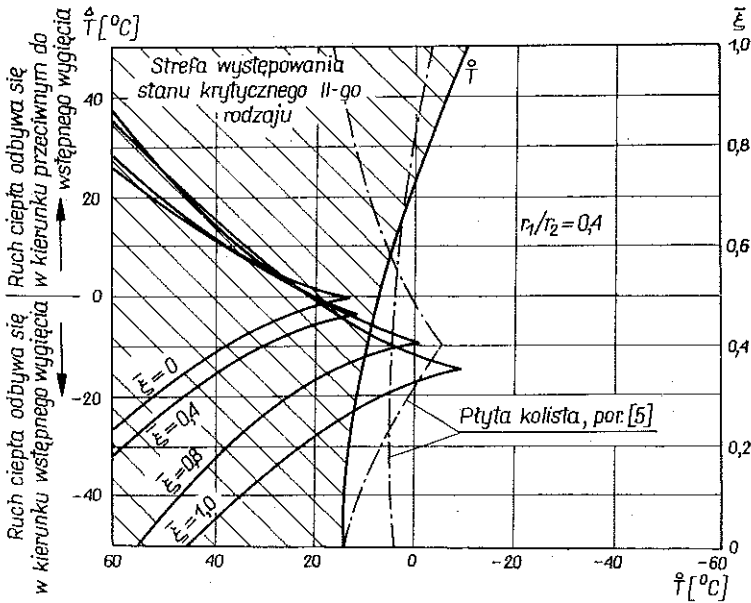
$$\theta_{kr} = 1,690 - 2,870\bar{\xi}^2,$$



Rys. 1. Wykresy zależności T_{kr}^{Δ} i T_{kr}° od $\bar{\xi}$ w stanie krytycznym pierwszego rodzaju



Rys. 2. Wykresy zależności T_{kr}^{Δ} , T_{kr}° i $\bar{\xi}$ w stanie krytycznym drugiego rodzaju



Rys. 3. Wykresy zależności T_{kr}^A , T_{kr}^0 i $\bar{\xi}$ w stanie krytycznym drugiego rodzaju

a dla stanu krytycznego drugiego rodzaju

$$\vartheta_{kr} = -1,781\bar{\xi}^2 \mp 6,07p\sqrt{-p}.$$

Na rys. 1, 2 i 3 przedstawiono wykreślnie zależności parametrów krytycznych od wygięcia początkowego, uzyskane dla płyty stalowej, gdy $\delta/r_2 = 0,01$ i $r_1/r_2 = 0,1$ oraz $0,4$.

Przedstawiony przykład rozwiązania dotyczył tylko zagadnienia stateczności w ramach tzw. teorii skrępowanych obrotów, tj. dla $\gamma_p = 0$. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniami dla nieperforowanej płyty kolistej przedstawionej w pracy [5]. Linia ciągłą wykreślono parametry krytyczne dla płyt perforowanych, a przerywaną dla płyt kolistych pełnych. Analiza wpływu dodatkowych, lokalnych obrotów na stany krytyczne płyt perforowanych oraz odpowiednie przykłady liczbowe zostaną podane osobno.

Literatura cytowana w tekście

1. CZ. WOŹNIAK, *Bending and stability of plates with lattice structure*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966).
2. CZ. WOŹNIAK, *Load-carrying structures of the dense lattice type*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966).
3. A. C. ВОЛЬМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1953.
4. E. O. WATERS, *Transactions ASME*; 57 (1934), 627–636.
5. CZ. WOŹNIAK, *Stany krytyczne nierównomiernie ogrzanych wstępnie wygiętych płyt kolistych*, Arch. Inż. Łąd., 3 (1963).
6. P. KLEMM, CZ. WOŹNIAK, *Perforated circular plates under large deflections*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967).

Резюме

КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ
НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

В работе обсуждается вопрос устойчивости предварительно изогнутых круглых перфорированных пластинок, перпендикулярно к которым происходит движение тепла. Задача рассматривается в рамках геометрически нелинейной, но физически линейной теории. Решение проводится энергетическим методом. Отличаются два критических состояния и определяются параметры, характеризующие вышеприведенные состояния. Дается числовой пример.

Summary

CRITICAL STATES IN NON-UNIFORMITY HEATED PERFORATED CIRCULAR PLATES

Here is presented a discussion of the stability problem of preliminarily bent circular perforated plates, perpendicular to which the motion of heat takes place. The problem is considered within the framework of the geometrically nonlinear, but physically linear theory.

The solution is found by means of the energy method. Two critical states are distinguished and the parameters characterizing the above states are determined.

A numerical example is given.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
KATEDRA BUDOWNICTWA OGÓLNEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 października 1969 r.
