

## ZASTOSOWANIE METODY TREFFTZA ORAZ METODY PERTURBACJI DO ZAGADNIENIŃ PRZEPŁYWÓW LAMINARNYCH I TURBULENTNYCH W KANAŁE O ZŁOŻONYM PRZEKROJU

BOHDAN K R A J E W S K I (WARSZAWA)

### Oznaczenia

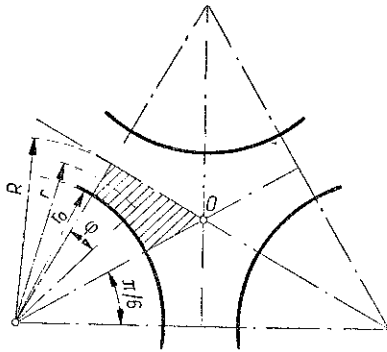
- $u$  składowa poosiowa prędkości,
- $\bar{u}$  składowa prędkości średniej w przekroju,
- $T$  temperatura lokalna,
- $T_0$  temperatura w środku przekroju (punkt  $O$  na rys. 1),
- $\varphi$  współrzędna kątowa,
- $r$  współrzędna promieniowa,
- $z$  współrzędna osiowa,
- $r_0$  promień zewnętrzny kanału,
- $R$  promień podziału,
- $q_0$  źródła ciepła,
- $q_c$  strumień cieplny na brzegu  $r_0$ ,
- $\kappa = R/r_0$  parametr geometryczny,
- $\nu_0$  lepkość kinematyczna molekularna,
- $\nu_T$  lepkość kinematyczna turbulentna,
- $\partial p/\partial z$  składowa gradientu ciśnienia w kierunku poosiowym,
- $\partial T/\partial z$  składowa gradientu temperatury w kierunku poosiowym,
- $\lambda_0$  przewodność molekularna,
- $\lambda_T$  przewodność turbulentna,
- $Pr = \mu c_p/\lambda$ , liczba Prandtla.

### 1. Wstęp

Zagadnienie turbulentnego przepływu chłodziwa oraz turbulentnego przepływu ciepła w chłodziwie omywającym pęczek rur było przedmiotem wielu rozważań, przy czym ze względu na konfigurację geometryczną i złożoność zagadnienia proponowano różne metody w celu otrzymania poprawnego rozwiązania. Prace nad tym zagadnieniem prowadzone były przez SPARROWA, LOEFFLERA, HUBBARDA, DWYERA oraz NIJSINGA, GARGANTINIEGO, EIFLERA [1 - 4]. Niezależnie od prac tych autorów należy wyróżnić prace SUBBOTINA i AXFORDA, jak również prace SZŁYKOWA, CAREWSKIEGO-DJAKINA, będące rozwinięciem idei BULEJEWY.

Ostatnie z wymienionych prac dotyczą zagadnienia rozmywania współczynnika turbulentnej lepkości w przypadku przekrojów jednopójnych o złożonym kształcie, przy czym wykorzystuje się dane eksperymentalne, zdobyte na przekrojach kołowych.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie toku obliczeniowego, umożliwiającego wyznaczenie pola temperatury w kanale prostoosiowym o przekroju złożonym (rys. 1) przy założeniu burzliwej przewodności w czynniku przepływającym.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny rozważanego kanału

Metoda postępowania w tej pracy jest ogólniejsza od aktualnie znanych opracowań tego tematu.

Do opisu zagadnienia wykorzystano istniejący model matematyczny. Model ten umożliwia (z racji założenia dotyczącego stałości parametrów fizycznych takich, jak np. gęstość, ciepło właściwe itp.) rozdzielnie układu równań, opisujących pole prędkości turbulentnej, od układu równań, opisujących pole temperatury. Dzięki takiemu podejściu możliwe jest wyznaczenie rozkładu lepkości turbulentnej w rozważanym przekroju przez wykorzystanie kon-

cepcji innych autorów (np. [5 i 7]). Wyznaczenie tej funkcji dzięki zastosowaniu transformacji całkowej nie przedstawia żadnej trudności.

Wyznaczona funkcja rozkładu turbulentnej lepkości wykorzystana jest następnie do obliczenia pola temperatury, przy czym do obliczeń zastosowano metodę perturbacji.

## 2. Równania wyjściowe turbulentnego przepływu chłodziwa i ciepła

**2.1. Turbulentne pole prędkości.** Rozważania zawarte w tej części pracy dotyczyć będą wyznaczenia funkcji  $v_T(r, \varphi)/v_0$ . Jak wiadomo, wielu badaczy zajmowało się wyznaczeniem tej funkcji zakładając, że istnieje w przypadku regularnego konturu przekroju pewien ortogonalny układ współrzędnych, przekształcający badany kontur w okrąg. Wykorzystując zbadane zależności dla rur okrągłych można wyznaczyć w ten sposób pole prędkości dla turbulentnego przepływu. Po zastosowaniu przekształcenia odwrotnego można otrzymać poszukiwane pole prędkości dla kanału o danym przekroju. Opisany bieg obliczeń przeprowadzony jest przy założeniu, że zależność między prędkością bezwymiarową a turbulentną lepkością ma charakter uniwersalny i może być stosowana również do przekrojów o skomplikowanych kształtach.

Korzystając z tego założenia zastosowano transformację, która sprowadza równanie opisujące przepływ turbulentny do postaci identycznej z równaniem opisującym przepływ laminarny.

Opis matematyczny przepływu turbulentnego można przedstawić za pomocą następującego równania:

$$(2.1) \quad \operatorname{div} \left[ \left( 1 + \frac{v_T}{v_0} \right) \operatorname{grad} \left( \frac{u}{\bar{u}} \right) \right] = \frac{1}{v_0 \rho \bar{u}} \frac{\partial p}{\partial z}$$

z warunkiem brzegowym

$$(2.2) \quad \left[ \frac{u}{\bar{u}} \right]_r = 0.$$

Z poprzednich wywodów wynika, że

$$(2.3) \quad \frac{v_T}{v_0} = \frac{v_T}{v_0} \left( \frac{u}{\bar{u}} \right).$$

Po wprowadzeniu nowej funkcji określonej przez transformację całkową

$$(2.4) \quad W = \int_0^{u/\bar{u}} \left[ 1 + \frac{v_T}{v_0}(\vartheta) \right] d\vartheta$$

a następnie po podstawieniu do równania (2.1) otrzymamy

$$(2.5) \quad \text{div}(\text{grad } W) = \frac{1}{v_0 \rho \bar{u}} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Jak wiadomo, jest to równanie liniowe, opisujące przepływ laminarny.

Dla przekroju przedstawionego na rys. 1 rozwiązanie równania (2.5) przyjmie postać

$$(2.6) \quad \bar{W} = \frac{W}{\alpha r_0^2} = \kappa^2 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln(\xi) + \frac{1}{4} (1 - \xi^2) + \sum_{v=1}^p D_v (\xi^{6v} - \bar{\xi}^{6v}) \cos v\tau,$$

gdzie

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v_0 \rho \bar{u}} \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}, \quad \tau \stackrel{\text{def}}{=} 6\varphi.$$

Ponieważ znana jest zależność

$$(2.7) \quad \frac{v_T}{v_0} \left( \frac{u}{\bar{u}} \right) = \sum_1^n a_i \left( \frac{u}{\bar{u}} \right)^i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

to można również na podstawie równania (2.3) otrzymać po pewnych przekształceniach zależność

$$(2.8) \quad \frac{v_T}{v_0}(W) = \sum_1^n b_i w^i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Dysponując rozwiązaniem  $W(r, \varphi)$  znamy więc funkcję  $v_T(\xi, \varphi)/v_0$ . Funkcję tę w dalszych rozważaniach traktować będziemy jako znaną.

**2.2. Pole temperatur.** Pole temperatury przy założeniu turbulentnego przepływu ciepła wyznacza się wykorzystując zależność  $v_T(\xi, \varphi)/v_0$ , przy czym jak wiadomo zachodzi związek

$$(2.9) \quad \frac{\lambda_T}{\lambda_0}(\xi, \varphi) = \text{Pr} \frac{v_T}{v_0}(\xi, \varphi).$$

Równanie energii ze względu na kształt geometryczny kanału przedstawiono we współrzędnych cylindrycznych:

$$(2.10) \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \left( 1 + \text{Pr} \frac{v_T}{v_0} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\xi^2 \partial \varphi} \left[ \left( 1 + \text{Pr} \frac{v_T}{v_0} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right] = \frac{S_1}{S_2} \frac{u}{\bar{u}}.$$

Warunki brzegowe przyporządkowane równaniu (2.10) są następujące:

$$(2.11) \quad \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \right]_{\xi=1} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \theta}{\partial n} \right]_{\xi = \frac{\kappa}{\cos \varphi}} = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} = \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right]_{\varphi = \frac{\pi}{6}} = 0,$$

przy czym poszczególne symbole mają następujące znaczenie:

$$\theta = \frac{\lambda_0 (T - T_0)}{2 \bar{q}_c r_0},$$

gdzie  $T_0$  jest temperaturą w środku kanału oraz

$$\bar{q}_c = \frac{q_r r_0}{2}, \quad S_1 = \frac{r_0^2 \pi}{12}, \quad S_2 = \frac{r_0^2}{12} (2\kappa^2 \sqrt{3} - \pi), \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{(2\kappa^2 \sqrt{3} - \pi)}.$$

Dalszy tok rozważań przeprowadzimy posługując się metodą perturbacji. W metodzie perturbacji poszukuje się rozwiązania w postaci

$$(2.12) \quad \tilde{\theta}(r, \varphi) = \sum_{n=0}^p \varepsilon^n \theta_n,$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza parametr perturbacyjny, który przyjmuje wartość  $\varepsilon=0$  lub  $\varepsilon=1$ .

W przypadku gdy parametr  $\varepsilon=0$ , otrzymujemy wyrażenie na  $\theta_0$ , będące rozwiązaniem uproszczonego w pewien sposób równania wyjściowego (2.10), natomiast dla  $\varepsilon=1$  powinniśmy otrzymać przepis na tok postępowania, umożliwiający otrzymanie równania (2.10) bez uproszczeń.

Równanie (2.10) można po wprowadzeniu parametru perturbacyjnego przedstawić również w postaci następującej:

$$(2.13) \quad \text{div} [(\mu_0 + \varepsilon \text{Pr} \mu_1) \text{grad} \theta] = \frac{S_1}{S_2} \frac{u}{\bar{u}}$$

z dołączonymi warunkami brzegowymi (2.11).

Wielkości  $\mu_0$  i  $\mu_1$ , które pojawiły się w równaniu (2.13), są zdefiniowane w następujący sposób:

$$(2.14) \quad \mu_0 = 1 + \frac{12 \text{Pr}}{(2\kappa^2 \sqrt{3} - \pi)} \int_1^{\frac{\kappa}{\cos \varphi}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{v_T}{v_0}(\xi, \varphi) \xi d\xi \right] d\varphi$$

oraz

$$(2.15) \quad \mu_1 = \frac{v_T}{v_0}(\xi, \varphi) - \frac{12}{(2\kappa^2 \sqrt{3} - \pi)} \int_0^{\frac{\kappa}{\cos \varphi}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{v_T}{v_0}(\xi, \varphi) \xi d\xi \right] d\varphi.$$

Następnie wykorzystując postać rozwiązania określoną równaniem (2.12) oraz porządkując względem parametru  $\varepsilon$ , otrzymamy

$$(2.16) \quad \mu_0 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta_0) + \mu_0 \sum_1^p \varepsilon^n \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta_n) + \\ + \operatorname{Pr} \sum_1^p \varepsilon^n \operatorname{div}(\mu_1 \operatorname{grad} \theta_{n-1}) = \frac{S_1}{S_2} \frac{u}{\bar{u}}$$

Ponieważ rozwiązanie zagadnienia opisanego równaniem

$$(2.17) \quad \mu_0 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta_0) = \frac{S_1}{S_2} \frac{u}{\bar{u}}$$

jest znane (laminarny przepływ ciepła), to można skonstruować na podstawie równań (2.16) i (2.17) ogólną regułę na wypisywanie kolejnych równań różniczkowych, których rozwiązania składają się na określenie turbulентnego przepływu ciepła:

$$(2.18) \quad \mu_0 \sum_1^p \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta_n) + \operatorname{Pr} \sum_1^p \operatorname{div}(\mu_1 \operatorname{grad} \theta_{n-1}) = 0$$

z warunkami brzegowymi (2.11). Na tej podstawie pierwszą funkcję  $\theta_1(\xi, \varphi)$  otrzymujemy z równania

$$\mu_0 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \theta_1) + \operatorname{Pr} \operatorname{div}(\mu_1 \operatorname{grad} \theta_0) = 0.$$

### 3. Rozwiązanie równania (2.17)

Rozwiązanie równania (2.17), tj. równania

$$(3.1) \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \varphi^2} = \frac{\pi}{(2\kappa^2 \sqrt{3} - \pi) \mu_0},$$

gdzie

$$\frac{S_1}{\mu_0 S_2} = \frac{\pi}{(2\kappa^2 \sqrt{3} - \pi) \mu_0} = C,$$

przy założeniu, że  $u = \bar{u}$ , z warunkami brzegowymi

$$\left[ \frac{\partial \theta_0}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} = \left[ \frac{\partial \theta_0}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 0$$

można po zastosowaniu transformacji Fouriera przedstawić w postaci

$$(3.2) \quad \theta_0(\xi, \varphi) = \frac{1}{4} C \xi^2 + E_0 + F_0 \ln \xi + \sum_1^{\infty} (E_n \xi^{6n} + F_n \xi^{-6n}) \cos(6n\varphi).$$

Aby spełnić ten warunek brzegowy

$$\left[ \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \right]_{\xi=1} = 0$$

żądamy, żeby

$$\left[ \frac{C\xi}{2} + \frac{F_0}{\xi} + \frac{1}{2} \right]_{\xi=1} = 0;$$

stąd otrzymujemy  $F_0 = (C+1)/2$  oraz

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \xi^{6n} + F_n \xi^{-6n}) \cos(6n\varphi) \right] \right]_{\varphi=1} = 0.$$

Na tej podstawie  $E_n = F_n$ . Równanie (3.2) przyjmuje więc postać następującą:

$$(3.3) \quad \theta_0(\xi, \varphi) = E_0 + \frac{C\xi^2}{4} - \frac{(C+1)}{2} \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\xi^{6n} + \xi^{-6n}) \cos(6n\varphi).$$

Stałą  $E_0$  wyznacza się z warunku

$$\theta_0 \left( \frac{\kappa}{\cos \frac{\pi}{6}}, \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

Dalszy tok rozwiązania oparty jest na metodzie wariacyjnej Trefftza. Żądając mianowicie spełnienia ostatniego z warunków brzegowych (2.11)

$$(3.4) \quad [n \operatorname{grad} \theta_0]_{\xi = \frac{\kappa}{\cos \varphi}} \equiv \left[ \frac{\partial \theta_0}{\partial n} \right]_{\xi = \frac{\kappa}{\cos \varphi}} = 0,$$

otrzymamy z tzw. równań Trefftza liniowy układ równań, który umożliwi wyznaczenie współczynników  $E_n$ :

$$(3.5) \quad \sum_{\nu=1}^p \left[ E_{\nu} \int_0^{\pi/6} \left( \frac{\partial \theta_{0\nu}}{\partial n} \theta_{0\mu} \right) \right]_{\xi = \frac{\kappa}{\cos \varphi}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = - \int_0^{\pi/6} \left[ \left( \frac{\partial \theta_{00}}{\partial n} \theta_{\mu} \right) \right]_{\xi = \frac{\kappa}{\cos \varphi}} \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\nu, \mu = 1, 2, \dots, p,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \theta_{0\nu} = \sum_1^p E_n (\xi^{6n} + \xi^{-6n}) \cos(6n\varphi)$$

oraz

$$(3.7) \quad \theta_{00} = E_0 + \frac{C\xi^2}{4} - \frac{(C-1)}{2} \ln \xi.$$

Posługując się wzorami (3.6) i (3.7) możemy zależność (2.25) przedstawić w prostej postaci

$$(3.8) \quad \sum_{\nu=1}^p E_{\nu} A_{\nu\mu} = B_{\mu}, \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots, p,$$

przy czym wielkości  $A_{\nu\mu}$  i  $B_{\mu}$  określono za pomocą następujących wzorów:

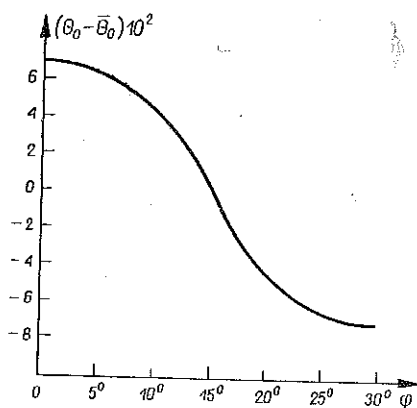
$$(3.9) \quad A_{\nu\mu} = \frac{6\nu}{\kappa} \int_0^{\pi/6} \left[ \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6(\nu+\mu)} + \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6(\nu-\mu)} - \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6(\mu-\nu)} - \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{-6(\nu+\mu)} \right] \times \\ \times \cos(6\nu\varphi) \cos(6\nu\varphi) d\varphi + \frac{6\nu}{\kappa} \int_0^{\pi/6} \left[ \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6(\nu+\mu)} + \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6(\mu-\nu)} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6(\nu-\mu)} + \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{-6(\nu+\mu)} \right] \sin(6\nu\varphi) \cos(6\mu\varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi,$$

$$\nu, \mu = 1, 2, \dots, p$$

oraz

$$(3.10) \quad B_{\mu} = \frac{C\kappa}{2} \int_0^{\pi/6} \left[ \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6\nu} + \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{-6\nu} \right] \frac{\cos(6\nu\varphi)}{\cos^2 \varphi} d\varphi - \\ - \frac{(C+1)}{2\kappa} \left[ \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{6\nu} + \left( \frac{\kappa}{\cos \varphi} \right)^{-6\nu} \right] \cos(6\nu\varphi) d\varphi.$$

W celu przedstawienia zmian, jakie występują w rozkładzie temperatury na powierzchni elementu paliwowego, przytoczono przykład.



Rys. 2. Rozkład temperatury względnej na powierzchni elementu paliwowego w miejscu  $\xi=1$

Na rys. 2 przedstawiono różnicę temperatury  $\theta_0 - \bar{\theta}_0$  na powierzchni elementu paliwowego dla  $\xi=1$ , przy czym  $\bar{\theta}_0$  oznacza w tym przypadku temperaturę średnią w przekroju kanału. W tym bowiem miejscu ( $\xi=1$ ) należy oczekiwać największych różnic.

## Literatura cytowana w tekście

1. E. M. SPARROW, A. L. LOEFFLER, H. A. HUBBARD, *Heat transfer to longitudinal laminar flow between cylinders*, Trans. A.S.M.E., J. Heat Transfer, **83** (1961), 415.
2. O. E. DWYER, *Analytical study of heat transfer to liquid metals flowing in-line through closely packed rod bundles*, Nucl. Sci. Eng., **25** (1966).
3. R. NUSING, T. GARGANTINI, W. EIFLER, *Analysis of fluid flow and heat transfer in a triangular array of parallel heat generating rods*, Nucl. Eng., Design, **4** (1966).
4. E. M. SPARROW, A. L. LOEFFLER, *Longitudinal laminar flow between cylinders arranged in regular arrays*, J. Am. Inst. Chem. Eng. **5** (1959), 325.
5. N. J. BULEEV, *Theoretical model of the mechanism of turbulent exchange in fluid flows*, Теплопередача, USSR, Akad. Nauk, **64** (1962).
6. R. A. AXFORD, *Two-dimensional, multiregion analysis of temperature fields in reactor tube bundles*, Nucl. Eng. Design, **6** (1967), 25-42.
7. Ю. П. Шлыкков, С. Н. Царевский-Дьякин, *Турбулентное течение и теплообмен в гладких прямолинейных каналах произвольного сечения*, Теплоэнергетика, **12** (1966).

## Резюме

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРЕФЦА И МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ  
К ВОПРОСУ ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
В КАНАЛЕ СО СЛОЖНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

В настоящей работе приводится ход расчета, позволяющего определить эпюру поля скоростей и поля температур в прямом канале со сложной геометрией поперечного сечения в условиях турбулентного течения.

Для описания задачи, применено существующую математическую модель. Упомянутая математическая модель, дает возможность определить распределение турбулентной вязкости в рассматриваемом сечении. Решение, интересующей нас задачи получено путем применения интегральных преобразований. Применение интегральных преобразований, создало возможность получения частных решений, которые затем были использованы для собственного решения, применяя, соответственно, метод Трефца и метод возмущений.

## Summary

**APPLICATION OF THE TREFFTZ METHOD AND THE PERTURBATION METHOD  
TO THE PROBLEMS OF LAMINAR AND TURBULENT FLOWS  
IN A CANAL OF COMPOSITE CROSS SECTION**

In this paper the calculations procedure is presented, allowing to determine the field of velocities and the field of temperatures in a recti-axial canal having a composite cross-section, with the assumption of turbulent flow.

To describe the problem there was utilized an existing mathematical model. The mathematical model mentioned enables to determine the distribution of turbulent viscosity in the cross-section under consideration. Application of the integral transformations allowed to achieve particular solutions, which have been subsequently utilized for the proper solution, using accordingly the Trefftz method and the perturbation method.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 stycznia 1970 r.*