

METODY WARIACYJNE W TEORII SZTYWNO-PLASTYCZNYCH POWŁOK CYLINDRYCZNYCH*

P. P. MOSOŁOW, W. P. MIASNIKOW (MOSKWA)

Problem przejścia powłok w stan plastyczny przy zginaniu cylindrycznym jest jednym z prostszych zadań teorii sztywno-plastycznych powłok.

W niniejszej pracy problem ten został postawiony i rozwiązany opierając się na metodach wariacyjnych opracowanych wcześniej przez autorów [1-5]. Pokazano (p. 1), że w ogólnym sformułowaniu trójwymiarowego problemu dla dowolnych ośrodków sztywno-plastycznych obciążenie graniczne jest określone przez idealnie-plastyczną część funkcji dysypacji ośrodka.

Następnie wykazano (p. 2-5), że klasyczna teoria powłok (idealnych), oparta na założeniu pominięcia naprężeń stycznych w materiale powłoki, jest asymptotycznie ścisłą teorią dla zagadnień rozciągania i zginania przy grubości powłoki dążącej do zera.

Przedstawione zostały oceny odchyień asymptotycznych wartości obciążeń granicznych, otrzymanych przy małej grubości powłoki, od obciążeń granicznych dla powłok idealnych, otrzymanych przy jednoczesnym rozciąganiu i zginaniu.

Okazuje się, że wszystkie wyniki są poprawne również w przypadku powłok krzywoliniowych.

Podane zostały (p. 6-8) ogólne wzory dla określenia obciążeń granicznych zarówno dla zagadnień statycznie określonych jak i statycznie nieokreślonych.

Przedstawione zostały oceny odchylenia obciążeń granicznych dla powłoki o skończonej grubości od obciążeń granicznych dla powłoki idealnej, przy czym pokazano związek między tymi oszacowaniami i charakterem rozkładu obciążeń (p. 9).

Rozpatrzone zostały jakościowe własności niszcącego pola prędkości (tzn. pola prędkości odpowiadającego obciążeniu granicznemu) przy założeniu, że pola te spełniają hipotezę Kirchhoffa (p. 10). W szczególności rozpatrzono problem tworzenia się szyjki przy niszczeniu i analogię zasady Saint-Venanta.

1. Zasada wariacyjna

Problem określenia pola prędkości dla materiału sztywno-lepko-plastycznego przy danych obciążeniach zewnętrznych można traktować [1] jako zagadnienie znalezienia takiego pola, które minimalizuje różnicę między wielkością pełnej energii dysypacji w całej objętości materiału i pracą sił zewnętrznych:

* Z języka rosyjskiego tłumaczył J. BEJDA.

$$(1.1) \quad I(\mathbf{u}) = \int_{\omega} D(\mathbf{u}) d\omega - \int_{\omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) d\omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma,$$

gdzie \mathbf{u} jest polem prędkości plastycznego płynięcia, $D(\mathbf{u})$ funkcją dysypacji, \mathbf{F} , \mathbf{T} oznaczają pola zewnętrznych sił masowych i powierzchniowych, ω jest objętością zajmowaną przez ośrodek, a Γ polem powierzchni ograniczającej objętość ω .

Funkcja dysypacji dla ośrodka sztywno-lepko-plastycznego może być przedstawiona w postaci

$$(1.2) \quad D = D_1 + D_2,$$

gdzie D_1 jest funkcją jednorodności pierwszego stopnia ze względu na pole \mathbf{u} , a D_2 posiada następującą własność:

$$(1.3) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D_2(\lambda \mathbf{u})}{\lambda} = 0$$

dla dowolnego pola \mathbf{u} , przy czym D_1 i D_2 są funkcjami nieujemnymi.

Minimum funkcjonału $I(\mathbf{u})$ powinno być osiągnięte dla pewnej klasy pól prędkości dopuszczalnych kinematycznie, spełniających warunek nieściśliwości

$$(1.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

oraz inne ograniczenia wynikające z postawienia konkretnego problemu brzegowego. Będziemy zakładać, że rozważane pole prędkości spełnia następujący warunek. Jeśli pole \mathbf{u} należy do klasy pól dopuszczalnych, to pole $\lambda \mathbf{u}$ przy $\lambda \geq 0$ również należy do tej klasy.

Zauważmy, że pole zerowe jest kinematycznie dopuszczalne.

Wprowadźmy pojęcie problemu postawionego poprawnie. Mianowicie problem jest postawiony poprawnie, jeśli dla dowolnego pola prędkości z klasy pól kinematycznie dopuszczalnych

$$(1.5) \quad -C \leq I(\mathbf{u}),$$

gdzie C jest pewną stałą rzeczywistą, zależną od konkretnego problemu brzegowego, lecz niezależną od wyboru takiego pola z klasy pól kinematycznie dopuszczalnych.

W wielu konkretnych zagadnieniach warunek poprawności stanowi warunek na pola sił zewnętrznych.

Na przykład niech wśród pól kinematycznie dopuszczalnych znajdują się pola odpowiadające ruchowi ośrodka jako ciała sztywnego lub układu ciał sztywnych. Z definicji $D(\mathbf{u})$ dla takich pól $D(\mathbf{u}) \equiv 0$, a funkcjonał (1.1) przyjmuje postać

$$(1.6) \quad I(\mathbf{u}) = - \int_{\omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) d\omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma.$$

Warunek poprawności sprowadza się tu do nierówności

$$(1.7) \quad \int_{\omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) d\omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma \leq 0.$$

Jeśli pole \mathbf{u} oraz pola $\lambda\mathbf{u}$, gdzie $-\infty < \lambda < \infty$, należą do klasy pól kinematycznie dopuszczalnych, to warunek (1.7) przechodzi w równość.

Można łatwo wykazać, że warunek (1.7) przedstawia w statyce analitycznej zasadę prac wirtualnych. Z nierówności (1.7) można otrzymać równania więzów nałożonych na układ oraz warunki konieczne dla jego równowagi.

W dalszym ciągu będziemy przyjmować, że warunek (1.5) jest zawsze spełniony.

Będziemy mówić, że układ przy danym obciążeniu zewnętrznym znajduje się w stanie sztywnym, jeśli wartości (1.1) dla dowolnego pola kinematycznie dopuszczalnego są nieujemne. Jeśli natomiast istnieje chociaż jedno pole kinematycznie dopuszczalne, dla którego (1.1) przyjmuje wartość ujemną, będziemy mówić, że w układzie zachodzi nieograniczone płynięcie plastyczne.

Układ obciążeń (\mathbf{F}, \mathbf{T}) nazywa się granicznym, jeśli przy tych obciążeniach układ pozostaje sztywny i istnieje chociaż jedno pole kinematycznie dopuszczalne, różne od ruchu ciała sztywnego, przy którym

$$(1.8) \quad I_1(\mathbf{u}) = \int_{\omega} D_1(\mathbf{u}) d\omega - \int_{\omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) d\omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) d\Gamma = 0.$$

Zwróćmy uwagę na pewne charakterystyczne własności obciążenia granicznego. Niech $D^{(i)} = D_1^{(i)} + D_2^{(i)}$ ($i=1, 2$) będą funkcjami dyspacji dla dwóch różnych ośrodków sztywno-lepko-plastycznych, przy czym $D_1^{(1)} = D_1^{(2)}$. Wtedy

$$(1.9) \quad I^{(i)}(\mathbf{u}) = \int_{\omega} D_2^{(i)}(\mathbf{u}) d\omega + I_1(\mathbf{u}) \quad (i=1, 2).$$

Jeśli (\mathbf{F}, \mathbf{T}) jest obciążeniem granicznym dla jednego z ośrodków, to jest obciążeniem granicznym i dla drugiego. W celu udowodnienia tego stwierdzenia wystarczy pokazać, że jeśli (\mathbf{F}, \mathbf{T}) jest obciążeniem granicznym, na przykład pierwszego ośrodka, to $I^{(2)}(\mathbf{u}) \geq 0$ dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości.

Wykażemy najpierw, że dla wszystkich pól kinematycznie dopuszczalnych $I_1(\mathbf{u}_0) \geq 0$. Przypuśćmy, że dla pewnego pola \mathbf{u}_0 $I_1(\mathbf{u}_0) < 0$. Rozpatrzmy pola $\lambda\mathbf{u}_0$ ($\lambda > 0$). Na mocy (1.3) dla dostatecznie małej wartości λ zachodzi

$$(1.10) \quad \int_{\omega} D_2^{(1)}(\lambda\mathbf{u}_0) d\omega + I_1(\lambda\mathbf{u}_0) < 0.$$

Nierówność (1.10) przeczy założeniu, że (\mathbf{F}, \mathbf{T}) jest obciążeniem granicznym dla pierwszego ośrodka. Stąd $I_1(\mathbf{u}) \geq 0$ i $I^{(2)}(\mathbf{u}) \geq 0$ dla wszystkich pól prędkości kinematycznie dopuszczalnych.

Zatem dla określenia obciążeń granicznych wystarczy ograniczyć się do zbadania funkcjonau $I_1(\mathbf{u})$. Dlatego też w dalszej części pracy będziemy przyjmować, że $D_2(\mathbf{u}) = 0$. Modele takie odpowiadają ciałom idealnie plastycznym.

Wykażemy jeszcze jedną własność obciążenia granicznego. Mianowicie, jeśli (\mathbf{F}, \mathbf{T}) jest obciążeniem granicznym, to obciążenie $(k\mathbf{F}, k\mathbf{T})$ przy $k > 1$ prowadzi do problemu postawionego niepoprawnie.

Rzeczywiście, niech \mathbf{u}_0 będzie polem kinematycznie dopuszczalnym, dla którego

$$\int_{\omega} D_1(\mathbf{u}_0) d\omega = \int_{\omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) d\omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_0) d\Gamma > 0.$$

Wówczas

$$\int_{\omega} D_1(\lambda \mathbf{u}_0) d\omega - \int_{\omega} (k\mathbf{F} \cdot \lambda \mathbf{u}_0) d\omega - \int_{\Gamma} (k\mathbf{T} \cdot \lambda \mathbf{u}_0) d\Gamma = \\ = -\lambda(k-1) \left[\int_{\omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) d\omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_0) d\Gamma \right] \rightarrow -\infty,$$

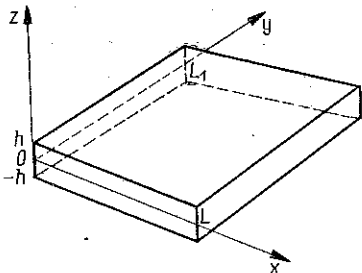
przy $\lambda \rightarrow \infty$, co przeczy warunkowi poprawności (1.5).

Poczynione wyżej uwagi pozwalają lepiej zrozumieć warunek (1.5), który w istocie rzeczy tworzy wraz z nałożonymi na układ ograniczeniami kinematycznymi klasę pól sił dopuszczalnych.

Przedstawione integralne sformułowanie problemu jest ściśle związane z jego analizą metodami lokalnymi. Rzeczywiście, w obszarze różniczkowalności funkcjonału $I(\mathbf{u})$ jego równania Eulera pokrywają się z różniczkowymi równaniami ruchu rozważanego ośrodka. Przy korzystaniu z metod lokalnych istnienie sztywnych stref narzuca konieczność dostarczenia dodatkowych informacji o zachowaniu się ośrodka w tych strefach, w szczególności badania przedłużenia w te strefy pól naprężeń, co związane jest z osobliwościami, z jakimi spotykamy się przy rozwiązywaniu zagadnień statycznie nieokreślonych.

Przy globalnym sformułowaniu problemu nie ma potrzeby różnić zagadnień statycznie określonych i statycznie nieokreślonych, przy tym warunki przedłużania pól naprężeń w strefy sztywne prowadzą do warunków geometrycznych na ich konfigurację [2].

Z tego punktu widzenia podejście wariacyjne jest nieco prostsze niż podejście różniczkowe, bowiem nie zakłada się *a priori* podziału objętości wypełnionej ośrodkiem na strefy sztywne i plastyczne, chociaż obydwa te podejścia prowadzą do takich samych rezultatów.



Rys. 1

2. Sformułowanie problemu

Podstawowym problemem teorii równowagi granicznej ośrodka idealnie plastycznego jest znalezienie obciążeń granicznych dla różnych konkretnych przypadków wynikających z dodatkowych ograniczeń na pole prędkości.

Rozpatrzmy warstwę przedstawioną na rys. 1. Będziemy zakładać, że $L_1 \gg L$. Oznaczmy przez U, V, W rzuty pola prędkości na osie x, y, z . Z warunku, że działające na warstwę obciążenia nie zależą od y oraz że warunki zamocowania dane w postaci ograniczeń kinematycznych na składowe U i W również nie zależą od y , otrzymujemy $V=0$, przy czym składowe U, W nie zależą od y :

$$(2.1) \quad U=U(x, z), \quad W=W(x, z), \quad V \equiv 0.$$

Z (2.1) i (1.4) wynika, że pierwszy i trzeci niezmiennik tensora prędkości odkształcenia jest równy zeru. Zatem

$$(2.2) \quad D_1 = D_1(I_2),$$

gdzie I_2 jest drugim niezmiennikiem tensora prędkości odkształcenia

$$(2.3) \quad I_2 = 2(U'_x)^2 + 2(W'_z)^2 + (U'_z + W'_x)^2.$$

Ponieważ funkcja D_1 zależy tylko od I_2 i powinna być funkcją jednorodności pierwszego stopnia ze względu na pole prędkości, to

$$(2.4) \quad D_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \sqrt{2(U'_x)^2 + 2(W'_z)^2 + (U'_z + W'_x)^2},$$

gdzie τ_0 oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu.

Postać funkcji dysypacji (2.4) wskazuje, że problem deformacji warstwy sprowadza się do zagadnienia płaskiego dla materiału idealnie plastycznego.

Funkcjonał $I_1(\mathbf{u})$ w danym przypadku ma postać

$$(2.5) \quad I_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-h}^h \sqrt{2(U'_x)^2 + 2(W'_z)^2 + (U'_z + W'_x)^2} dx dz - \\ - \int_0^L \int_{-h}^h F_x(x, z) U(x, z) dx dz - \int_0^L \int_{-h}^h F_z(x, z) W(x, z) dx dz - \\ - \int_0^L [T_x^+(x) U(x, h) + T_x^-(x) U(x, -h)] dx - \int_0^L [T_z^+(x) W(x, h) + T_z^-(x) W(x, -h)] dx.$$

Załóżmy teraz, że na pole sił nałożone są następujące ograniczenia:

$$(2.6) \quad F_x = F_x(x), \quad T_x^+ = T_x^- = 0.$$

Z wyrażenia (2.5) łatwo zauważyć, że przy zmniejszaniu się h wielkość obciążenia granicznego przy czystym zginaniu ($F_x \equiv 0$) dąży do zera.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(2.7) \quad F_z = \frac{h}{L} f_z, \quad F_x = f_x, \quad T_z^\pm = \frac{h^2}{L^2} t_z^\pm, \quad z = \frac{h}{L} \zeta, \quad U = u, \quad W = \frac{L}{h} w.$$

Funkcjonał (2.5) w nowych zmiennych wyraża się następująco:

$$(2.8) \quad \frac{L}{h} I_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{2(u'_x)^2 + 2 \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L f_x(x) u(x, \zeta) dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L f_z(x, \zeta) w(x, \zeta) dx d\zeta - \\ - \int_0^L [t_z^+(x) w(x, L) + t_z^-(x) w(x, -L)] dx.$$

Warunek nieściśliwości w nowych zmiennych ma postać

$$(2.9) \quad u'_x + \frac{L^2}{h^2} w'_\zeta = 0.$$

Oznaczmy przez k_h liczbę dodatnią taką, że $k_h f_x, k_h f_z, k_h t_z^\pm$ tworzą układ obciążeń granicznych dla funkcjonału (2.8). Wprowadźmy funkcjonał $\Phi(\mathbf{u})$

$$(2.10) \quad \Phi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{2(u'_x)^2 + 2 \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L f_x(x) u(x, \zeta) dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) w(x, \zeta) dx d\zeta,$$

gdzie

$$g_z(x) = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^L f_z(x, \zeta) d\zeta + t_z^+(x) + t_z^-(x) \right].$$

Niech m_h będzie liczbą dodatnią taką, że układ obciążeń $m_h f_x, m_h g_z$ jest układem granicznym dla funkcjonału $\Phi(\mathbf{u})$. Wykażemy, że

$$(2.11) \quad m_h - k_h \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Innymi słowy trzeba wykazać, że dla dowolnej liczby dodatniej ε przy obciążeniach $(k_h - \varepsilon) f_x, (k_h - \varepsilon) g_z$ funkcjonał $\Phi(\mathbf{u})$ jest nieujemny dla wszystkich dostatecznie małych wartości h . I odwrotnie, dla układu obciążeń $(k_h + \varepsilon) f_x, (k_h + \varepsilon) g_z$ i dla dostatecznie małej liczby h istnieje pole \mathbf{u} , dla którego $\Phi(\mathbf{u}) < 0$. Udowodnimy najpierw pierwszą część twierdzenia:

$$(2.12) \quad 0 \leq \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{2(u'_x)^2 + 2 \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (w'_x + u'_\zeta)^2} dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2} \right) f_x u dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2} \right) f_z w dx d\zeta - \\ - \int_0^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2} \right) [t_z^+ n(x, L) + t_z^- w(x, -L)] dx \leq \\ \leq \tau_0 \left(1 + \frac{h}{L} \right) \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{2(u'_x)^2 + 2 \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (w'_x + u'_\zeta)^2} dx d\zeta - \\ - \tau_0 \sqrt{2} \frac{L}{h} \int_0^L \int_{-L}^L \left| \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right| dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2} \right) f_x u dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2} \right) g_z(x) w(x, \zeta) dx d\zeta + A,$$

gdzie

$$A = \frac{1}{2L} \int_0^L \int_{-L}^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2} \right) w(x, \zeta) \int_{-L}^L f_z(x, \lambda) d\lambda dx d\zeta -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^L \int_{-L}^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2}\right) f_z w \, dx \, d\zeta + \int_{-L}^L \int_0^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2}\right) w(x, \zeta) \frac{1}{2L} [t_z^+(x) + t_z^-(x)] \, dx \, d\zeta - \\
 & - \int_0^L \left(k_h - \frac{\varepsilon}{2}\right) [t_z^+ w(x, L) + t_z^- w(x, -L)] \, dx.
 \end{aligned}$$

Zatem przy dostatecznie małym h

$$(2.13) \quad \tau_0 \sqrt{2} \frac{L}{h} \int_0^L \int_{-L}^L |w'_\zeta| \, dx \, d\zeta \geq A,$$

a nierówność (2.12) przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 (2.14) \quad 0 \leq \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{2(u'_x)^2 + 2 \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (w'_x + u'_\zeta)^2} \, dx \, d\zeta - \\
 - \int_0^L \int_{-L}^L \frac{\left(k_h - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{1 + \frac{L}{h}} f_x u \, dx \, d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L \frac{\left(k_h - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{1 + \frac{L}{h}} g_z(x) w(x, \zeta) \, dx \, d\zeta.
 \end{aligned}$$

Ale przy dostatecznie małym h

$$\frac{k_h - \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{L}{h}} > k_h - \varepsilon.$$

Wynika stąd, że przy obciążeniach $(k_h - \varepsilon) f_x$, $(k_h - \varepsilon) g_z$ funkcjonal $\Phi(\mathbf{u})$ jest nieujemny.

Dowód drugiej części twierdzenia. Rozpatrzmy układ obciążeń $(k_h + \varepsilon/2) f_x$, $(k_h + \varepsilon/2) f_z$, $(k_h + \varepsilon/2) t_z^\pm$. Istnieje zatem pole \mathbf{u}_0 , dla którego $I_1(\mathbf{u}_0) < 0$. Przeprowadzając analogiczne oszacowania do (2.12) i (2.13) dochodzimy do nierówności

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad 0 > \tau_0 \int_{-L}^L \int_{-L}^L \sqrt{2(u'_x)^2 + 2 \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (w'_x + u'_\zeta)^2} \, dx \, d\zeta - \\
 - \int_0^L \int_{-L}^L \frac{k_h + \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{L}{h}} f_x u \, dx \, d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L \frac{k_h + \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{L}{h}} w(x, \zeta) g_z \, dx \, d\zeta.
 \end{aligned}$$

Ponieważ przy dostatecznie małym h

$$\frac{k_h + \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{L}{h}} < k_h + \varepsilon,$$

to dla układu obciążeń $(k_h + \varepsilon) f_x, (k_h + \varepsilon) g_z$ otrzymamy $\Phi(\mathbf{u}_0) < 0$. Zatem przy obliczaniu obciążeń granicznych, gdy $h \rightarrow 0$, można korzystać z funkcjonału $\Phi(u)$. Przeprowadzona analiza wykazuje, że dla dostatecznie małych h obciążenia zewnętrzne objętościowe i powierzchniowe $f_z(x, z), t_z^\pm(x)$ można zamienić pewnym efektywnym polem sił $g_z(x)$ nie zmieniającym się wzdłuż grubości warstwy.

3. Asymptotyczne oceny obciążeń granicznych z góry

W celu oszacowania wielkości obciążeń granicznych z góry będziemy wykorzystywać specjalną postać pól prędkości:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(x, \zeta) &= u_0(x) - \zeta u_1(x), \\ w(x, \zeta) &= w_0(x) - \zeta \frac{h^2}{L^2} \frac{du_0}{dx} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{h^2}{L^2} \frac{du_1}{dx}. \end{aligned}$$

Pola te spełniają warunek (2.9) i są zgodne z hipotezą Kirchhoffa (hipotezą płaskich przekrojów). W dalszej części pracy pola postaci (3.1) będziemy nazywać polami Kirchhoffa. Odnośnie ograniczeń kinematycznych dla problemu wyjściowego będziemy zakładać, że w przypadku pól postaci (3.1) ograniczenia te wyrażają warunki na funkcje u_0, u_1 i w_0 . Jasne jest, że obciążenia graniczne, określone na wszystkich możliwych polach kinematycznie dopuszczalnych, ogólnie biorąc, są mniejsze niż obciążenia graniczne określone na polach postaci (3.1).

Podstawiając (3.1) do (2.10) będziemy mieć

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}) &= \\ &= \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u_0' - \zeta u_1')^2 + \frac{L^2}{h^2} \left(-u_1 + w_0' - \zeta \frac{h^2}{L^2} u_0'' + \frac{\zeta^2}{2} \frac{h^2}{L^2} u_1'' \right)^2} dx d\zeta - \\ &\quad - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z w_0 dx - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L g_z u_1 dx. \end{aligned}$$

Podstawmy $u_1 = w_0'$. Wtedy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}) &= \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u_0' - \zeta w_0'')^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2 \left(u_0'' - \frac{\zeta}{2} w_0''' \right)^2} dx d\zeta - \\ &\quad - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z w_0 dx - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L g_z w_0' dx. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu dla uproszczenia będziemy zakładać, że warunki kinematyczne, nałożone na pole prędkości, posiadają charakter lokalny, tzn. w punkcie brzegowym $x=0$ na funkcję $u_0(x)$ może być nałożony warunek $u_0(0)=0$. Analogiczny warunek może być nałożony na $u_0(x)$ w punkcie $x=L$. Na funkcję $w_0(x)$ w punkcie $x=0$ mogą być nałożone (w przypadku funkcjonału (3.3)) warunki: $w_0(0)=0$ lub $w_0'(0)=0$, $w_0''(0)=0$. Analogiczne warunki są w punkcie $x=L$. Ponadto $w_0(x)$ może jeszcze

spełniać warunki $w_0(x_i)=0$, $i=1, 2, \dots, p$, $0 < x_i < x_{i+1} < L$. W przypadku funkcyjonału (3.2) warunki kinematyczne na $u_0(x)$ są takie same. W punkcie brzegowym $x=0$ warunek na $w_0(x)$ w pierwszym przypadku zostaje zachowany, w drugim zaś warunki $w_0(0)=0$, $w'_0(0)=0$ przechodzą na warunki $w_0(0)=0$, $v_1(0)=0$ (analogicznej zamiany należy dokonać w punkcie $x=L$). Pozostałe warunki kinematyczne dla funkcyjonału (3.2) są takie same jak dla funkcyjonału (3.3). Rozpatrzone wyżej warunki kinematyczne noszą nazwę więzów «przytrzymujących».

Dla funkcyjonałów (3.2) i (3.3) można również rozważać warunki kinematyczne odpowiadające więzom «uwalniającym» (jednostronnym). Przykładem takich więzów jest warunek $w_0(x) \geq 0$. Można wykazać, że zadania z więzami uwalniającymi sprowadzają się do zadań z więzami przytrzymującymi i dlatego nie będą dalej rozważane.

Zilustrujmy na przykładzie metodę sprowadzania zadań z więzami uwalniającymi do zadań z więzami przytrzymującymi.

(a) Niech pole prędkości \mathbf{u} podlega pewnym ograniczeniom kinematycznym i dodatkowo warunkowi $w_0(x_0) \geq 0$, gdzie $0 \leq x_0 \leq L$. Oprócz znalezienia obciążeń granicznych dla wspomnianych wyżej pól prędkości rozpatrzmy jeszcze dwa następujące zagadnienia:

(b) Określenie obciążeń granicznych, gdy na pole \mathbf{u} nie nakłada się żadnych ograniczeń w punkcie x_0 . Pole \mathbf{u} podlega wszystkim pozostałym ograniczeniom kinematycznym zagadnienia (a).

(c) Określenie obciążeń granicznych, gdy pole \mathbf{u} podlega ograniczeniom kinematycznym zadania (a) i dodatkowo $w_0(x_0)=0$.

Rozpatrzmy układ obciążeń (f_x, g_z) . Określmy liczby k_a, k_b i k_c tak, aby $(k_a f_x, k_a g_z)$ było obciążeniem granicznym zadania (a), $(k_b f_x, k_b g_z)$ obciążeniem granicznym zadania (b), $(k_c f_x, k_c g_z)$ obciążeniem granicznym zadania (c). Oczywiście

$$k_c \geq k_a \geq k_b.$$

Pokażemy, że k_a jest równe albo k_c albo k_b . Załóżmy, że jest przeciwnie. Niech

$$k_c > k_a > k_b.$$

Rozpatrzmy dla zadania (a) obciążenie $((k_a + \varepsilon) f_x, (k_a + \varepsilon) g_z)$ i wybierzmy ε tak, aby $k_a < k_a + \varepsilon < k_c$. Istnieje zatem takie pole \mathbf{u}_a , że $\Phi(\mathbf{u}_a) < 0$ i $w_a(x_0) > 0$. Rozpatrzmy następnie dla zadania (b) obciążenie $((k_b + \varepsilon) f_x, (k_b + \varepsilon) g_z)$. O ε załóżmy dodatkowo, że $k_b + \varepsilon < k_a$. Istnieje więc pole \mathbf{u}_b , dla którego $\Phi(\mathbf{u}_b) < 0$. Na mocy jednorodności funkcyjonału $\Phi(\mathbf{u})$ mamy $w_a(x_0) = -w_b(x_0)$. Rozpatrzmy pole $\mathbf{u}_c = 1/2(\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b)$. Spełnia ono ograniczenia kinematyczne zagadnienia (c). Przy tym dla obciążenia $((k_a + \varepsilon) f_x, (k_a + \varepsilon) g_z)$ zachodzi $\Phi(\mathbf{u}_c) < 0$, co przeczy założeniu $k_a + \varepsilon < k_c$. Przypuśćmy, że $k_c > k_b$. Rozważmy dla zagadnienia (b) układ obciążeń $((k_b + \varepsilon) f_x, (k_b + \varepsilon) g_z)$ przy $k_b + \varepsilon < k_c$. Istnieje wtedy pole \mathbf{u}_b , dla którego $\Phi(\mathbf{u}_b) < 0$. Jeśli $w_b(x_0) > 0$, to $k_a = k_b$, a gdy $w_b(x_0) < 0$, to $k_a = k_c$. W ten sposób problem (a) z więzami uwalniającymi został sprowadzony do problemu z więzami przytrzymującymi.

Rozpatrzmy teraz problem znalezienia minimum funkcyjonału (3.3) przy warunków, że funkcje u_0, w_0 spełniają wyżej wspomniane ograniczenia kinematyczne. Wyka-

żemy, że obciążenia graniczne dla funkcjonału (3.3) różnią się o wielkość rzędu h^2 od obciążeń granicznych dla funkcjonału

$$(3.4) \quad \Phi_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_0 - \zeta w''_0)^2 + \frac{L^2}{h^2} \zeta^2 \left(u''_0 - \frac{\zeta}{2} w'''_0\right)^2} dx d\zeta - \\ - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z w_0 dx.$$

Naszskicujmy dowód tego twierdzenia. Na funkcję w_0 nie nakładajmy na razie żadnych ograniczeń. Zatem, aby problem był poprawnie postawiony, funkcja $g_z(x)$ powinna być poddana ograniczeniom

$$(3.5) \quad \int_0^L g_z(x) dx = 0, \quad \int_0^L g_z(x) x dx = 0.$$

Ale wtedy

$$\int_0^L g_z(x) w'_0 dx = \int_0^L \int_x^L g_z(p) dp w''_0(x) dx,$$

a funkcjonał (3.3) może być napisany w postaci

$$\Phi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_0 - \zeta w''_0)^2 + \frac{L^2}{h^2} \zeta^2 \left(u''_0 - \frac{\zeta}{2} w'''_0\right)^2} dx d\zeta - \\ - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z w_0 dx - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L \int_x^L g_z(p) dp w''_0(x) dx.$$

Wykorzystując pomocniczą nierówność

$$(3.6) \quad \int_{-L}^L \int_0^L |\varphi(x) - \zeta \psi(x)| dx d\zeta \geq L^2 \int_0^L |\psi(x)| dx,$$

znajdujemy

$$(3.7) \quad \int_{-L}^L \int_0^L \sqrt{4(u'_0 - \zeta w''_0)^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2 \left(u''_0 - \frac{\zeta}{2} w'''_0\right)^2} dx d\zeta \geq 2L^2 \int_0^L |w''_0| dx.$$

Postępując podobnie jak w (2.12)–(2.14) oraz uwzględniając (3.7), otrzymujemy ostatecznie, że obciążenia graniczne dla funkcjonałów (3.3) i (3.4) różnią się w danym przypadku o wielkość rzędu h^2/L^2 .

Z analizy powyższej wynika, że aby zadanie na minimum funkcjonału (3.3) było sprowadzone do zadania na minimum funkcjonału (3.4), powinna być spełniona następująca zależność:

$$(3.8) \quad \int_0^L g_z w'_0 dx = \int_0^L q_z w''_0 dx.$$

W przypadku, gdy $w_0(x)$ spełnia tylko jeden warunek $w_0(a)=0$, $0 \leq a \leq L$, to żądanie spełnienia warunku poprawności znowu prowadzi do (3.5).

Jeśli funkcja $w_0(x)$ spełnia co najmniej dwa warunki, to

$$w_0' = \int_0^L G(x, s) w_0''(s) ds,$$

gdzie $G(x, s)$ jest funkcją ograniczoną, której postać zależy od nałożonych ograniczeń. A zatem zależność (3.8) jest zawsze możliwa.

Rozpatrzmy funkcjonal (3.4) oraz funkcjonal

$$(3.9) \quad \Phi_2(\mathbf{u}) = 2\tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L |u_0' - \zeta w_0''| dx d\zeta - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z w_0 dx.$$

Oznaczmy przez $k_h^{(1)}$ i $k_h^{(2)}$ liczby dodatnie takie, że $(k^{(2)} f_x, k^{(2)} g_z)$ jest obciążeniem granicznym dla (3.4), a $(k^{(2)} f_x, k^{(2)} g_z)$ obciążeniem granicznym dla (3.9). Pokażemy, że

$$(3.10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} k_h^{(1)} = k^{(2)}.$$

Dla liczb $k_h^{(1)}$ i $k_h^{(2)}$ zachodzi oczywista nierówność

$$k_h^{(1)} \geq k_h^{(2)}.$$

Przypuśćmy, że związek (3.10) nie jest spełniony. Wtedy istnieje taka liczba $\rho > 0$, że przy dostatecznie małych h

$$(3.11) \quad k_h^{(1)} > k^{(2)} + \rho.$$

Rozpatrzmy dla funkcjonu (3.9) obciążenie $(k^{(2)} + \rho/2)(f_x, g_z)$. Istnieją zatem funkcje $u_0^*(x), w_0^*(x)$ trzykrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, dla których funkcjonal (3.9) jest nieujemny. Podstawiając obciążenie $(k^{(2)} + \rho/2)(f_x, g_z)$ i pole u_0^*, w_0^* do funkcjonu (3.4) otrzymujemy, że dla dostatecznie małych h $\Phi_1(\mathbf{u}^*) < 0$. Zatem związek (3.11) nie jest spełniony, a spełniona jest równość (3.10). Udowodnione zostało więc następujące

TWIERDZENIE 1. *Nich k_h będzie liczbą dodatnią taką, że $(k_h f_x, k_h f_z, k_h t_x^{\pm})$ jest układem obciążeń granicznych dla funkcjonu (2.8). Wtedy*

$$(3.12) \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} k_h \leq k^{(2)}.$$

W dalszym ciągu pracy będziemy mówić, że funkcjonal (3.9) opisuje idealną cylindryczną powłokę.

Zauważmy, że w zagadnieniu określenia obciążeń granicznych można było rozważyć inne ograniczenia kinematyczne na pole prędkości niż rozważone w tym punkcie. Na przykład można przyjąć, że w pewnym punkcie a zamiast warunku $w_0(a)=0$ spełniony jest warunek $w(a, \zeta)=0$. Dla pól postaci (3.1) prowadzi to do żądania, aby

$$(3.13) \quad w_0(a)=0, \quad u_0'(a)=0, \quad u_1'(a)=0.$$

Jednakże te ograniczenia kinematyczne dążą asymptotycznie przy $h \rightarrow 0$ do górnych ocen obciążeń granicznych równych rozpatrzonemu wyżej ograniczeniu kinematycznym, to znaczy, jeśli pole u spełnia warunek $w_0(a) = 0$, a nie spełnia warunków (3.13), to można skonstruować nowe pole, które spełnia już warunki (3.13), a wartość funkcjonału (3.9) na tym nowym polu różni się dowolnie mało od wartości funkcjonału (3.2) na polu u .

4. Asymptotyczne wartości obciążeń granicznych dla pól Kirchhoffa

Pokażemy, że dla pól postaci (3.1) ma miejsce równość

$$(4.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} k_h = k^{(2)},$$

tzn. powłoka idealna jest granicą asymptotyczną zagadnienia płaskiego dla pól Kirchhoffa. Zauważmy, że funkcjonał (3.3) pokrywa się z funkcjonałem (3.2), jeśli na pole (3.1) nałożone jest ograniczenie $u_1(x) = w'_1(x)$. Spełniona jest zatem dla k_h nierówność (3.12). Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią, wtedy dla dostatecznie małej wartości ε otrzymujemy

$$(4.2) \quad \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_0 - \zeta u'_1)^2 + \frac{L^2}{h^2} \left(-u_1 + w'_0 - \zeta \frac{h^2}{L^2} u''_0 + \frac{\zeta^2}{2} \frac{h^2}{L^2} u''_0 \right)^2} dx d\zeta \geq \\ \geq \int_0^L \int_{-L}^L \left\{ 2(1-\varepsilon)|u'_0 - \zeta u'_1| + \frac{L}{h} \sqrt{\varepsilon} |-u_1 + w'_0| \right\} dx d\zeta.$$

Rozpatrzmy funkcjonał $\Psi(u)$

$$(4.3) \quad \Psi(u) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left\{ 2(1-\varepsilon)|u'_0 - \zeta u'_1| + \frac{L\sqrt{\varepsilon}}{h} |-u_1 + w'_0| \right\} dx d\zeta - \\ - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z w_0 dx - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L g_z u_1 dx.$$

Niech $\lambda_{h,\varepsilon}$ będzie liczbą dodatnią taką, że obciążenie $\lambda_{h,\varepsilon}(f_x, g_z)$ jest obciążeniem granicznym dla funkcjonału (4.3). Na mocy nierówności (4.2) mamy

$$(4.4) \quad k_h \geq \lambda_{h,\varepsilon}.$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy na $w_0(x)$ nie nałożone zostały żadne ograniczenia. Wtedy z warunku poprawności zadania wyjściowego mamy na funkcję $g_2(x)$ warunek (3.5), a funkcjonał (4.3) przyjmie postać

$$\Psi(u) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left\{ 2(1-\varepsilon)|u'_0 - \zeta u'_1| + \frac{L}{h} \sqrt{\varepsilon} |-u_1 + w'_0| \right\} dx d\zeta - \\ - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda w'_0(x) dx - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda u'_1(x) dx.$$

Wprowadźmy funkcjonal

$$(4.5) \quad \Psi_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left\{ 2(1-\varepsilon)|u'_0 - \zeta u'_1| + \frac{L\sqrt{\varepsilon}}{h} |-u_1 + w'_0| \right\} dx d\zeta - \\ - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda w'_0(x) dx.$$

Jeśli przez $\lambda_{h,\varepsilon}$ oznaczyć liczbę dodatnią taką, że $\lambda_{h,\varepsilon}(f_x, g_z)$ jest obciążeniem granicznym dla funkcjonau (4.5), to w sposób podobny jak poprzednio otrzymamy

$$(4.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (\lambda_{h,\varepsilon}^{(1)} - \lambda_{x,\varepsilon}) = 0.$$

Przepiszmy (4.5) w postaci

$$\Psi_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left\{ 2(1-\varepsilon)|u'_0 - \zeta u'_1| + \frac{L\sqrt{\varepsilon}}{h} |-u_1 + w'_0| \right\} dx d\zeta - \\ - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda (w'_0(x) - u_1(x)) dx - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda u_1(x) dx.$$

Rozpatrzmy funkcjonal

$$\Psi_2(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2(1-\varepsilon)|u'_0 - \zeta u'_1| dx d\zeta - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda u_1 dx.$$

Niech $\lambda_\varepsilon^{(2)}(f_x, g_z)$ będzie obciążeniem granicznym dla $\Psi_2(\mathbf{u})$. Wtedy dla dostatecznie małego h mamy $\lambda_\varepsilon^{(2)} \leq \lambda_{h,\varepsilon}^{(1)}$. Podstawiając $u_1 = \varphi'(x)$ i uwzględniając (3.5) otrzymamy, że $\lambda_\varepsilon^{(2)}(f_x, g_z)$ jest obciążeniem granicznym dla funkcjonau

$$2\tau_0(1-\varepsilon) \int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta \varphi'| dx d\zeta - 2L \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \int_0^L g_z \varphi dx.$$

Z porównania wyrażenia powyższego z wyrażeniem (3.9) wynika, że $\lambda_\varepsilon^{(2)}$ różni się od $k^{(2)}$ o wielkość rzędu ε . Ponieważ ε jest liczbą dowolnie małą, to

$$(4.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} k_h \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon^{(2)} = k^{(2)}.$$

Z nierówności (4.7) wynika, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} k_h = k^{(2)}.$$

W przypadku nałożenia na $w_0(x)$ tylko jednego ograniczenia $w_0(a) = 0$, $0 \leq a \leq L$, z warunku poprawności wynika, że funkcja $g_z(x)$ znowu powinna spełniać warunek (3.5). Ale wtedy pozostają w mocy wszystkie poprzednie rozważania.

Rozpatrzmy na zakończenie przypadek, gdy na $w_0(x)$ nałożone są co najmniej dwa ograniczenia postaci

$$w_0(0) = 0, \quad w_0(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad 0 < x_i < x_{i+1} \leq L.$$

Niech $\varphi_i(x)$ będzie nieujemną różniczkowalną funkcją spełniającą następujące warunki:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = 1, \quad i=1, \dots, p, \quad x_0=0,$$

a $\varphi_i(x) \equiv 0$, o ile x nie należy do odcinka $[x_{i-1}, x_i]$.

Podstawmy

$$v(x) = u_1(x) - \sum_{i=1}^p \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(x) dx.$$

Wtedy

$$(4.8) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x) dx = 0, \quad i=1, \dots, p.$$

Podstawiając wyrażenie na $u_1(x)$, wykorzystując po drodze $v(x)$, do (4.3) znajdujemy

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{u}) \geq & \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2(1-\varepsilon) |u'_0 - \zeta v'| dx d\zeta - 2\tau_0(1-\varepsilon)L^2 \times \\ & \times \sum_1^p \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1 dx \right| \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi'_i| dx - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda (w'_0(x) - u_1(x)) dx - \\ & - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda v(x) dx + \tau_0 \alpha(\varepsilon) \frac{L^2}{h} \int_0^L |w'_0 - u_1| dx - \\ & - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda \sum_1^p \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(z) dz dx - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L g_z v dx + \\ & + \tau_0 \alpha(\varepsilon) \frac{L^2}{h} \sum_{i=1}^p \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(x) dx \right| - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L g_z(x) \sum_1^p \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(\lambda) d\lambda dx. \end{aligned}$$

Ponieważ na mocy (4.8)

$$\int_0^L |v'| dx \geq c \int_0^L |v| dx,$$

a przy dostatecznie małym h

$$\begin{aligned} & \tau_0 \alpha(\varepsilon) \frac{L^2}{h} \int_0^L |w'_0 - u_1| dx - 2\tau_0(1-\varepsilon)L^2 \sum_1^p \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(x) dx \right| \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi'_i| dx + \\ & + \tau_0 \alpha(\varepsilon) \frac{L^2}{h} \sum_1^p \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(x) dx \right| - \frac{L^3}{3} \frac{h^2}{L^2} \int_0^L g_z(x) \sum_1^p \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(\lambda) d\lambda dx - \end{aligned}$$

$$-2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda \sum_1^p \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_1(\lambda) d\lambda dx \geq 0,$$

to otrzymujemy

$$\Psi(\mathbf{u}) \geq 2\tau_0(1-\varepsilon) \int_{-L}^L \int_0^L |u'_0 - \zeta v'| dx d\zeta - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda v(x) dx - 2L \int_0^L f_x u_0 dx.$$

Jeśli przez $\mu_\varepsilon^{(2)}$ oznaczyć taką liczbę dodatnią, że $\mu_\varepsilon^{(2)}(f_x, g_z)$ jest obciążeniem granicznym dla funkcyjonału

(4.9)

$$\Psi_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2(1-\varepsilon) |u'_0 - \zeta v'| dx d\zeta - 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda v(x) dx - 2L \int_0^L f_x u_0 dx,$$

to

$$(4.10) \quad \mu_\varepsilon^{(2)} \leq \lambda_{h,\varepsilon}.$$

Podstawiając $v = \varphi'(x)$ znajdujemy, że na mocy (4.7) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, p$. Funkcjonał (4.8) przyjmie teraz postać

$$\Psi_1(\mathbf{u}) = 2\tau_0(1-\varepsilon) \int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta \varphi''| dx d\zeta - 2L \int_0^L g_z \varphi dx - 2L \int_0^L f_x u_0 dx.$$

Porównując powyższe wyrażenie z wyrażeniem (3.9) znajdujemy, że $\mu_\varepsilon^{(2)}$ różni się od $k^{(2)}$ o wielkość rzędu ε . Ponieważ ε jest dowolnie małe, dochodzimy do (4.1).

Jeśli na funkcję $u(x)$ oprócz powyższych ograniczeń nałożyć jeszcze warunek $u_1(0) = 0$ lub $u_1(L) = 0$, to funkcja $v(x)$ będzie spełniać warunek $v(0) = 0$ lub $v(L) = 0$, co pociąga za sobą $\varphi'(0) = 0$ lub $\varphi'(L) = 0$. Analogicznie postępuje się w przypadku, gdy $u_1(0) = u_1(L) = 0$.

Rezultaty otrzymane w niniejszym rozdziale pozwalają wyciągnąć interesujący wniosek odnośnie zależności hipotezy Kirchhoffa od małości naprężeń stycznych w cienkiej powłoce. Mianowicie założenie o małości naprężeń stycznych w cienkiej powłoce wynika z zasady wariacyjnej dla pól Kirchhoffa.

Zauważmy, że naprężenia te nie są równe zeru, lecz są asymptotycznie małe przy $h \rightarrow 0$, a rząd ich wielkości określony jest związkami

$$(4.11) \quad \int_0^L |\tau_{xy}| dx = o\left(\frac{h}{L}\right), \quad \text{gdy } h \rightarrow 0.$$

Udowodnimy zależność (4.11). Unormujmy pole prędkości \mathbf{u} tak, aby

$$(4.12) \quad \tau_0 \int_{-L}^L \int_0^L \sqrt{4(u'_x)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta = 1,$$

gdzie \mathbf{u} jest polem postaci (3.1). Oznaczmy przez $k_h(f_x, g_z)$ obciążenie graniczne dla funkcyjonału (3.2). Istnieje zatem ciąg pól \mathbf{u}_h spełniających warunek (4.12) takich, że funkcyjonał (3.2) dla tych pól dąży do zera, gdy $h \rightarrow \infty$, przy czym składowe pola

u_n są funkcjami różniczkowalnymi w sposób ciągły. Niech będzie dana dowolna liczba $\varepsilon > 0$. Wybierzmy h na tyle małe, by $|k_h - k^{(2)}| < \varepsilon$. Wykorzystując (4.2) i to, że

$$(4.13) \quad 2Lk_h \int_0^L f_x u_0^n dx - 2Lk_h \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda u_1^n dx = 1 + o(h) + o(1),$$

gdzie $o(1) \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$ oraz $|o(h)/h| < c$, gdy $h \rightarrow 0$, otrzymujemy

$$(4.14) \quad \int_0^L \int_{-L}^L 2\tau_0(1-\varepsilon)|u_0^n - \zeta u_1^n| dx d\zeta + \frac{2cL^2}{h} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon} \int_0^L |-u_1^n + w_0^n| dx - \\ - \frac{k^{(2)} + \varepsilon}{1-\varepsilon} 2L \int_0^L f_x u_0^n dx - \frac{k^{(2)} + \varepsilon}{1-\varepsilon} 2L \int_0^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda u_1^n(x) dx < 0$$

przy dostatecznie małym h i dostatecznie dużym n . Ponieważ na mocy (4.12)

$$\tau_0 \int_{-L}^L \int_0^L 2|u_0^n - \zeta u_1^n| dx d\zeta \leq 1,$$

to z (4.13) i (4.14) wynika

$$1 + \frac{2cL^2}{h} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon} |u_1^n + w_0^n| dx - \frac{k^{(2)} + \varepsilon}{(1-\varepsilon)k_h} < 0$$

lub

$$(4.15) \quad \int_0^L |-u_1^n + w_0^n| dx \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} \frac{h}{L},$$

gdzie $\varepsilon \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$ i $n \rightarrow \infty$, a liczba c_1 jest wyrażona przez k^2 , L i c .

Z nierówności (4.15) wynika twierdzenie (4.11).

5. Asymptotyczne dolne oceny obciążeń granicznych

W rozdziale 4 pokazaliśmy, że obciążenia graniczne dla idealnej powłoki cylindrycznej są asymptotycznymi ocenami z góry dla powłoki cylindrycznej w ścisłym sformułowaniu. W tym rozdziale będą skonstruowane oceny asymptotyczne z dołu.

W p. 2 pokazaliśmy, że obciążenia graniczne dla funkcjonu wyjściowego (2.8) i funkcjonu (2.10) asymptotycznie pokrywają się.

Rozpatrzmy najpierw problem rozciągania, tzn. $g_z(x) \equiv 0$. Funkcjonał (2.10) w tym przypadku posiada postać

$$(5.1) \quad \Phi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u_x')^2 + \frac{L^2}{h^2} (u_\zeta' + w_x')^2} dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L f_x u(x, \zeta) dx d\zeta.$$

Kinematyczne warunki zamocowania na końcach $x=0$ i $x=L$ dane są w postaci

$$(5.2) \quad \int_{-L}^L u(0, \zeta) d\zeta = 0 \quad \text{lub} \quad \int_{-L}^L (L, \zeta) d\zeta = 0.$$

Zauważmy, że dla pól Kirchhoffa warunki (5.2) są równoważne warunkom $u_0(0)=0$ lub $u_0(L)=0$. Oznaczmy przez $u_0(x)$ następującą funkcję

$$u_0(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, \zeta) d\zeta.$$

Oczywiście zachodzi

$$\Phi(\mathbf{u}) \geq \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2|u'_x| dx d\zeta - \int_0^L f_x(x) \int_{-L}^L u(x, \zeta) d\zeta dx$$

lub

$$(5.3) \quad \Phi(\mathbf{u}) \geq \Phi^{(1)}(\mathbf{u}) = 2L \left[\tau_0 \int_0^L 2|u'_0| dx - \int_0^L f_x u_0 dx \right].$$

Z nierówności (5.3) wynika, że obciążenia graniczne dla funkcjonału $\Phi^1(\mathbf{u})$ nie przewyższają obciążeń granicznych dla funkcjonału wyjściowego $\Phi(\mathbf{u})$. Tym samym znaleziona została dolna ocena obciążeń granicznych dla funkcjonału (2.8). Napiszmy funkcjonał $\Phi_2(\mathbf{u})$ dla powłoki idealnej w przypadku rozciągania

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta w''_0| dx d\zeta - 2L \int_0^L f_x u_0 dx.$$

Zauważmy, że pola u_0, w_0 i $u_0, -w_0$ dają tę samą wartość funkcjonału $\Phi_2(\mathbf{u})$. Zatem wartość $\Phi_2(\mathbf{u})$ od połowy sumy tych pól nie przewyższa wartości $\Phi_2(\mathbf{u})$ od każdego pola z osobna. Wynika stąd, że dla znalezienia obciążeń granicznych można ograniczyć się do pól, w których $w_0(x)=0$. Wtedy funkcjonały $\Phi_2(u)$ i $\Phi^{(1)}(u)$ są sobie tożsamościowo równe. W ten sposób udowodnione zostało

TWIERDZENIE 2. *Obciążenia graniczne dla idealnej powłoki przy rozciąganiu dają ściśle asymptotyczne wartości obciążeń granicznych dla zagadnienia (5.1).*

Rozpatrzmy teraz problem zginania, tzn. przyjmijmy, że $f_x(x) \equiv 0$. W tym przypadku funkcjonał (2.10) posiada postać

$$(5.4) \quad \Phi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_x)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L g_z w(x, \zeta) dx d\zeta.$$

Przypuśćmy, że na pole \mathbf{u} nałożone są następujące ograniczenia kinematyczne:

$$(5.5) \quad \int_{-L}^L |w(0, \zeta)| d\zeta = 0, \quad \int_{-L}^L |w(x_k, \zeta)| d\zeta = 0, \quad k=1, \dots, p, \quad 0 < x_k < x_{k+1} \leq L.$$

Ponadto na końcach $x=0$ i $x=L$ może być spełniony jeszcze jeden z trzech warunków

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-L}^L u(0, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta = 0, & \text{(b)} \quad & \int_{-L}^L u(L, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta = 0, \\ \text{(c)} \quad & \int_{-L}^L u(0, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta = \int_{-L}^L u(L, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że warunki (5.5) przechodzą w warunki (5.13) dla pól Kirchhoffa. Analogicznie warunki (5.6) w przypadku pól Kirchhoffa odpowiadają warunkom

$$(a) u_1(0)=0, \quad (b) u_1(L)=0, \quad (c) u_1(0)=u_1(L)=0.$$

Po wykorzystaniu warunku nieściśliwości funkcjonal (5.4) przyjmie postać

$$\Phi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(1-\varepsilon)(u'_x)^2 + 4\varepsilon \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) w(x, \zeta) dx d\zeta.$$

Przy dostatecznie małym δ

$$\Phi(\mathbf{u}) \geq \Psi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left[2(1-\varepsilon)(1-\delta)|u'_x| + 2\varepsilon\delta \frac{L^2}{h^2} |w'_\zeta| + \frac{L\delta}{h} |u'_\zeta + w'_x| \right] dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) w(x, 0) dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) \int_0^\zeta \frac{\partial w}{\partial z} dz dx d\zeta.$$

Przy dostatecznie małym h

$$2\varepsilon\delta \frac{L^2}{h^2} \int_0^L \int_{-L}^L |w'_\zeta| dx d\zeta \geq \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) \int_0^\zeta \frac{\partial w}{\partial \lambda} d\lambda dx d\zeta.$$

Stąd dla dostatecznie małego h

$$\Psi(\mathbf{u}) \geq \Psi_1(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left[2(1-\varepsilon)(1-\delta)|u'_x| + \frac{\varepsilon\delta}{h^2} |w'_\zeta| + \frac{L\delta}{h} |u'_\zeta + w'_x| \right] dx d\zeta - \\ - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) (L-|\zeta|) w(x, 0) dx d\zeta.$$

Powtarzając powyższe rozważania i wykorzystując pierwszy z warunków (5.5) otrzymujemy dla dostatecznie małego h

$$\Psi_1(\mathbf{u}) \geq \Psi_2(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left[2(1-\varepsilon)(1-\delta)|u'_x| + \frac{L\delta}{h} |u'_\zeta + w'_x| \right] dx d\zeta - \\ - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda (L-|\zeta|) w'_x(x, \zeta) dx d\zeta.$$

Zauważmy, że dla dostatecznie małego h

$$\tau_0 \frac{L\delta}{2h} \int_0^L \int_{-L}^L |u'_\zeta + w'_x| dx d\zeta \geq \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda (L-|\zeta|) (w'_x + u'_\zeta) dx d\zeta.$$

Stąd

$$\Psi_2(\mathbf{u}) \geq \Psi_3(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left[2(1-\varepsilon)(1-\delta) |u'_x| + \frac{L\delta}{2h} |u'_\zeta + w'_x| \right] dx d\zeta - \\ - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda u(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta dx d\zeta.$$

Wprowadźmy jak poprzednio funkcję $v(x, \zeta)$:

$$v(x, \zeta) = u(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta - \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^p \varphi_i(x) \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta dx d\zeta,$$

gdzie

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = 1, \quad \varphi_i(x) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad x \leq x_{i-1} \quad \text{lub} \quad x \geq x_i,$$

przy czym $\varphi_i(x)$ jest funkcją nieujemną i różniczkowalną w sposób ciągły, a $x_0 = 0$.

Zauważmy, że

$$(5.7) \quad \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x, \zeta) dx d\zeta = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Zamieńmy w funkcjonale $\Psi_3(\mathbf{u})$ funkcję $u(x, \zeta)$ na $v(x, \zeta)$. Wtedy

$$\Psi_3(\mathbf{u}) \geq \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2(1-\varepsilon)(1-\delta) |v'_x| dx d\zeta - \sum_{i=1}^p \frac{4\tau_0(1-\varepsilon)(1-\delta)}{2L} \times \\ \times \int_0^L \int_{-L}^L |\varphi'_i(x)| \left| \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(p, q) \operatorname{sgn} q dp dq \right| dx d\zeta + \\ + \frac{\tau_0\delta}{2h} \int_0^L \int_{-L}^L \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} (L-|\zeta|) + (L-|\zeta|) \frac{\partial w}{\partial x} \right| dx d\zeta - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda v(x, \zeta) dx d\zeta - \\ - \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda \left[\sum_i^p \varphi_i(x) \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(p, q) \operatorname{sgn} q dp dq \right] dx d\zeta.$$

Ponieważ na mocy (5.5)

$$\frac{\tau_0\delta}{2h} \int_0^L \int_{-L}^L \left| \frac{\partial u}{\partial \zeta} (L-|\zeta|) + \frac{\partial w}{\partial x} (L-|\zeta|) \right| dx d\zeta = \frac{\tau_0\delta}{2h} \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{-L}^L |u'_\zeta (L-|\zeta|) + \\ + (L-|\zeta|) w'_x| dx d\zeta \geq \frac{\tau_0\delta}{2h} \sum_{i=1}^p \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{-L}^L u(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta dx d\zeta \right|,$$

to

$$\Psi_3(\mathbf{u}) \geq \Psi_4(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2(1-\varepsilon)(1-\delta) |v'_x| dx d\zeta - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda v(x, \zeta) dx d\zeta.$$

Podstawmy

$$\varphi'(x) = v_0(x) = \int_{-L}^L v(x, \zeta) d\zeta,$$

przy czym $\varphi(0) = 0$, a na mocy (5.7) $\varphi(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, p$. Wtedy

$$\Phi_4 \geq \Phi_5(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L 2(1-\varepsilon)(1-\delta) |\varphi''(x)| dx - \frac{2}{L} \int_0^L g_z(x) \varphi(x) dx.$$

Stąd obciążenie graniczne dla funkcjonału (2.8) przy zginaniu przewyższa obciążenie graniczne dla funkcjonału $\Psi_5(\mathbf{u})$. Rozpatrzmy funkcjonał (3.9) dla problemu zginania, tzn. gdy $f_x(x) \equiv 0$

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = 2\tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta w''_0| dx d\zeta - 2L \int_0^L g_z(x) w_0(x) dx.$$

Zauważmy, że funkcjonał $\Phi_2(\mathbf{u})$ przyjmuje jednoznaczne wartości dla pól $u_0(x)$, $w_0(x)$ i $-u_0(x)$, $w_0(x)$. W ten sposób przy szukaniu obciążeń granicznych można ograniczyć się do pól $\mathbf{u}(x)$ z $u_0(x) \equiv 0$. Funkcjonały $\Phi_2(\mathbf{u})$ i $\Psi_5(\mathbf{u})$ prowadzą do obciążeń granicznych różniących się o wielkość rzędu $\varepsilon + \delta$. Ze względu na dowolnie małe wartości liczb ε i δ poprawne jest następujące

TWIERDZENIE 3. *Obciążenia graniczne dla zginanej powłoki idealnej dają ściśle asymptotyczne wartości obciążeń granicznych dla problemu (5.4).*

Twierdzenie 3 pozostaje w mocy i przy dodatkowych ograniczeniach kinematycznych, które są równoważne warunkom

$$(a) \varphi'(0) = 0, \quad (b) \varphi'(L) = 0, \quad (c) \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$$

i odpowiadają zamocowaniu powłoki na brzegach.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie bardziej ogólne. Załóżmy, że pola prędkości spełniają ograniczenia kinematyczne typu (5.2), (5.5) i (5.6). Wykorzystując warunek nieściśliwości ośrodka przepiszmy (2.10) w postaci

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(1-\varepsilon)(u'_x)^2 + 4\varepsilon \frac{L^4}{h^4} (w'_\zeta)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta - \\ - \int_0^L \int_{-L}^L g_z(x) w(x, \zeta) dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L f_x(x) u(x, \zeta) dx d\zeta. \end{aligned}$$

Przedstawmy funkcję $u(x, \zeta)$ w postaci

$$u(x, \zeta) = p(x, \zeta) + q(x, \zeta),$$

gdzie $p(x, \zeta)$ jest funkcją parzystą ζ , $q(x, \zeta)$ funkcją nieparzystą, a ponadto $p(x, \zeta)$ spełnia warunki (5.2), $q(x, \zeta)$ warunki (5.6). Dokonując podobnych oszacowań jak poprzednio otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}) \geq \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L & \left[2(1-\varepsilon)(1-\delta)|p'_x + q'_x| + \frac{L\delta}{2h}|p'_\zeta + q'_\zeta + w'_x| \right] dx d\zeta - \\ & - \int_0^L \int_{-L}^L f_x p(x, \zeta) dx d\zeta - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda q(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta dx d\zeta. \end{aligned}$$

Spostrzegając, że

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-L}^L |p'_\zeta + q'_\zeta + w'_x| dx d\zeta \geq \frac{1}{L} \left| \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(L-|\zeta|)p'_\zeta + (L-|\zeta|)q'_\zeta + \right. \\ \left. + (L-|\zeta|)w'_x] dx d\zeta \right| = \frac{1}{L} \left| \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta dx d\zeta \right| \end{aligned}$$

i wprowadzając funkcje

$$r(x, \zeta) = q(x, \zeta) - \frac{\operatorname{sgn} \zeta}{2L} \sum_1^p \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{-L}^L q(\lambda, \tau) \operatorname{sgn} \tau d\tau d\lambda$$

w sposób taki sam jak poprzednio znajdujemy, że przy dostatecznie małym h

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}) \geq \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L 2(1-\varepsilon)(1-\delta)|r'_x + p'_x| dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L f_x(x) p(x, \zeta) dx d\zeta - \\ - \frac{2}{L} \int_0^L \int_{-L}^L \int_x^L g_z(\lambda) d\lambda r(x, \zeta) \operatorname{sgn} dx d\zeta. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$(5.8) \quad \int_{-L}^L \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta dx = 0, \quad i=1, \dots, p.$$

Podstawmy

$$u_0(x) = \frac{a}{2L} \int_{-L}^L p(x, \zeta) d\zeta, \quad \frac{dw_0}{dx} = \frac{b}{L^2} \int_{-L}^L r(x, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta, \quad w_0(0) = 0.$$

Wtedy

$$\int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta w'_0| dx d\zeta = \int_0^L \int_{-L}^L \left| \frac{a}{2L} \int_{-L}^L (p'_x(x, r) + r'_x(x, \tau)) d\tau - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\zeta \frac{b}{L^2} \int_{-L}^L (r'_x(x, \tau) + p'_x(x, \tau)) \operatorname{sgn} \tau \, d\tau \Big| dx d\zeta = \\
 & = \int_0^L \int_{-L}^L \left| \int_{-L}^L (p'_x(x, \tau) + r'_x(x, \tau)) \left(\frac{a}{2L} - \frac{\zeta b}{L^2} \operatorname{sgn} \tau \right) d\tau \right| dx d\zeta \leq \\
 & \leq \int_0^L \int_{-L}^L |p'_x(x, \zeta) + r'_x(x, \zeta)| dx d\zeta \int_{-L}^L \left| \frac{a}{2L} - \frac{\zeta b}{L^2} \right| d\zeta.
 \end{aligned}$$

Niech $b \leq 2a$. W tym przypadku

$$\int_{-L}^L \left| \frac{a}{2L} - \frac{\zeta b}{L^2} \right| d\zeta = \frac{4a^2 + b^2}{4a}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{u}) \geq \frac{4a}{4a^2 + b^2} \left[\int_{-L}^L \int_0^L 2\tau_0(1-\varepsilon)(1-\delta) |u'_0 - \zeta w'_0| dx d\zeta - \right. \\
 \left. - 2L \frac{4a^2 + b^2}{4a^2} \int_{-L}^L f_x u_0 dx - 2L \frac{4a^2 + b^2}{4ab} \int_{-L}^L g_z w_0 dx \right].
 \end{aligned}$$

W ten sposób, gdy $h \rightarrow 0$, obciążenia graniczne zagadnienia (2.10) są nie mniejsze niż obciążenia graniczne określone funkcjonalem

$$(5.9) \quad \int_0^L \int_{-L}^L 2\tau_0 |u'_0 - \zeta w'_0| dx d\zeta - 2L(1+s^2) \int_0^L f_x u_0 dx - 2L \frac{1+s^2}{2s} \int_0^L g_z w_0 dx$$

przy dowolnej wartości s ($0 \leq s \leq 1$).

Z warunków (5.2), (5.6) i (5.8) określamy ograniczenia kinematyczne dla $u_0(x)$ i $w_0(x)$:

$$u_0(0) = 0, \quad u_0(L) = 0, \quad w_0(0) = 0, \quad w_0(x_k) = 0, \quad (k=1, \dots, p), \quad w'_0(0) = 0, \quad w'_0(L) = 0.$$

Funkcjonał (5.9) jest analogiczny do funkcjonału (3.9) i daje asymptotyczne oszacowanie z dołu obciążeń granicznych określonych przez (2.8) przy dowolnym s ($0 \leq s \leq 1$). Na przykład dla $s=0,5$ różnica między górną i dolną oceną obciążeń granicznych w zagadnieniu (2.8) wynosi 20%. Dalsze uściślenie oszacowań z dołu będzie przedstawione w następnym punkcie.

Otrzymane powyżej oszacowania dla problemu rozciągania i zginania wykazują, że hipoteza Kirchhoffa o strukturze pól minimalizujących wynika z zasady wariacyjnej, gdy grubość powłoki dąży do zera.

6. Określenie mnożników kinematycznych dla idealnej płaskiej powłoki

Rozpatrzmy problem obliczenia obciążeń granicznych, określonych funkcjonalem (3.9). Niech (f_x, g_z) będzie danym obciążeniem zewnętrznym. Liczby λ, μ nazywają się mnożnikami kinematycznymi, jeśli obciążenie $(\lambda f_x, \mu g_z)$ jest obciążeniem

granicznym. Z definicji obciążenia granicznego wynika, że mnożniki kinematyczne określone są następującą zależnością:

$$(6.1) \quad \sup_{u_0, w_0} \frac{\int_0^L (f_x u_0 \lambda + g_z w_0 \mu) dx}{\int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta w''_0| dx d\zeta} = \frac{\tau_0}{L}.$$

Liczby λ i μ nazywają się mnożnikami dopuszczalnymi, jeśli

$$(6.2) \quad \sup_{u_0, w_0} \frac{\int_0^L (f_x u_0 \lambda + g_z w_0 \mu) dx}{\int_0^L \int_{-L}^L |u'_0 - \zeta w''_0| dx d\zeta} \leq \frac{\tau_0}{L}.$$

Zbiór punktów płaszczyzny λ , μ , spełniających warunek (6.2), tworzy obszar poprawności postawionego problemu. Obszar ten zależy zarówno od konfiguracji obciążeń zewnętrznych ($f_x(x)$, $g_z(x)$) jak i od ograniczeń kinematycznych nałożonych na pola prędkości u .

Łatwo wykazać, że obszar poprawności dla więzów przytrzymujących jest wypukły i symetryczny względem osi λ i μ . Dlatego też wystarczy określić strukturę tego obszaru dla $\lambda \geq 0$ i $\mu \geq 0$.

Niech ruch powłoki będzie ograniczony p więzami danymi w postaci warunków na funkcję $u_0(x)$ i q więzami danymi w postaci warunków na funkcję $w_0(x)$ i jej pochodną $w'_0(x)$. Problem znalezienia obszaru poprawności przy takich ograniczeniach kinematycznych (p, q) będziemy nazywać zadaniem. Wewnątrz każdej klasy tych zadań, tzn. dla ustalonych wartości p i q , metody znajdowania obszaru poprawności są takie same. Wykażemy, że zadania postaci (0,0), (0,1), (1,0), (0,2) i (1,1) wymagają pewnych ograniczeń na konfigurację obciążeń zewnętrznych i przy ich spełnieniu mogą być sprowadzone do zadania (1.2). Zilustrujemy tę metodę na przykładzie zadania (0,0). Warunek poprawności sformułowany w $p. 1$ pokazuje, że w tym przypadku

$$\int_0^L f_x(x) dx = 0, \quad \int_0^L g_z(x) dx = 0, \quad \int_0^L g_z(x) x dx = 0.$$

Wynika stąd, że wartości funkcjonału (3.9) dla pól

$$u_0, w_0, \quad u_0^{(1)}(x) = u_0(x) - u_0(0), \quad w_0^{(1)}(x) = w_0(x) - w_0(0) - x w'_0(0)$$

pokrywają się. Ale pole $u_0^{(1)}(x)$, $w_0^{(1)}(x)$ spełnia następujące ograniczenia kinematyczne:

$$u_0^{(1)}(0) = 0, \quad w_0^{(1)}(0) = -\frac{dw_0^{(1)}(0)}{dx} = 0,$$

tzn. odpowiada zadaniu typu (1.2).

Zauważmy, że zadania (p, q), gdy $p \leq 1$, $q \leq 2$ odpowiadają klasie zadań tak zwanych statycznie określonych. Rozpatrzmy konkretne zadanie typu (1.2):

$$(6.3) \quad u_0(0) = 0, \quad w_0(0) = w'_0(0) = 0.$$

Oznaczmy przez $\rho(x)$ i $\omega(x)$ następujące funkcje:

$$\rho(x) = u'_0(x), \quad \omega(x) = w''_0(x).$$

Warunek (6.1) można zatem zapisać w postaci

$$(6.4) \quad \sup_{\rho, \omega} \frac{\int_0^L (\lambda \Phi_x \rho + \mu \Phi_z \omega) dx}{\int_0^L \int_{-L}^L |\rho - \zeta \omega| dx d\zeta} = \frac{\tau_0}{L},$$

gdzie

$$\Phi_x = \int_x^L f_x(\lambda) d\lambda, \quad \Phi_z = \int_x^L \int_x^L g_z(\tau) d\tau d\lambda = \int_x^L (\tau - x) g_z(\tau) d\tau.$$

Zauważmy, że na funkcję $\rho(x)$ i $\omega(x)$ nie nakłada się żadnych ograniczeń. Oznaczmy przez κ stosunek ρ/ω . Wtedy (6.4) przyjmie postać

$$(6.5) \quad \frac{\tau_0}{L} = \sup_{v, \kappa} \frac{\int_0^L v(x) \frac{\lambda \Phi_x \kappa + \mu \Phi_z}{L} dx}{\int_0^L \int_{-L}^L |\kappa - \zeta| d\zeta},$$

gdzie

$$v(x) = \omega(x) \int_{-L}^L |\kappa(x) - \zeta| d\zeta.$$

Ustalmy funkcję $\kappa(x)$. Wtedy wyrażenie w lewej części równania (6.5) przedstawia normę funkcyjonału liniowego w przestrzeni $L_1[0, L]$ i może być obliczone w następujący sposób:

$$(6.6) \quad \sup_v \frac{\int_0^L v(x) \frac{\lambda \Phi_x \kappa + \mu \Phi_z}{L} dx}{\int_0^L \int_{-L}^L |\kappa - \zeta| d\zeta} = \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x \kappa(x) + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |\kappa - \zeta| d\zeta} \right|.$$

Aby znaleźć kres górny ilorazu (6.5), należy znaleźć kres górny wszystkich możliwych funkcji $\kappa(x)$ występujących w ilorazie (6.6). Pokażemy, że

$$(6.7) \quad \sup_{\kappa(x)} \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x \kappa(x) + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |\kappa(x) - \zeta| d\zeta} \right| = \max_a \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x a + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |a - \zeta| d\zeta} \right|.$$

Oczywiście wyrażenie stojące w lewej części równania (6.7) jest nie mniejsze od wyrażenia stojącego po stronie prawej.

Załóżmy, że wyrażenie (6.7) jest ciągłe. Istnieje wtedy dodatnia liczba a taka, że

$$\sup_{\kappa(x)} \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x \kappa(x) + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |\kappa(x) - \zeta| d\zeta} \right| > \max_a \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x a + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |a - \zeta| d\zeta} \right| + a.$$

Weźmy pod uwagę ustaloną wartość funkcji $\kappa(x)$, dla której w pewnym punkcie x_0

$$(6.8) \quad \left| \frac{\lambda \Phi_x(x_0) \kappa(x_0) + \mu \Phi_z(x_0)}{\int_{-L}^L |\kappa(x_0) - \zeta| d\zeta} \right| > \max_a \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x a + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |a - \zeta| d\zeta} \right| + \frac{a}{2}.$$

Ale nierówność (6.8) jest niemożliwa do spełnienia, ponieważ przyjmując $a = \kappa(x_0)$ mamy

$$\max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x(x) \kappa(x_0) + \mu \Phi_z(x)}{\int_{-L}^L |\kappa(x_0) - \zeta| d\zeta} \right| \geq \left| \frac{\lambda \Phi_x(x_0) \kappa(x_0) + \mu \Phi_z(x_0)}{\int_{-L}^L |\kappa(x_0) - \zeta| d\zeta} \right|.$$

Tym samym równość (6.7) została udowodniona. Zatem granica obszaru poprawności określona jest równaniem

$$(6.9) \quad \frac{\tau_0}{L} = \max_a \max_x \left| \frac{\lambda \Phi_x(x) a + \mu \Phi_z(x)}{\int_{-L}^L |a - \zeta| d\zeta} \right|.$$

Po obliczeniu całki w (6.9) otrzymamy

$$(6.10) \quad \frac{\tau_0}{L} = \max \left[\max_{\substack{x, a \\ |a| \geq L}} \left| \frac{\lambda \Phi_x(x) a + \mu \Phi_z(x)}{2aL} \right|, \max_{\substack{x, a \\ |a| \leq L}} \left| \frac{\lambda \Phi_x(x) a + \mu \Phi_z(x)}{L^2 + a^2} \right| \right].$$

Wzór (6.10) można jeszcze uprościć. Łatwo zauważyć, że jeśli funkcje Φ_x i Φ_z mają w pewnym punkcie x różne znaki, to liczbę a należy wziąć ujemną, jeśli natomiast Φ_x i Φ_z mają w tym punkcie te same znaki, to a powinno być dodatnie. Wynika stąd, że krzywa ograniczająca obszar poprawności jest określona równaniem

$$\frac{\tau_0}{L} = \max_{\substack{x, a \\ 0 \leq a \leq L}} \frac{\lambda |\Phi_x(x)| a + \mu |\Phi_z(x)|}{L^2 + a^2}$$

lub

$$(6.11) \quad 2L\tau_0 = \max_x \left(\mu |\Phi_z(x)| + \sqrt{(\mu \Phi_z(x))^2 + (\lambda \Phi_x(x))^2} \right).$$

Dla innych zadań typu (1,2) wzór (6.11) również zachodzi. Należy jednak mieć na uwadze, że funkcje Φ_x i Φ_z powinny być związane z funkcjami f_x i g_x wzorami uwzględniającymi konkretny charakter ograniczeń kinematycznych zadania. Zauważmy, że norma funkcjonału liniowego w przestrzeni $L_1[0, 1]$ określona jest na δ funkcji $v(x)$, co odpowiada funkcji $u_0(x)$ postaci

$$u_0(x) = \begin{cases} A, & \text{jeśli } x \leq x_0, \\ B, & \text{jeśli } x > x_0 \end{cases}$$

oraz funkcji $w_0(x)$ postaci

$$w_0(x) = k|x - x_0| + b.$$

Istnieje jednakże przypadek, gdy funkcje $v(x)$, dla których określona jest norma funkcyjonału liniowego, są inne niż δ -funkcje. Jest to możliwe w przypadku, gdy istnieje funkcja $\kappa(x)$, dla której

$$(6.12) \quad \left| \frac{\lambda \Phi_x \kappa + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |\kappa(x) - \zeta| d\zeta} \right| = \max_x \max_a \left| \frac{\lambda \Phi_x a + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |a - \zeta| d\zeta} \right| = \frac{\tau_0}{L}.$$

Jeżeli spełniona jest zależność (6.12), to norma funkcyjonału

$$\int_0^L \frac{v(x)}{\int_0^L |v| dx} \frac{\lambda \Phi_x \kappa + \mu \Phi_z}{\int_{-L}^L |\kappa - \zeta| d\zeta} dx = \frac{\tau_0}{L} \int_0^L \frac{v(x)}{\int_0^L |v| dx} dx$$

określona jest dla dowolnej nieujemnej funkcji $v(x)$. Ma to miejsce na przykład wtedy, gdy $\Phi_x = \text{const}$ oraz $\Phi_z = \text{const}$.

Rozpatrzmy teraz ogólny przypadek zadania (p, q) . Załóżmy dla określoności, że układ ograniczeń kinematycznych ma postać

$$u_0(\alpha_i) = 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad \alpha_0 = 0, \quad 0 \leq \alpha_i < \alpha_{i+1} \leq L,$$

$$w_0(\beta_i) = 0, \quad i = 0, \dots, q-1, \quad 0 \leq \beta_i < \beta_{i+1} \leq L, \quad \beta_0 = 0.$$

Zatem będziemy mieć

$$(6.13) \quad \int_0^{\alpha_i} \rho(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

$$w_0(x) = \int_0^x (x-\tau) \omega d\tau - \frac{x}{\beta_1} \int_0^{\beta_1} (\beta_1 - \tau) \omega d\tau.$$

Wykorzystując (6.13) podobnie jak poprzednio skonstruujemy funkcję $\Phi_z(x)$. Nie wykorzystane warunki kinematyczne mogą być napisane w sposób następujący:

$$(6.14) \quad \int_0^L R_i \rho dx = 0, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

$$\int_0^L \Omega_i \omega dx = 0, \quad i = 2, \dots, q-1.$$

Dochodzimy zatem do zagadnienia znalezienia kresu górnego (6.4) przy warunku, że funkcje $\rho(x)$ i $\omega(x)$ spełniają dodatkowe ograniczenia (6.14).

Biorąc pod uwagę twierdzenie S. M. NIKOLSKIEGO [6] o normie funkcjonału dla półprzestrzeni i powtarzając poprzednie rozważania otrzymujemy, że brzeg obszaru poprawności w danym przypadku określony jest zależnością

$$(6.15) \quad \max_{x, a} \min_{\theta_i, \tau_i} \left| \frac{[\lambda \Phi_x - \sum_1^{p-1} \theta_i R_i] a + \mu \Phi_z - \sum_2^{q-1} \Omega_i \tau_i}{\int_{-L}^L |a - \zeta| d\zeta} \right| = \frac{\tau_0}{L},$$

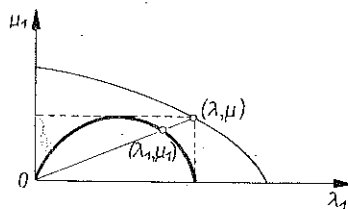
gdzie a , θ_i oraz τ_i są liczbami rzeczywistymi.

Tak więc problem określenia obciążeń granicznych dla powłoki idealnej został sprowadzony do znalezienia wartości ekstremalnych funkcji wielu zmiennych. Równanie (6.15) jest analogiczne do równania (6.10) i może być zapisane w postaci podobnej do (6.11). Mianowicie

$$(6.16) \quad 2L\tau_0 = \max_x \min_{\theta_i, \tau_i} \left[\left| \mu \Phi_z(x) - \sum_2^{q-1} \Omega_i(x) \tau_i \right| + \sqrt{\left(\mu \Phi_z(x) - \sum_1^{q-1} \Omega_i(x) \tau_i \right)^2 + \left(\lambda \Phi_x - \sum_1^{p-1} \theta_i R_i(x) \right)^2} \right].$$

Na zakończenie tego punktu powróćmy do rozpatrzenia asymptotycznych własności mnożników kinematycznych w zagadnieniu płaskim. Jak zostało wykazane, obszar dopuszczalnych mnożników dla powłoki idealnej daje ocenę górną dla zbioru dopuszczalnych mnożników zagadnienia płaskiego. W p. 5 wykazano, że jeśli λ , μ są kinematycznymi mnożnikami dla powłoki idealnej, to para liczb

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1+s^2}, \quad \mu_1 = \frac{2s\mu}{1+s^2}$$



Rys. 2

dla dowolnej wartości s , $0 \leq s \leq 1$ daje dolną ocenę asymptotyczną dla odpowiednich mnożników kinematycznych zagadnienia płaskiego. W ten sposób z każdym punktem λ , μ położonym na brzegu obszaru poprawności dla powłoki idealnej związana jest elipsa (rys. 2)

$$\frac{\left(\lambda_1 - \frac{\lambda}{2} \right)^2}{\frac{\lambda^2}{4}} + \frac{\mu_1^2}{\mu^2} = 1,$$

której kontur daje dolną ocenę asymptotyczną dla zbioru dopuszczalnych mnożników zagadnienia płaskiego. Rozpatrując obwiednię rodziny tych elips, gdy punkt λ , μ przebiega brzeg obszaru poprawności dla powłoki idealnej, dochodzimy do oceny dolnej dla obszaru dopuszczalnych mnożników zagadnienia płaskiego. Łatwo zauważyć, że gdy $\lambda=0$ lub $\mu=0$, oceny asymptotyczne dolne i górne dla mnożników kinematycznych zagadnienia płaskiego pokrywają się.

7. Krzywoliniowe powłoki cylindryczne

Rozpatrzmy teraz powłokę o grubości h , której powierzchnia środkowa posiada kształt cylindryczny, a jej równanie w postaci normalnej przyjmuje postać

$$(7.1) \quad \kappa = \kappa(s) \quad \kappa h \ll 1,$$

gdzie s jest długością łuku kierunkowej ($0 \leq s \leq L$), a κ krzywizną tej linii.

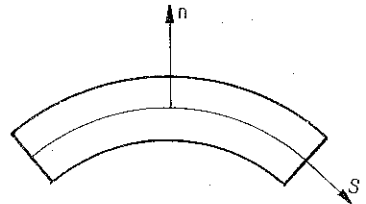
Przedstawiając funkcjonal wyjściowy w zmiennych s i n (rys. 3) i przeprowadzając rozumowanie w sposób analogiczny do poprzedniego dochodzimy do funkcjonału analogicznego do (3.4) mającego teraz postać

$$(7.2) \quad I(\mathbf{u}) = 2\tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \left| \frac{\partial u_\tau}{\partial s} - \kappa u_n - \zeta \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} + \frac{\partial \kappa u_\tau}{\partial s} \right) \right| d\zeta ds - \\ - 2L \int_0^L [f_\tau(s) u_\tau(s) + g_n(s) u_n(s)] ds,$$

gdzie u_τ i u_n oznaczają rzuty prędkości przemieszczeń linii środkowej na osie τ i n oraz gdzie wszystkie oznaczenia są analogiczne do oznaczeń p. 3.

Zauważmy, że ruch powłoki przy warunku znikania dysypatywnej części funkcjonału (7.2) prowadzi do następujących pól:

$$(7.3) \quad u_\tau^0(s) = [\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}(s)] \boldsymbol{\tau}(s), \\ u_n^0(s) = [\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}(s)] \mathbf{n}(s),$$



Rys. 3

gdzie \mathbf{v}_0 jest dowolnym stałym wektorem leżącym w płaszczyźnie sn , a $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, tzn. jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny; $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$ jest promieniem wodzącym krzywej (7.1).

Łatwo zauważyć, że (7.3) odpowiada ruchowi powłoki jako ciała sztywnego.

Sprawdźmy funkcjonal (7.2) do postaci funkcjonału (3.9). W tym celu rozpatrzmy następujący układ:

$$(7.4) \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial s} - \kappa u_n = v_\tau, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} + \frac{\partial \kappa u_\tau}{\partial s} = v_n.$$

Rozwiązanie ogólne układu (7.4) posiada postać

$$(7.5) \quad u_\tau(s) = u_\tau^0(s) + \int_0^s \{ \boldsymbol{\tau}(\xi) \boldsymbol{\tau}(s) v_\tau(\xi) + [\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\rho}(s) - \boldsymbol{\rho}(\xi))] \boldsymbol{\tau}(s) v_n(\xi) \} d\xi, \\ u_n(s) = u_n^0(s) + \int_0^s \{ \boldsymbol{\tau}(\xi) \mathbf{n}(s) v_\tau(\xi) + [\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\rho}(s) - \boldsymbol{\rho}(\xi))] \mathbf{n}(s) v_n(\xi) \} d\xi,$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, 1)$.

Przepiszmy funkcjonal (7.2) wprowadzając funkcje $v_t(s)$ i $v_n(s)$:

$$(7.6) \quad I = 2\tau_0 \int_{-L}^L \int_0^L |v_t - \zeta v_n| d\xi ds - 2L \int_0^L \left\{ v_t(s') \int_{s'}^L (k_{11}(s, s') f_t(s) + k_{21}(s, s') g_n(s)) ds + v_n(s') \int_{s'}^L (k_{12}(s, s') f_t(s) + k_{22}(s, s') g_n(s)) ds \right\} ds' - 2L \int_0^L f_t(s) u_t^0(s) ds - 2L \int_0^L g_n(s) u_n^0(s) ds,$$

gdzie macierz $k_{ij}(s, s')$ posiada postać

$$(7.7) \quad \|k_{ij}\| = \begin{bmatrix} \tau(s') \tau(s), & [\omega_0 \times (\rho(s) - \rho(s'))] \tau(s) \\ \tau(s') \mathbf{n}(s), & [\omega_0 \times (\rho(s) - \rho(s'))] \mathbf{n}(s) \end{bmatrix}.$$

Stałe dowolne występujące w polach (u_t^0, u_n^0) są określone bądź z ograniczeń kinematycznych nałożonych na te pola, bądź, w razie braku takich ograniczeń, sprowadzają się do warunków na obciążenie zewnętrzne i wtedy nie mają wpływu na funkcjonal (7.1).

Otrzymały funkcjonal (7.6) jest analogiczny do funkcjonału (3.9), a obszar poprawności dla tego funkcjonału może być znaleziony ze wzoru (6.4), gdzie na miejsce ρ, ω należy wstawić v_t, v_n określając odpowiednio Φ_x, Φ_z zgodnie z (7.6).

W ten sposób problem obliczenia obciążeń granicznych dla krzywoliniowej powłoki cylindrycznej sprowadza się zawsze, gdy $h \rightarrow 0$, do znalezienia obciążeń granicznych dla odpowiedniej płaskiej powłoki.

8. Przykłady

Wróćmy do rozpatrzenia zadań statycznie określonych typu (1,2). Jak już było wykazane, brzeg obszaru poprawności w tym przypadku określony jest równaniem (6.11). Przypuśćmy, że na odcinku $[0, L]$ istnieje punkt x_0 , w którym

$$(8.1) \quad \max_{0 \leq x \leq L} |\Phi_x(x)| = |\Phi_x(x_0)|, \quad \max_{0 \leq x \leq L} |\Phi_z(x)| = |\Phi_z(x_0)|.$$

Taki punkt x_0 istnieje na przykład w następujących szczególnych przypadkach:

a) jedna z funkcji Φ_x, Φ_z jest stała;

b) obie funkcje $|\Phi_x|, |\Phi_z|$ maleją monotonicznie na odcinku $[0, L]$ (tu $x_0 = 0$).

Łatwo zauważyć, że przypadek b) dla zadania (6.3) jest równoważny warunkom:

$f_x(x)$ zachowuje znak na odcinku $[0, L]$,

$\int_x^L g_z(\lambda) d\lambda$ zachowuje znak na odcinku $[0, L]$.

Z zależności (8.1) i wzoru (6.11) wynika bezpośrednio, że brzegiem obszaru poprawności na płaszczyźnie λ, μ , gdy $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, jest w danym przypadku parabola o równaniu

$$(8.2) \quad |\Phi_z(x_0)| \mu = L\tau_0 - \frac{L\Phi_x^2(x_0)}{4\tau_0} \lambda^2.$$

Wzór (8.2) pokazuje, że graniczne mnożniki kinematyczne (λ, μ) nie zależą od całej konfiguracji obciążeń, a jedynie od liczb $\Phi_z(x_0)$ i $\Phi_x(x_0)$. Zauważmy w końcu, że ze wzoru (8.2) wynika przy $f_x(x) \equiv 0$

$$|\mu| \leq \frac{L\tau_0}{\max_{0 \leq x \leq L} |\Phi_z(x)|}$$

i gdy $g_z(x) \equiv 0$,

$$|\lambda| \leq \frac{2\tau_0}{\max_{0 \leq x \leq L} |\Phi_x(x)|}$$

Jako przypadki szczególne zadań statycznie określonych rozpatrzmy cienkie rury cylindryczne o kołowych lub cylindrycznych przekrojach, poddane ciśnieniu wewnętrznemu. Zgodnie ze schematem p. 7 zadania te mogą być sprowadzone do zadań na obciążenie graniczne dla płaskich powłok i prowadzą do następujących wartości granicznych ciśnień wewnętrznych:

$$g_n = \frac{8}{\sqrt{17}+1} \frac{\tau_0}{b}$$

dla kwadratowego przekroju poprzecznego, gdzie b jest bokiem kwadratu i

$$g_n = \frac{4\pi}{\sqrt{4\pi^2+1}} \frac{\tau_0}{R}$$

dla przekroju kołowego, gdzie R oznacza promień przekroju poprzecznego.

Przejdźmy teraz do zadań statycznie nieokreślonych. Rozważmy powłokę o długości L zamocowaną przegubowo na brzegach i nie doznającą przemieszczeń poprzecznych w punkcie x_0 , $0 < x_0 < L$. Niech na powłokę działają siły poprzeczne rozłożone z gęstością $g_z(x)$. Funkcję $\Phi_z(x)$ w tym przypadku wylicza się ze wzoru

$$\Phi_z(x) = \int_0^L G(\tau, x) g_z(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{L-y}{L} x, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq y, \\ \frac{y(L-x)}{L}, & \text{jeśli } y \leq x \leq L, \end{cases}$$

a zadanie znalezienia obciążenia granicznego sprowadza się przy wykorzystaniu (6.15) do określenia liczby μ spełniającej równanie

$$\frac{\tau_0}{L} = \min_0 \max_x \left| \frac{\mu \Phi_z - \theta G(x_0, x)}{L^2} \right|.$$

Na mocy twierdzenia Czebyszewa o najlepszym przybliżeniu w przestrzeni $C[0, 1]$ liczba θ powinna być dobrana tak, aby istniała para liczb x', x'' takich, że

$$\min_{\theta} \max_x |\mu \Phi_z - \theta G(x_0, x)| = \mu \Phi_z(x') - \theta G(x_0, x') = -\mu \Phi_z(x'') + \theta G(x_0, x'');$$

skąd

$$\theta = \mu \frac{\Phi_z(x') + \Phi_z(x'')}{G(x_0, x') + G(x_0, x'')}$$

oraz

$$(8.3) \quad L\tau_0 = \mu \frac{|\Phi_z(x') G(x_0, x'') - \Phi_z(x'') G(x_0, x')|}{G(x_0, x') + G(x_0, x'')}$$

Z drugiej strony jeśli rozpatrzyć funkcjonal (6.4) określony na funkcjach

$$(8.4) \quad \rho(x) = 0, \quad \omega(x) = \alpha \delta(x - x^*) + \beta \delta(x - x^{**}),$$

gdzie

$$\alpha G(x_0, x^*) + \beta G(x_0, x^{**}) = 0,$$

to

$$(8.5) \quad L\tau_0 = \max_{x^*, x^{**}} \mu \frac{|\Phi_z(x^*) G(x_0, x^{**}) - \Phi_z(x^{**}) G(x_0, x^*)|}{G(x_0, x^*) + G(x_0, x^{**})}$$

Porównując (8.3) i (8.5) znajdujemy, że wśród pól minimalizujących są pola postaci (8.4), a liczba μ może być określona ze wzoru (8.5).

Zupełnie analogiczne wzory można wyprowadzić i dla większej liczby ograniczeń kinematycznych. Jednakże przy ich wyprowadzaniu należy uwzględnić fakt, że układ funkcji $G(x_k, x)$, $0 < x_1 < \dots < x_k < L$ nie tworzy układu Czebyszewa, chociaż, jak można wykazać, spełnione jest twierdzenie o «alternacji» [7].

9. Oceny obciążeń granicznych dla rozciągania przy skończonej grubości powłoki

W poprzednich rozdziałach wykazaliśmy, że przy istnieniu sił tylko rozciągających ($g_z(x) \equiv 0$) obciążenia graniczne dla powłoki idealnej są asymptotycznie ścisłe, gdy $h \rightarrow 0$, dla odpowiedniego zagadnienia płaskiego. Jednakże ważna jest znajomość odchyłek obciążeń granicznych dla zagadnienia płaskiego od obciążeń granicznych dla powłoki idealnej przy skończonej wartości h .

W niniejszej pracy nie będziemy badać tego problemu szczegółowo. Poruszymy go tylko w związku z ilustracją jakościowych metod wariacyjnych.

Jak już wcześniej wspominaliśmy, problem znalezienia obciążeń granicznych dla zagadnienia płaskiego sprowadza się do badania funkcjonułu

$$(9.1) \quad I(\mathbf{u}) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_x)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta - \int_0^L \int_{-L}^L \lambda f_x u(x, \zeta) dx d\zeta,$$

gdzie pole \mathbf{u} spełnia warunek nieściśliwości (1.4) i pewne ograniczenia kinematyczne. Odnosnie możliwych ograniczeń kinematycznych należy podkreślić, że jest sens

rozpatrywać tylko takie ograniczenia kinematyczne, które wyodrębniają w przestrzeni pól \mathbf{u} zamkniętą podprzestrzeń. Norma w przestrzeni \mathbf{u} jest określona następująco:

$$\|\mathbf{u}\| = \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_x)^2 + \frac{L^2}{h^2} (u'_\zeta + w'_x)^2} dx d\zeta + \int_0^L \int_{-L}^L [|u| + |w|] dx d\zeta.$$

Do takiego typu ograniczeń kinematycznych odnoszą się np. ograniczenia postaci

$$(a) \int_{-L}^L u(0, \zeta) d\zeta = 0, \quad (b) \int_{-L}^L |u(0, \zeta)| d\zeta = 0, \quad (c) \int_{-L}^L w(0, \zeta) \operatorname{sgn} \zeta d\zeta = 0.$$

Z postaci funkcjonału (9.1) wynika, że obciążenia graniczne dla powłoki idealnej dają ocenę dolną obciążeń granicznych zagadnienia płaskiego, ponieważ funkcjonał dla powłoki idealnej otrzymuje się z (9.1) przez pominięcie prędkości odkształceń postaciowych, a następnie wprowadzeniu uśrednionej po grubości prędkości podłużnej. Dla powłoki idealnej rozważamy oczywiście tylko ograniczenia kinematyczne typu $u_0(0) = 0$.

Rozpatrzmy teraz funkcjonał (9.1) dla pól Kirchhoffa. Oczywiście obciążenia graniczne f_x dla pól Kirchhoffa określone wzorem (9.1) dają ocenę górną dla obciążeń granicznych w zagadnieniu płaskim. Na mocy wypukłości funkcjonału (9.1) przy jego minimalizacji można ograniczyć się do pól postaci

$$(9.2) \quad u(x, \zeta) = u_0(x), \quad w(x, \zeta) = -\zeta \frac{h^2}{L^2} u'_0(x),$$

przy czym ograniczenia kinematyczne a) i b) sprowadzają się do warunku $u_0(0) = 0$, a ograniczenie c) do warunku $u'_0(0) = 0$. Funkcjonał (9.1) dla pola (9.2) przyjmuje postać

$$(9.3) \quad I_0(u_0) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4(u'_0)^2 + \zeta^2 \frac{L^2}{h^2} (u''_0)^2} dx d\zeta - 2L \int_0^L \lambda f_x u_0 dx.$$

Dla skrócenia rozważań przyjmiemy ograniczenia kinematyczne postaci

$$(9.4) \quad u_0(0) = u'_0(0) = 0.$$

Zauważmy, że obciążenia graniczne przy ograniczeniach kinematycznych postaci (9.4) dają górną ocenę obciążeń granicznych przy ograniczeniu kinematycznym $u_0(0) = 0$. Oznaczając $p(x) = u'_0(x)$ przepiszmy (9.3) w postaci

$$(9.5) \quad I_1(p) = \tau_0 \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \zeta^2 \frac{h^2}{L^2} (p')^2} dx d\zeta - 2L \lambda \Phi_x p dx,$$

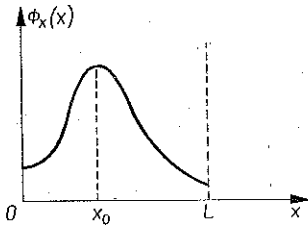
gdzie

$$\Phi_x = \int_x^L f_x dx.$$

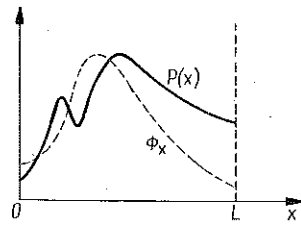
Zamiast funkcjonału (9.5) rozpatrzmy funkcjonał

$$(9.6) \quad j(p) = \tau_0 \int_0^L \left(2|p| + \frac{h}{2} |p'| \right) dx - \int_0^L \lambda \Phi_x p dx.$$

Łatwo zauważyć, że obciążenia graniczne dla funkcjonału (9.5) nie przewyższają obciążeń granicznych dla funkcjonału (9.6). W dalszym ciągu dla uproszczenia ograniczymy się do przypadku, gdy $\Phi_x(x)$ jest funkcją nieujemną posiadającą tylko



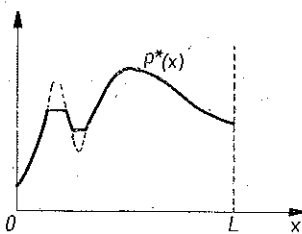
Rys. 4



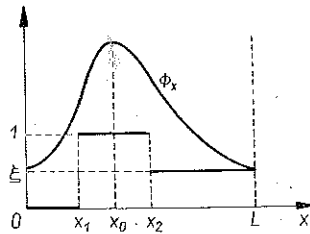
Rys. 5

jedno lokalne maksimum (rys. 4). Łatwo zauważyć, że przy takim ograniczeniu na $\Phi_x(x)$ celem znalezienia kresu dolnego funkcjonału (9.6) wystarczy rozpatrywać takie funkcje $p(x)$, które są monotoniczne na odcinkach monotoniczności $\Phi_x(x)$.

Rzeczywiście, założymy, że $p(x)$ posiada postać pokazaną na rys. 5. Wtedy możemy przejść do funkcji $p^*(x)$ przedstawionej na rys. 6, którą otrzymuje się



Rys. 6



Rys. 7

z wykresu $p(x)$ przez obcięcie lokalnego maksimum i doklejenie lokalnego minimum. Łatwo się przekonać, że $j(p) \geq j(p^*)$. Kres dolny osiągany jest oczywiście dla funkcji przedstawionych na rys. 7 [bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $\max p(x) = 1$].

Zatem mnożnik kinematyczny λ dla zagadnienia płaskiego spełnia nierówność

$$(9.7) \quad \frac{2\tau_0}{\Phi_x(x_0)} \leq \lambda \leq \frac{\tau_0}{\int_{x_1}^{x_2} \Phi_x dx + \xi \int_{x_2}^L \Phi_x dx} = \frac{\tau_0}{\max_{x_1, x_2, \xi} A(\xi, x_1, x_2)},$$

$$\max_{\xi, x_1, x_2} \frac{h}{2(x_2 - x_1) + 2\xi(L - x_2) + (2 - \xi) \frac{h}{2}}$$

Z warunków nałożonych na funkcję $\Phi_x(x)$ wynika, że jest ona stała jeśli $f_x(x) = \delta(x-L)$, albo istnieje taka liczba a , że $\Phi_x(x)$ osiąga swą największą wartość na odcinku $[0, L-a]$ i $\Phi_x(x) < M$ przy x z przedziału $[L-a, L)$. W pierwszym przypadku, gdy $\Phi_x(x) = M$, warunek (9.7) daje

$$(9.8) \quad \frac{2\tau_0}{M} \leq \lambda \leq \frac{2\tau_0}{M} + \frac{h\tau_0}{2LM}.$$

Wzór (9.8) można uściślić. Mianowicie można wykazać, że przy stałej wartości $\Phi_x(x)$ obciążenie graniczne przy dowolnej grubości powłoki w przypadku zagadnienia płaskiego pokrywa się z obciążeniem granicznym dla powłoki idealnej. Rzeczywiście, jak było wykazane wyżej, obciążenie graniczne dla rozciąganej powłoki idealnej daje dolną ocenę obciążeń granicznych zagadnienia płaskiego. Z drugiej strony taką samą wartość obciążenia granicznego dla zagadnienia płaskiego można otrzymać, jeśli rozważyć następujące pole prędkości:

$$\begin{aligned} u(x, \zeta) &\equiv 0, & \text{gdy } \zeta < L \left(1 - \frac{x}{h}\right); \\ u(x, \zeta) &= v_0, & \text{gdy } \zeta \geq L \left(1 - \frac{x}{h}\right), \end{aligned}$$

gdzie v_0 jest stałym wektorem o współrzędnych $v_0 = a(h, -L)$, a a dowolną liczbą rzeczywistą ($a > 0$). Zauważmy, że obciążenie graniczne w zadaniu na rozciąganie dla powłoki o skończonej grubości pokrywa się z obciążeniem granicznym dla powłoki idealnej tylko w tym przypadku, gdy $\Phi_x(x) = \text{const}$, oraz gdy największa wartość $\Phi_x(x)$ jest osiągana na odcinku o długości nie mniejszej niż $2h$. Zauważmy także, że rozpatrzone pole prędkości nie spełnia hipotezy Kirchhoffa. Jednakże gdy $h \rightarrow 0$, pola Kirchhoffa dają również prawidłową wartość obciążenia granicznego.

Przejdźmy do rozpatrzenia drugiego przypadku. O ile wzory (9.7) i (9.8) były spełnione dla dowolnej grubości h , to w dalszych rozważaniach ograniczymy się do h dostatecznie małych. Ponieważ wyrażenie stojące w mianowniku (9.7) jest monotoniczne ze względu na ξ , należy je rozpatrzyć dla dwóch wartości $\xi: \xi = 0$ i $\xi = 1$. Mamy odpowiednio

$$A(0, x_1, x_2) = \frac{\left(\int_{x_1}^{x_2} \Phi_x dx\right)/(x_2 - x_1)}{2 + \frac{h}{x_2 - x_1}}, \quad A(1, x_1, x_2) = \frac{\left(\int_{x_1}^L \Phi_x dx\right)/(L - x_1)}{2 + \frac{h}{2(L - x_1)}}.$$

Na mocy założeń odnośnie Φ_x istnieje liczba $\beta > 0$ taka, że

$$M - \frac{\int_{x_1}^L \Phi_x(x) dx}{L - x_1} > \beta.$$

Stąd

$$(9.9) \quad \frac{\int_{x_1}^L \Phi_x dx}{\frac{L-x_1}{2 + \frac{h}{2(L-x_1)}}} < \frac{M}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Z drugiej strony ustalone wartości x_1 i x_2 można wziąć na tyle bliskie, aby

$$(9.10) \quad M \geq \frac{\int_{x_1}^{x_2} \Phi_x(x) dx}{x_2 - x_1} > M - \frac{\beta}{2}.$$

Jeśli liczbę h wziąć na tyle małą, aby

$$\frac{h}{x_2 - x_1} < \frac{\beta}{M + \beta},$$

to z warunku (9.10) otrzymujemy

$$(9.11) \quad \frac{\int_{x_2}^{x_1} \Phi_x(x) dx}{\frac{x_2 - x_1}{2 + \frac{h}{x_2 - x_1}}} > \frac{M}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Porównując (9.9) i (9.10) dostajemy

$$(9.12) \quad \frac{2\tau_0}{M} \leq \lambda \leq \frac{\tau_0}{\max_{x_1, x_2} \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{\int_{x_1}^{x_2} \Phi_x dx}{h}}{2 + \frac{h}{x_2 - x_1}}.$$

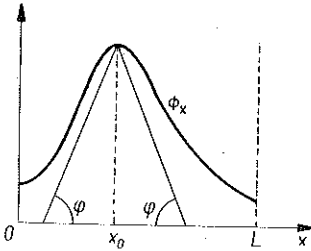
Zauważmy, że jeśli we wzorze (9.8) odchylenie wartości mnożnika kinematycznego od mnożnika otrzymanego dla powłoki idealnej jest wielkością rzędu h , to we wzorze (9.12) odchylenie to zależy od postaci wykresu funkcji $\Phi_x(x)$ w punkcie maksimum.

Oceńmy z grubsza wartość tego odchylenia. Załóżmy, że w punkcie maksimum funkcji $\Phi_x(x)$ można wpisać kąt w sposób pokazany na rys. 8. Podstawmy $x_1 = x_0 - \sqrt{h}$, $x_2 = x_0 + \sqrt{h}$. Wtedy

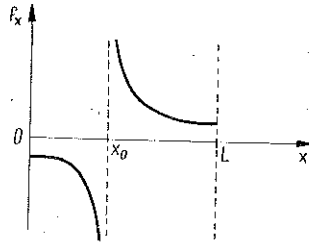
$$(9.13) \quad \frac{2\tau_0}{M} \leq \lambda \leq \frac{2\tau_0}{M} + \tau_0 \frac{\frac{M}{2} + k}{M \left(M - \frac{k\sqrt{h}}{2} \right)} \sqrt{h}.$$

Zauważmy, że jeśli odnośnie gładkości krzywej $\Phi_x(x)$ w punkcie maksimum założyć tylko to, że można wpisać odpowiedni kąt, to we wzorze (9.13) można

poprawić jedynie stałą przed \sqrt{h} , ale sam rząd odchylenia pozostaje bez zmian. Zauważmy w końcu, że chociaż oceny typu (9.7) dokonane zostały dla funkcjonau (9.6), to łatwo wykazać, że są one tego samego rzędu i dla funkcjonau (9.5).



Rys. 8

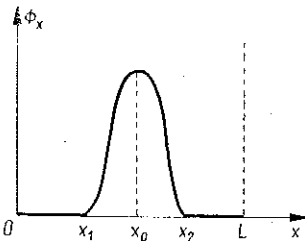


Rys. 9

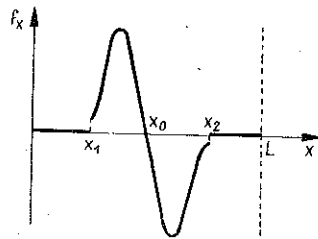
Przy skończonych wartościach h , jak wynika z przytoczonych rezultatów, prędkość zbieżności do obciążenia granicznego dla powłoki idealnej gwałtownie się zmniejsza przy $f_x(x)$ mających postać pokazaną na rys. 9, tzn. dla funkcji o nieskończonych amplitudach lecz całkowalnych.

10. O pewnych jakościowych własnościach obciążeń granicznych dla pól Kirchhoffa w zagadnieniu rozciągania

W problemach rozciągania dla powłoki idealnej zachodzi oczywiście następująca zasada lokalności: jeśli obciążenie rozłożone jest na pewnym odcinku Δl , to niszczące pole prędkości, odpowiadające obciążeniu granicznemu, jest skon-



Rys. 10



Rys. 11

centrowane w strefie działania tego obciążenia. Innymi słowy pole niszczące prowadzi do ruchu ośrodka jako ciała sztywnego poza strefą działania obciążenia Δl . Wykażemy, że analogiczna zasada jest prawdziwa w przypadku pól Kirchhoffa również dla problemu rozciągania. Załóżmy, że siła rozciągająca f_x jest taka, aby $\Phi_x(x)$ miała postać pokazaną na rys. 10 (wykres funkcji f_x odpowiadającej Φ_x jest pokazany na rys. 11), przy czym $x_1 > \pi h/2$, $x_2 < L - \pi h/2$. Zauważmy, że warunek $x_1 > \pi/2$ przy warunku $u_0(0) = 0$ jest nieistotny. Wykażemy zatem, że w przypadku obciążenia granicznego pole niszczące jest skupione w przedziale $[x_1, x_2]$. Rozpatrzmy funkcjonau (9.5) i załóżmy, że funkcja $u_0(x)$ spełnia ogranicze-

nia kinematyczne typu (9.4), tzn. $p(0)=0$. Funkcjonał (9.5) za pomocą zamiany zmiennej wygodniej jest przedstawić w postaci

$$(10.1) \quad 4\tau_0 \int_0^L \frac{h\zeta}{2L} d\zeta \int_0^{\frac{2L}{h\zeta}} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\sigma}\right)^2} d\sigma - 2L \int_0^L \lambda \Phi_x p dx.$$

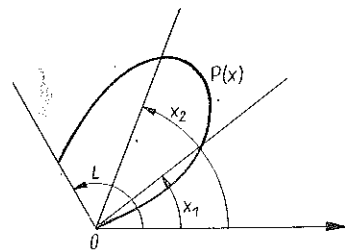
W dalszej części pracy σ i κ będziemy interpretować jako wielkości kąta w mierze radialnej. Zatem

$$\int_0^{\frac{2L}{h\zeta}} \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{d\sigma}\right)^2} d\sigma$$

przedstawia długość łuku wyrażoną we współrzędnych biegunowych. Oczywiście funkcjonal (10.1) minimalizuje nieujemne funkcje $p(x)$. Niech $p(x)$ posiada wykres przedstawiony na rys. 12. Kształt krzywej $p(x)$ na odcinkach $0 \leq x \leq x_1$, $x_2 \leq x \leq L$ nie wpływa na wielkość następującej całki

$$\int_0^L \Phi_x p dx.$$

Z drugiej strony w celu zmniejszenia długości łuku, a stąd i wartości funkcjonau (10.1), naturalne jest poprowadzenie łuku $p(x)$ w przedziale $0 \leq x \leq x_1$ wzdłuż promienia $x=x_1$, co oznacza: $p(x)=0$ dla $0 \leq x \leq x_1$. Z kolei przejście od zmiennej x do zmiennej σ oznacza rozciągnięcie skali o $2L/h\zeta$ razy. Z założenia $L - (\pi h)/2 > x_2$ wynika, że łuki $x=x_2$ i $x=L$ tworzą w zmiennych σ kąt nie mniejszy niż π . Dlatego, aby długość łuku na odcinku od x_2 do L w zmiennych σ była znów najmniejsza, wykres funkcji $p(x)$ powinien dążyć wzdłuż łuku $x=x_2$ do początku układu. Zatem funkcji minimalizujących funkcjonal (10.1) należy szukać wśród funkcji $p(x)$ zerujących się w przedziałach $0 \leq x \leq x_1$ i $x_2 \leq x \leq L$.



Rys. 12

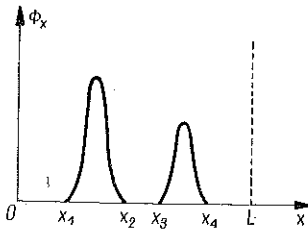
Fakt ten stanowi zasadę lokalności dla pól niszczących. Ponieważ w przypadku pól Kirchhoffa składowa poprzeczna prędkości $w(x, \zeta)$ jest związana z $p(x)$ zależnością

$$w(x, \zeta) = -\zeta \frac{h^2}{L^2} p(x),$$

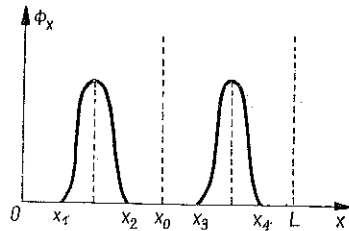
to łatwo zauważyć, że prędkość poprzeczna jest różna od zera tylko w strefie $x_1 \leq x \leq x_2$, a na mocy dodatniości funkcji $p(x)$ prowadzi do przewężenia (uściśnienia) powłoki w tej strefie. Taka postać płynięcia odpowiada jakościowo znanemu mechanizmowi zniszczenia przez utworzenie się szyjki.

Przejdziemy teraz do rozpatrzenia drugiej jakościowej własności związanej z rozkładem obciążeń granicznych dla funkcjonau (9.5). W przypadku powłoki

idealnej, jeśli obciążenie posiada postać przedstawioną na rys. 13, to jest ono graniczne, gdy lokalne maksima osiągają niezależnie wartość krytyczną $2\tau_0$. Przy tym zupełnie nieistotna jest odległość $x_3 - x_2$. W przypadku funkcjonału (9.5)



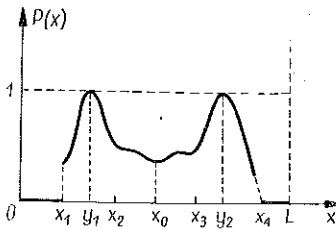
Rys. 13



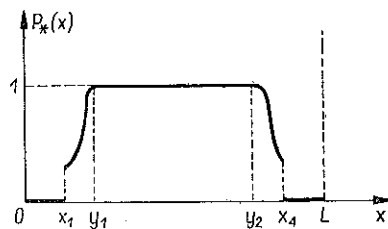
Rys. 14

sytuacja jest nieco odmienna. Mianowicie, jeśli spełniona jest nierówność $x_3 - x_2 > \pi h/2$, to obciążenie graniczne tak jak poprzednio określone jest niezależnie przez kształt każdej części wykresu $\Phi_x(x)$ na odcinkach $[x_1, x_2]$ i $[x_3, x_4]$. Oznacza to, że jeśli obciążenie osiąga wartość graniczną na odcinkach $[x_1, x_2]$ i $[x_3, x_4]$, to połączenie tych obciążeń również jest obciążeniem granicznym.

Z drugiej strony, jeśli $x_4 - x_1 < h/2$, to połączenie dwóch obciążeń granicznych na odcinkach $[x_1, x_2]$ i $[x_3, x_4]$ prowadzi do problemu niepoprawnie postawionego, tzn. kres dolny (9.5) jest równy $-\infty$. Dowód pierwszego stwierdzenia wynika z przeprowadzonych rozważań, które wykazują, że gdy $x_3 - x_2 > \pi h/2$, funkcja minimalizująca powinna zerować się dla $x_2 < x < x_3$.



Rys. 15



Rys. 16

Udowodnimy drugie stwierdzenie. Załóżmy, że wykres funkcji $\Phi_x(x)$ jest symetryczny względem prostej $x_0 = (x_3 + x_2)/2$ (rys. 14), a punkty x_1 i x_4 są oddalone od końców 0 i L odpowiednio o wielkość większą niż $\pi h/2$. Zatem wśród funkcji minimalizujących funkcjonał (9.5) istnieje taka funkcja, która zeruje się na odcinkach $[0, x_1]$ i $[x_4, L]$, a jej wykres jest symetryczny względem prostej $x_0 = (x_3 + x_2)/2$. Z jednorodności funkcjonału (9.5) można wywnioskować, że $\max p(x) = 1$ (rys. 15). Rozpatrzmy funkcję $p^*(x)$, przedstawioną na rys. 16, która równa jest 1 na odcinku $[y_1, y_2]$ i pokrywa się z $p(x)$ w pozostałych punktach odcinka $[0, L]$. Wtedy oczywiście

$$(10.2) \quad \int_0^L \Phi_x p dx \leq \int_0^L \Phi_x p^* dx.$$

Załóżmy, że $p(x)$ zeruje się w pewnym punkcie odcinka $[x_2, x_3]$. Wtedy

$$\int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p')^2} dx d\zeta \geq 2Lh + \int_0^{x_1} \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p')^2} dx d\zeta +$$

$$+ \int_{x_2}^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p')^2} dx d\zeta,$$

$$\int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^{*2} + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p^{*\prime})^2} dx d\zeta \leq 4L(x_4 - x_1) +$$

$$+ \int_0^{x_1} \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p')^2} dx d\zeta + \int_{x_2}^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p')^2} dx d\zeta,$$

tnz. przy $(x_4 - x_1) < h/2$

$$(10.3) \quad \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^2 + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p')^2} dx d\zeta \geq \int_0^L \int_{-L}^L \sqrt{4p^{*2} + \frac{h^2}{L^2} \zeta^2(p^{*\prime})^2} dx d\zeta.$$

Z nierówności (10.2) i (10.3) wynika, że wartość funkcjonału (9.5) dla funkcji $p^*(x)$ jest mniejsza niż dla funkcji $p(x)$. Wynika stąd, że odcinek $[x_2, x_3]$, na którym nie działają siły zewnętrzne, ale mimo to będący w polu niszcącym (tnz. w polu odpowiadającym obciążeniom niszcącym), znajduje się w stanie plastycznym. Ostatnia konkluzja jest równoważna temu, że łączne obciążenia graniczne na każdym z odcinków $[x_1, x_2]$ i $[x_3, x_4]$ posiadają mnożnik kinematyczny mniejszy od 1, czyli, innymi słowy, prowadzą do problemu niepoprawnie postawionego.

Na zakończenie należy podkreślić, że otrzymane w tym punkcie wyniki przenoszą się automatycznie na problem zginania.

Przeprowadzone wyżej wywody o oddziaływaniu układów obciążeń samorzównoważonych, przyłożonych do ośrodka w strefach ograniczonych i nie pokrywających się, są równoważne znanej w teorii sprężystości zasadzie Saint-Venanta. Jednakże, jeśli w ramach teorii sprężystości takiego typu zaburzenia nie oddziałują na siebie tylko asymptotycznie, to dla materiału idealnie-plastycznego w otoczeniu pól Kirchhoffa zaburzenia te nie oddziałują silnie na siebie już na odległościach skończonych.

Autorzy wyrażają podziękowanie J. N. RABOTNOWOWI i W. D. KLUSZNIKOWI za cenne uwagi w dyskusjach i zainteresowanie pracą.

Literatura cytowana w tekście

1. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды*, Прикл. мат. мех., 3, 29 (1965).
2. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *Застойные зоны течения вязко-пластической среды*, Прикл. мат. мех., 4, 30 (1966).
3. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *Качественные особенности движения вязко-пластической среды в трубах*, Прикл. мат. мех., 3, 31 (1967).

4. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *Прямолинейные стационарные движения вязко-пластической среды*, Доклады АН СССР, 2, 174 (1967).
5. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *О прямолинейных движениях идеально-пластической среды*, Доклады АН СССР, 3, 174 (1967).
6. С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Известия АН СССР, серия мат., 3, 10 (1946).
7. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Издательство «Наука», Москва 1965.

Резюме

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Задача о переходе в пластическое состояние панелей при цилиндрическом изгибе является простейшей задачей, возникающей в теории жестко-пластических оболочек.

В настоящей работе постановка этой задачи и ее решение получено с помощью вариационных методов, разработанных ранее авторами [1–5]. В общей трехмерной постановке задачи для произвольных жестко-вязко-пластических сред доказано (§ 1), что предельные нагрузки, определяются идеально-пластической частью функции диссипации среды.

Далее, в работе показано (§§ 2–5), что традиционная теория панелей (идеальных), основанная на предположении о возможности пренебречь касательными напряжениями в материале панели, является асимптотически точной в задачах о растяжении и изгибе при толщине панели стремящейся к нулю.

Даны оценки отклонения асимптотических значений предельных нагрузок при малой толщине панели от предельных нагрузок, получаемых для идеальных панелей при совместном растяжении и изгибе.

Все результаты оказываются справедливыми и в случае криволинейных панелей.

Даны (§§ 6–8) общие формулы для определения предельных нагрузок для идеальных панелей, как в статически определимых, так и в статически неопределимых задачах.

Приведены оценки отклонения предельных нагрузок для панелей конечной толщины от предельных нагрузок идеальной панели, причем указывается связь между этими оценками и характером распределения нагрузок (§ 9).

Рассмотрены качественные особенности разрушающего поля скоростей (т. е. поля скоростей соответствующего предельной нагрузке) в предположении, что эти поля удовлетворяют гипотезе Кирхгофа (§ 10). Именно, образование шеек при разрушении и аналог принципа Сен-Венана.

Summary

VARIATIONAL METHODS IN THE THEORY OF RIGID-PLASTIC
CYLINDRICAL SHELLS

The problem of the transition of shells into the plastic state for cylindrical bending is one of the more straightforward problems in the theory of rigid-plastic shells.

In this paper, the problem has been formulated and solved on the basis of variational methods worked out previously by the authors (1–5). It is shown (Sec. 1) that in the general three-dimensional formulation of the problem for arbitrary rigid-plastic media, the limiting load is determined by the perfectly plastic part of the function of dissipation of the medium.

Subsequently it is shown (Sec. 2–5) that the classical theory of (perfect) shells based on the assumption of disregarding the shear strains in the material of the shell constitutes an asymptotic

tically exact theory of the problems of stretching and bending at a shell thickness approaching zero.

Evaluations are presented of deviations of the asymptotic values of limiting loads obtained at a low thickness of the shell from the limiting loads for perfect shells obtained during simultaneous stretching and bending.

It appears that all the results are valid also in the case of curvilinear shells. General formulae are presented (Sec. 6-8) for the determination of limiting loads both for problems statically determined and for those statically indetermined.

Evaluations are indicated of deviation of the limiting loads for shells with finite thickness from the limiting loads for a perfect shell, and where the relation is shown between these estimations and the character of the distribution of loads (Sec. 9).

Consideration is given to the qualitative properties of the destructive field of velocity (i.e., a velocity field corresponding to the limiting load) with the assumption that these fields satisfy the Kirchoff hypothesis (Sec. 10). In particular, the problem of the formation of a neck during destruction is considered, together with the analogy of Saint Venant's principle.

UNIwersytet Moskiewski
IM. M. W. ŁOMONOSOWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1969 r.